А. С. Горюнов (Інститут математики НАН України, Київ, Україна)

Про збіжність операторів Штурма-Ліувілля з сингулярними потенціалами.

Досліджується рівномірна резольвентна збіжность сімейства операторів Штурма-Ліувілля в гільбертовому просторі $L_2([a,b],\mathbf{C}) =: L_2$ з потенціалами-розподілами, що породжуються формальними виразами вигляду

$$l_\varepsilon(y) = -y''(t) + q'_\varepsilon(t)y(t), \qquad q_\varepsilon(t) \in L_2, \qquad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

де похідна розуміється в сенсі узагальнених функцій. Введемо квазіпохідні $D_\varepsilon^{[0]}y = y$, $D_\varepsilon^{[1]}y = y' - q_\varepsilon y$, $D_\varepsilon^{[2]}y = -(D_\varepsilon^{[1]}y)' - q_\varepsilon D_\varepsilon^{[1]}y - q_\varepsilon^2 y$. Тоді вирази $l_\varepsilon(y) = D_\varepsilon^{[2]}y$. Їм відповідають оператори L_ε, що визначаються наступним чином:

$$L_\varepsilon y = l_\varepsilon(y),\ Dom(L_\varepsilon) = \{y \in L_2 : \exists D_\varepsilon^{[1]}y, D_\varepsilon^{[2]}y \in L_2, \quad \alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_a(\varepsilon) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_b(\varepsilon) = 0\},$$

де $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon) \in \mathbf{C}^{2\times 2}$, а $\mathcal{Y}_a(\varepsilon) := \{D_\varepsilon^{[0]}y(a), D_\varepsilon^{[1]}y(a)\}$, $\mathcal{Y}_b(\varepsilon) := \{D_\varepsilon^{[0]}y(b), D_\varepsilon^{[1]}y(b)\}$.

Питання рівномірної резольвентної збіжності таких операторів у випадку крайових умов, що не залежать від параметра ε, було розглянуто в [1].

Теорема 1([1]). *Нехай $\|q_\varepsilon - q_0\|_2 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ і резольвентна множина оператора L_0 непорожня. Тоді оператори L_ε збігаються до L_0 в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.*

Ми узагальнюємо цей результат, послабивши умову на збіжність потенціалів і узагальнивши крайові умови, що задають оператори, включивши в них параметр ε.

Будемо позначати $c^\vee(t) = \int_0^t c(x)dx$.

Теорема 2. *Нехай резольвентна множина оператора L_0 не порожня і виконуються такі умови:*

1) $\|q_\varepsilon\|_2 \le const$;
2) $\|(q_\varepsilon - q_0)^\vee\|_C \to 0, \varepsilon \to 0$;
3) $\|(q_\varepsilon^2 - q_0^2)^\vee\|_C \to 0, \varepsilon \to 0$;
4) $\alpha(\varepsilon) \longrightarrow \alpha(0), \quad \beta(\varepsilon) \longrightarrow \beta(0), \varepsilon \to 0$

Тоді оператори L_ε збігаються до L_0 в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.

Побудовано приклад, який показує, що теорема 2 сильніша за теорему 1.

Доведення теореми 2 спирається на результати роботи [2] про неперервну залежність матриць Гріна систем диференціальних рівнянь від параметра.

Результати отримано спільно з В. А. Михайлецем.

[1] Савчук А. М., Шкаликов А. А. // Матем. заметки. — 1999. — **66**, N 6.

[2] Михайлец В. А. , Рева Н. В. // Доповіді НАН України — 2008. — N 9.