А.А. Янцевич, А.Ю. Петрова (Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина)

Корреляционная теория одного класса векторных нестационарных случайных процессов

Одной из важнейших задач корреляционной теории случайных процессов является получение спектральных представлений для нестационарных векторных случайных процессов вида $\xi(t) = (\xi_1(t,\omega),\ \xi_2(t,\omega))$, где $\omega \in \Omega$ (вероятностное пространство), $t \in [0,\infty)$, с непрерывной корреляционной матрицей $K_{\alpha\beta}(t,s) = M\xi_\alpha(t,\omega)\overline{\xi_\beta(s,\omega)}$ ($M\xi_\alpha(t,\omega) = 0$, $\alpha,\beta = 1,2$), а также построение соответствующих канонических представлений для корреляционных матриц и характеристик нестационарности.

На базе треугольных моделей квазиунитарных операторов [1, 2] изучена структура соответствующей корреляционной матрицы $K_{\alpha\beta}(t,s)$ и получены представления для специальной *матрицы* с элементами:
$$N_{\alpha\beta}(t,s) = \frac{\partial^2 K_{\alpha\beta}(t,s)}{\partial t \partial s} - K_{\alpha\beta}(t,s),. \tag{1}$$

Матрица (1) – матрица *неунитарности,* которая характеризует отклонение векторного случайного процесса от процесса, который в соответствующем гильбертовом пространстве $H_\xi = \overline{\bigvee_{\alpha,k} \xi_\alpha(t_k)}$ ($\overline{\{t_k\}}_{k=1}^{\infty} = [0,\infty)$, $\alpha = 1,2$) представляется в виде $\left(e^{tU}x_{01}, e^{tU}x_{02}\right)$, где U – унитарный оператор (*унитарная* кривая).

Восстановление корреляционной матрицы $K_{\alpha\beta}(t,s)$ требует решения уравнения в частных производных телеграфного типа: $\dfrac{\partial^2 K_{\alpha\beta}(t,s)}{\partial t \partial s} - K_{\alpha\beta}(t,s) = N_{\alpha\beta}(t,s)$, при дополнительных условиях: $K_{\alpha\beta}(t,0) = F_{\alpha\beta}(t)$, $K_{\alpha\beta}(0,s) = G_{\alpha\beta}(s)$, $F_{\alpha\beta}(t) = \overline{G_{\beta\alpha}(t)}$, т. е. сводится к задаче Дарбу-Гурса.

Можно показать, что для того, чтобы векторная эволюционно представимая кривая $x(t) = (e^{tT_1}x_{01}, e^{tT_2}x_{02})$ ($\|T_k\| < \infty$) была унитарной, необходимо и достаточно, чтобы $N_{\alpha\beta}(t,s) \equiv 0$.

Включим оператор T в операторный узел (комплекс) неунитарности [2], и рассмотрим линейную систему, ассоциированную с операторным узлом [1]:
$$\begin{cases} \dfrac{dx_\alpha(t)}{dt} = Tx_\alpha(t) + \Phi u_\alpha, \\ v_\alpha = Ku_\alpha + \Psi x_\alpha(t), \\ x_\alpha(0) = x_{\alpha 0}, \end{cases}$$
где $x_\alpha \in H$, $u_\alpha \in E$, $v_\alpha \in F$, а операторы $T \in [H,H]$, $\Phi \in [E,H]$, $K \in [E,F]$, $\Psi \in [H,F]$ удовлетворяют соотношениям унитарного операторного узла, которые представляют собой условие унитарности операторной матрицы $D = \begin{pmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{pmatrix}$ в соответствующей метрике.

Тогда матрица $N_{\alpha\beta}(t,s)$ имеет простой вероятностный смысл:

$$N_{\alpha\beta}(t,s) = [u_\alpha(t), u_\beta(s)]_E - [v_\alpha(t), v_\beta(s)]_F ,$$

(где квадратными скобками обозначены соответствующие индефинитные скалярные произведения в E и F), т. е. является разностью корреляционных матриц на входе и выходе линейной системы. Учитывая, что корреляционная матрица $K_{\alpha\beta}(t,s)$ может быть представлена в виде скалярного произведения $K_{\alpha\beta}(t,s) = \left\langle x_\alpha(t), x_\beta(s) \right\rangle_{H_\xi}$ [1], где $\left(x_1(t), x_2(s)\right)$ – кривая в H_ξ, соответствующая векторному случайному процессу $\left(\xi_1(t), \xi_2(s)\right)$, для $N_{\alpha\beta}(t,s)$ легко получить представление в виде $N_{\alpha\beta}(t,s) = \left\langle (I - T_\alpha^* T_\beta) x_\alpha(t), x_\beta(s) \right\rangle_{H_\xi}$. В случае, если векторный случайный процесс эволюционно представим, векторная кривая в H_ξ имеет вид $x(t) = (e^{tT_1} x_{01}, e^{tT_2} x_{02})$.

Для простейшего случая, когда $T_1 = T_2 = T$, $N_{\alpha\beta}(t,s)$ имеет вид $N_{\alpha\beta}(t,s) = \left\langle (I - T^* T) x_1(t), x_2(s) \right\rangle_{H_\xi}$.

Для приложений наибольший интерес представляет случай, когда $\dim E < \infty$, $\dim F < \infty$.

Если T – квазиунитарный оператор с одномерным дефектным подпространством G_{T^*T}, представляющий собой сжатие с дискретным спектром, то для $N_{\alpha\beta}(t,s)$ с использованием соответствующей треугольной модели в ℓ_2 [2] получаем представление $N_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha(t)\overline{\varphi_\beta(s)}$, где $\psi_\alpha(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{0\alpha}(k) \Lambda_k(t)$, функция $\Lambda_k(t)$ определяется только по спектру оператора T: $\Lambda_k(t) = \dfrac{-1}{2\pi i} \oint\limits_\gamma e^{t\lambda} \left((\hat{T}^* - \lambda I)^{-1} g \right)_k d\lambda$, где γ охватывает весь спектр оператора $\hat{T}$ ($|\mu_k| < 1$), а канальный элемент $\hat{g}$ строится только по спектру $\sigma(\mu_k)$.

В случае непрерывного спектра у сжатия T для $\psi_\alpha(t)$ получено представление $\psi_\alpha(t) = \int\limits_0^l x_{0\alpha}(u) \Lambda(u,t) du$, где $\Lambda(u,t)$ строится также только по непрерывному спектру оператора T.

Использование операции сцепления открытой системы позволяет получить и спектральные представления векторных случайных процессов.

[1] Livshits M. S. and Yantsevitch A. A. Operator colligations in Hilbert space. New-York: Wiley. 1979. 210 p.
[2] Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. Х.: Изд-во ХНУ, 2003. 342 с.