

О.Д. Глухов (Національний авіаційний університет, Київ, Україна)

Про зв'язність планарних pr - графів пуассонівського типу

Частково-випадковим графом або pr -графом на основі звичайного графа G з множиною G^0 вершин і множиною G^1 ребер, $|G^0| = n$, $|G^1| = m$, називається граф $G(p)$ з випадковою множиною ребер $U = (G(p))^1$, де $Prob(u \in U) = p$, якщо $u \in (G)^1$, $Prob(u \in U) = 0$, якщо $u \notin (G)^1$. Тут розглядаються pr -графи пуассонівського типу, для яких виконується умова: $p = 1 - \alpha/m$, де α - деяка константа. Такі граfi були введені в статті [1] для моделювання дискретних систем, структура яких може змінюватись внаслідок випадкового розриву частини зв'язків. В даній роботі розглядається задача оцінки ймовірності P зв'язності графа $G(p)$ у випадку, коли граф G є планарним 3-зв'язним графом.

У випадку, коли G - 3-зв'язний граф, для ймовірності P справедлива оцінка [1]:

$$1 - P \leq \sum_{k=3}^m \sigma_k q^k,$$

де $q = 1 - p$, $\sigma_k = \sigma_k(G)$ - число мінімальних (по включенню) реберних k -розрізів графа G .

Наступні дві леми дають оцінку числам $\sigma_k(G)$ для планарного 3-зв'язного графа G .

Лема 1. Якщо G — планарний 3-зв'язний граф, то $\sigma_3(G) \leq 2n \leq (4/3)m$.

Лема 2. Якщо G — простий (без петель і кратних ребер) планарний 3-зв'язний граф, то має місце наступна нерівність:

$$\sigma_k(G) \leq \frac{1}{2k} (2m)^{k/2}, \quad k \geq 4.$$

Дійсно, нехай G^* - граф, дуальний до графа G . Тоді для числа $z_k(G^*)$ циклів довжини k графа G^* , вірна нерівність $z_k(G^*) \leq (1/2k) \text{tr}(A^k) = (1/2k) \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$, де A - матриця суміжності, а

$\{\lambda_i\}_1^n$ - спектр графа G^* [2]. Врахувавши нерівність Єнсена: $(\sum_{i=1}^n \lambda_i^k)^2 \leq (\sum_{i=1}^n \lambda_i^2)^k$, де $k \geq 2$, отримаємо необхідну оцінку для числа $z_k(G^*)$, а отже і для числа $\sigma_k(G)$.

За допомогою даних двох лем можна довести наступне твердження.

Теорема. Якщо $G(p)$ - pr -граф пуассонівського типу на основі 3-зв'язного планарного графа G , то для ймовірності P його зв'язності вірна наступна оцінка:

$$P \geq 1 - cm^{-2}, \quad \text{де } c - \text{деяка стала.}$$

Для доведення теореми достатньо скористатися нерівністю $1 - P \leq \sum_{k=3}^m \sigma_k q^k$ і взяти до уваги оцінки для $\sigma_k(G)$, які встановлені лемами 1 та 2.

[1] Глухов О.Д., Коростіль Ю.М. Структурна безпека складних дискретних систем при випадкових відмовах. -Моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць ІПМЕ НАНУ, вип. 27, Київ, 2004, с. 91-95.

[2] Цветкович Д., Дуб Н., Захс Х. Спектры графов. Теория и применение.-Киев: Наукова думка, 1984. -384 с.