Хусаинов Д.Я. (Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев)
Верейкина М.Б. (Институт математики НАН Украины, отдел теории динам. систем, Киев)
Иванов А.Ф. (Пенсильванский университет, США).

Представление решений уравнений с распределенными параметрами с запаздыванием

В первой части настоящего доклада рассматривается уравнение теплопроводности с запаздыванием

$$u_t(x,t) = a_1^2 u_{xx}(x,t) + a_2^2 u_{xx}(x,t-\tau) + c_1 u(x,t) + c_2 u(x,t-\tau) + f(x,t),$$

определенное при $0 \le x \le l, \quad t \ge 0$.

Рассматривается первая краевая задача. Начальное условие имеет вид $u(x,t) = \varphi(x,t)$, $0 \le x \le l$, $-\tau \le t \le 0$, а краевые условия $u(0,t) = \mu_1(t), \;\; u(l,t) = \mu_2(t), \;\; t \ge -\tau$, причем выполнено условие «согласования краевых и начальных условий» $\varphi(0,t) = \mu_1(t)$, $\varphi(l,t) = \mu_2(t)$, $-\tau \le t \le 0$.

Для получения решения используется специальная функция, названная запаздывающим экспоненциалом. Используя метод Фурье, получаем, что решение краевой задачи одномерного неоднородного уравнения теплопроводности с запаздыванием имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{l} x \times$$
$$\times \left\{ e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t+\tau)} e_\tau^{D_n t} \Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t-s)} e_\tau^{D_n(t-\tau-s)} \left[\Phi_n'(s) - \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2 \right] \Phi_n(s) \right] ds \right\} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t-s)} e_\tau^{D_n(t-\tau-s)} F_n(s) ds \right] \sin\frac{\pi n}{l} x + \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right],$$

где

$$F_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi + \frac{2}{\pi n}\frac{d}{dt}\left[(-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t)\right] -$$
$$- \frac{2}{\pi n} c_1 \left[(-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t)\right] - \frac{2}{\pi n} c_2 \left[(-1)^n \mu_2(t-\tau) - \mu_1(t-\tau)\right],$$

$$\Phi_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi + \frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t)\right], \quad D_n = \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right] e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}.$$

Решение дифференциального уравнения с запаздыванием представлено в виде формального ряда Фурье. Получены следующие условия сходимости решений краевой задачи.

Теорема. Пусть функции $F(x,t)$, $\Phi(x,t)$ таковы, что коэффициенты Фурье $F_n(t)$, $\Phi_n(t)$ и $\Phi_n'(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{n\to\infty} n^{2(k-2)} \left[\Phi_n'(s) + \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2 \right] \Phi_n(s) \right] e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2 (t^* - s)} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{2(k-1)} \left|F_n(s)\right| e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2 \left(t^*+\tau\right)} = 0\,,\ -\tau \le s \le 0\,,\ \ (k-1)\tau \le t^* < k\tau\,.$$

Тогда функция $u(x,t)$, представленная рядом, имеет непрерывную производную по t, непрерывную производную второго порядка по x, и будет решением уравнения, удовлетворяющим начальному и краевым условиям. При этом возможно почленное дифференцирование ряда по x (два раза) и по t (один раз), и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно при $0 \le x \le l$, $-\tau \le t$.

В дальнейшем рассмотрены уравнение параболического типа и системы линейных уравнений с частными производными с запаздыванием.