О.Ф. Калайда (Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна)

## Загальний розв'язок одного диференціального рівняння

В [1, стор. 6] наведено множину розв'язків (названих авторами загальним розв'язком)

$$y = \eta(2x/3 + C_1)^{3/2},\ \forall C_1, \eta = \pm 1, 0, \tag{1}$$

диференціального рівняння

$$y' = y^{1/3} \tag{2}$$

Оскільки з (1) ні при яких, навіть невласних, значеннях сталої $C_1$ його особливий розв'язок $y = 0$ добути не можна, то (1) не є загальний розв'язок рівняння (2),. Наведемо побудову загального розв'язку рівняння (2).

Для цього розглянемо загальнй клас рівнянь типу (2)

$$y' = y^{m/n},\ m, n \in N,\ 0 < m/n < 1, \tag{3}$$

де $m/n -$ нескорочуваний дріб. Тут слід розглядати лише такі три випадки:

1) числа $m, n$ непарні ( $m = 2k+1, n = 2l+1, k < l$ ), отже, $y$ довільне за знаком, а тому, згідно (3), $y' \le 0$ при $y \le 0$, $y' \ge 0$ при $y \ge 0$;

2) число $m$ парне, число $n$ непарне ( $m = 2k, n = 2l+1, k \le l$ ) , отже, $y$ - довільне за знаком, а $y' \ge 0$;

3) число $m$ непарне, число $n$ парне ( $m = 2k-1, n = 2l, k \le l$ ), отже, $y \ge 0 \Rightarrow y' \ge 0$ (сюди відноситься і клас рівнянь $y' = y^{\alpha}, \alpha -$ ірраціональне число, $0 < \alpha < 1$). В усіх цих випадках рівняння (3) має особливий розв'язок $y = 0$ та неособливі розв'язки: у першому випадку

$$y = \pm((1 - m/n)(x - C))^{n/(n-m)},$$

а у другому і третьому випадках

$$y = ((1 - m/n)(x - C))^{n/(n-m)}.$$

Гладким зрощуванням неособливих та ососбливого розв'язків рівняння (3) у першому випадку дістаємо загальний розв'язок рівняння (3) у вигляді

$$y = \begin{cases} \forall y \le 0, \begin{cases} 0,\ x \le C_1,\ \forall C_1, \\ -(2(l-k)(x - C_1)/(2l+1))^{(2l+1)/(2(l-k))},\ x > C_1; \end{cases} \\ \forall y \ge 0, \begin{cases} 0,\ x \le C_2,\ \forall C_2, \\ (2(l-k)(x - C_2)/(2l+1))^{(2l+1)/(2(l-k))},\ x > C_2. \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

При $k = 0, l = 1$ з (4) дістаємо загальний розв'язок рівняння (2).

У другому випадку загальний розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$y = \begin{cases} ((2(l-k)+1)(x - C_1)/(2l+1))^{(2l+1)/(2(l-k)+1)},\ x < C_1, \\ 0,\ C_1 \le x \le C_2,\ C_1 \le C_2, \\ ((2(l-k)+1)(x - C_2)/(2l+1))^{(2l+1)/(2(l-k)+1)},\ x > C_2. \end{cases}$$

І, нарешті, у третьому випадку загальний розв'язок рівняння (2) має вигляд

$$y = \begin{cases} 0,\ x \le C_1,\ \forall C_1, \\ ((2(l-k)+1)(x - C_1)/(2l))^{2l/(2(l-k)+1)},\ x > C_1. \end{cases}$$

[1]. Carl M. Bender, Steven A. Orszag. Advansed matematical methods for scientists and engineers. McGraw-Hill. Inc.1978. – 593 s.