

Э.З. Гунбаталиев (Институт Математики и Механики НАН Азербайджана)

О разрешимости одного операторно-дифференциального уравнения на всей оси

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение

$$P \left(\frac{d}{dt} \right) u = (-1)^k \frac{d^{2k} u}{dt^{2k}} + A^{2k} u(t) + \sum_{j=0}^{2k-1} A_{2k-j} u^{(j)}(t) = f(t), \quad t \in R = (-\infty, \infty), \quad (1)$$

где

$$f(t) \in L_2(R; H) = \left\{ f : \|f\|_{L_2(R; H)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(t)\|_H^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$

$$u(t) \in W_2^{2k}(R; H) = \left\{ u : A^{2k} u \in L_2(R; H), u^{(2k)} \in L_2(R; H), \right.$$

$$\left. \|u\|_{W_2^{2k}(R; H)} = \left(\|A^{2k} u\|_{L_2(R; H)}^2 + \|u^{(2k)}\|_{L_2(R; H)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

а операторные коэффициенты удовлетворяют условиям:

- 1) A - положительно-определенный самосопряженный оператор;
- 2) при $j = 2m$ ($m = \overline{0, k}$) операторы iA_{2k-j} , а при $j = 2m - 1$ ($m = \overline{1, k}$) операторы A_{2k-j} симметричны и $D(A^{2k-j}) \subset D(A_{2k-j})$ ($j = \overline{0, 2k-1}$).

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1), 2). Тогда при любом $f(t) \in L_2(R; H)$ существует вектор-функция $u(t) \in W_2^{2k}(R; H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в $R = (-\infty, \infty)$ и выполняется оценка

$$\|u\|_{W_2^{2k}(R; H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R; H)}.$$

Теорема 2. При любом $i\xi$, где $\xi \in R$, резольвента пучка $P(\lambda)$ существует и имеет место оценка

$$\sum_{j=0}^{2k} (1 + |\xi|)^j \|A^{2k-j} P^{-1}(i\xi)\| \leq \text{const}.$$
