

В.А. Густомесов (Рос. гос. проф.-пед. ун-т, Екатеринбург, Россия)

Исследование циклов кубических отображений с позиции линейной сопряженности

Рассматривается дискретная динамическая система

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

определяемая вещественным кубическим отображением

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0).$$

Вводятся существенные параметры

$$s = \operatorname{sgn} a, \quad u = f'(x_0), \quad v = \frac{|f(x_0) - x_0|}{27|a|^{3/2}}$$

отображения f как инварианты отношения линейной сопряженности множества кубических отображений, здесь $x_0 = -b/(3a)$ – точка перегиба отображения. Тем самым определяются две полуплоскости $P^s = \{(u, v) \mid v \geq 0\}$ (основных) переметров u, v . Каждая точка на полуплоскости P^1 (P^{-1}) отвечает классу линейно сопряженных отображений f с положительным (отрицательным) старшим коэффициентом и с фиксированными значениями параметров u, v .

Предложена программа изучения k -циклов отображений ($k \in \mathbb{N}$ – период цикла), связанная с исследованием на полуплоскостях существенных параметров линий (постоянства) мультипликаторов циклов. Она включает при фиксированном k : нахождение уравнений линий мультипликаторов; выявление географии их расположения на полуплоскостях, включая асимптотическое поведение; нахождение множеств существования k -циклов G_k^s и их разбиение на подмножества с разным числом k -циклов; выделение областей устойчивости k -циклов G_k^s как объединений линий мультипликаторов с условием $|t| < 1$ (t – мультипликатор цикла). Для нахождения уравнений линий при $k > 1$ предлагается переход к k -циклу простого вида (нормированному циклу).

В полном объеме названная программа нереализуема, поскольку с ростом k сложность задач резко возрастает, а множество $\mathbb{N}$ бесконечно. В настоящем докладе представлены результаты достаточно полного аналитического изучения 1- и 2-циклов; 3-циклы исследованы менее подробно.

Линии мультипликаторов 1-циклов α_t^s являются графиками функций, асимптотически стремящихся к кривой α_1^s . Линии мультипликаторов 2-циклов β_t^s задаются параметрическими уравнениями и могут быть несвязными множествами, состоящими из двух связных компонент. Эти линии имеют одну или две бесконечные ветви, каждая из которых обладает асимптотикой с асимптотически кривыми β_1^s, α_{-1}^s . Особенностью областей G_1^s, G_2^s являются бесконечные утончающиеся языки, причем множества G_2^s имеют по два таких языка. Указаны оценки сверху множеств 3-циклов D_3^s , точные по координате u . Построены линии мультипликаторов сверхустойчивых 3-циклов ($t = 0$).

В работе [1] содержится несколько другой подход к изучению карт динамических режимов комплексных и вещественных кубических отображений. Он предполагает классификацию решений, проходящих через критические точки отображения, и опирается на аппарат топологической энтропии.