Я.М.Хусаинов (каф..теории вероятностей и методики преподавания математики СамГУ, Самарканд,Узбекистан)

О предельных распределениях времени ожидания для приоритетных систем в условиях большой загрузки

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания, на которую поступает три независимых пуассоновских потоков вызовов с параметрами $\lambda_k\,(k=1,2,3)$ при дисциплине обслуживания с абсолютным приоритетом в случае дообслуживания прерванного вызова. Время обслуживания вызова k -го потока – случайная величина, распределенная по произвольному закону $F_k(x)\quad (k=1,2,3)$ с конечными математическими ожиданиями α_{k1}.

Пусть $\{\eta_k\}$ – последовательность правильных одинаково распределенных случайных величин с плотностью распределения:

$$P_b(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x(1-b)}}\left[\exp\left(-\frac{x}{4(1-b)}\right)-\frac{1}{2(1-b)}\int_x^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{4x(1-b)}\right)du\right],\quad x>0$$

Пусть, даже $0<b<1$, ν - целочисленная случайная величина, имеющая геометрическое распределение $P(\upsilon=m)=(1-b)b^m$, $m=0,1,2,...$

Положим

$$\zeta_\upsilon=\eta_1+...+\eta_\upsilon\ ,\ \ V_b(x)=P(\zeta_\upsilon<x),\ H(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^x\int_0^y e^{-\frac{1}{2}\left(u+\frac{9}{2}\right)}\frac{u}{v^{3/2}}e^{-\frac{u^2}{4v}}dudv$$

Пусть $\xi_k\ (k=1,2,3)$ - стационарное время ожидания вызова k -го потока при условии, что в системе обслуживаются только вызовы k -го потока. Обозначим через ρ_k загрузку системы вызовами k -го потока, а через ρ загрузку системы всех потоков, т.е. $\rho=\rho_1+\rho_2+\rho_3$

В данной работе доказаны предельные теоремы, в которых описывается класс предельных распределений для совместных стационарных распределений времени ожиданий $P(\xi_k<x_k,k=1,2,3)$ при различных изменениях ρ_k в условиях большой загрузки, т.е. когда $\rho\to 1$.

В частности, доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема. Пусть $\rho\to 1$ так, что $\rho_1\to a,\rho_2\to 1-a$, причем $0\le a<1$. Тогда если $\rho_3(1-\rho_1-\rho_2)^{-2}\to\infty(\rho_3(1-\rho_1-\rho_2)^{-1}\to b,\,0\le b\le 1)$, то для всех $x_k>0,\ k=1,2,3$.

$$\lim P\left(\xi_1<x_1,\frac{\xi_2}{M\xi_2}<x_2,\frac{\xi_3}{M\xi_3}<x_3\right)=\begin{cases}B(x_1)H(x_2,x_3), & b=0,\\ B(x_1)H\left(x_2,\dfrac{x_3}{1-b}\right)*^{x_3}V_b(x_3), & 0<b<1\\ B(x_1)E(x_2)E(x_3), & b=1.\end{cases}$$

где $B(x)$ определяется своим преобразованием Лапласа-Стильтеса

$$\gamma(s) = \frac{1-a}{1-\frac{a}{\alpha_{11}}\cdot\frac{1-\alpha_1(s)}{S}}, \quad \alpha_1(s) = \int_0^\infty e^{-sx}dF_1(x), \quad E(x) = 1-e^{-x}, \; x>0.$$

[1] Гнеденко Б.В. и др.Приоритетные системы обслуживания. Изд-во МГУ, 1973.