

Д.Я. Хусаинов¹. (Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко),
 J. Diblík², J. Bastinec³, A. Rivořova⁴ (Ústav matematiky, Fakulta elektrotechniky a komunikačních
 technologií VUT v Brně),
 Е.И. Кузьмич (Волинский национальный университет им. Леси Украинки).

Оценки решений линейных систем нейтрального типа

Рассматривается линейная система нейтрального типа с постоянными коэффициентами

$$\frac{d}{dt}[x(t) - Dx(t - \tau)] = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

определенная на промежутке $0 \leq t \leq m\tau$. При исследовании будет использоваться функционал

$$V_0[x(t), t] = x^T(t)Hx(t) + \int_{t-\tau}^t e^{-\beta(t-s)} \left\{ x^T(s)G_1x(s) + \dot{x}^T(s)G_2\dot{x}(s) \right\} ds \quad (2)$$

Обозначим $S[\beta, H, G_1, G_2] = \begin{bmatrix} -A^TH - HA - G_1 - A^TG_2A & -HB - A^TG_2B & -HD - A^TG_2D \\ -B^TH - B^TG_2A & e^{-\beta\tau}G_1 - B^TG_2B & -B^TG_2D \\ -D^TH - D^TG_2A & -D^TG_2B & e^{-\beta\tau}G_2 - D^TG_2D \end{bmatrix},$

$$\varphi(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}, \quad \varphi_1(H, G_1) = \frac{\lambda_{\max}(G_1)}{\lambda_{\min}(H)}, \quad \varphi_2(H, G_2) = \frac{\lambda_{\max}(G_2)}{\lambda_{\min}(H)}. \quad (3)$$

Приведем утверждение об устойчивости нулевого решения системы (1) и, соответственно, оценки сходимости решений полученные с использованием функционала (2).

Теорема 1. Пусть $|D| < 1$, и существуют положительно определенные матрицы H, G_1, G_2 и параметр $\beta > 0$, при которых матрица $S[\beta, H, G_1, G_2]$ положительно определенная. Тогда нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво в метрике C^1 . Причем для произвольного решения $x(t)$, $t > 0$ справедлива следующая оценка сходимости

$$\|x(t)\| \leq \left[\sqrt{\varphi(H)}\|x(0)\| + \tau\sqrt{\varphi_1(H, G_1)}\|\dot{x}(0)\| + \tau\sqrt{\varphi_2(H, G_2)}\|\ddot{x}(0)\| \right] e^{-\frac{1}{2}t}, \quad (2)$$

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \left[\left(\frac{|B|}{|D|} + M(\sqrt{\varphi(H)} + \tau\sqrt{\varphi_1(H, G_1)}) \right) \|x(0)\| + (\sqrt{\varphi(H)} + M\tau\sqrt{\varphi_2(H, G_2)}) \|\dot{x}(0)\| \right] e^{-\frac{1}{2}t}. \quad (3)$$

$$M = |A| + |DA + B|e^{\frac{1}{2}\gamma\tau} \left[1 - |D|^{m-1} e^{\frac{m-1}{2}\gamma\tau} \right], \quad \gamma = \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(S[\beta, H, G_1, G_2])}{\lambda_{\max}(H)}, \beta \right\}, \quad \varsigma = \min \left\{ \frac{2}{\tau} \ln \frac{1}{|D|}, \gamma \right\}.$$

Кроме того, представлены оценки сходимости решений уравнения (1) без предположения о его устойчивости. При этом используется функционал Ляпунова-Красовского вида

$$V[x(t), t] = e^{\gamma t} \left\{ x^T(t)Hx(t) + \int_{t-\tau}^t e^{-\beta(t-s)} \left[x^T(s)G_1x(s) + \dot{x}^T(s)G_2\dot{x}(s) \right] ds \right\}. \quad (4)$$

Этот функционал содержит экспоненциальный множитель, позволяющий в случае неустойчивости проводить оценку “расходимости” решений.

¹ This research was supported by the project No.M/34-2008 (27.03.2008) of Ukrainian Ministry Education.

² This research was supported by the Grant 201/08/0469 of Czech Grant Agency and by the Councils of Czech Government MSM 0021630503, MSM 00216 30519.

³ This research was supported by the Council of Czech Government MSM 0021630529.

⁴ This research was supported by the Council of Czech Government MSM 0021630529.