

С.В. Гегеле, С.В. Путилов (Россия, Брянский государственный университет)

Конечные группы с определенными полунормальными подгруппами

Все рассматриваемые группы конечные. $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G . Согласно [1], подгруппа H группы G называется полунормальной в G , если существует такая подгруппа K из G , что $HK=G$ и HK_1 – собственная подгруппа группы G для каждой подгруппы K_1 из K , отличной от K . Подгруппу K называют супердобавлением к подгруппе H в группе G . Все необходимые обозначения и определения можно найти в [3].

Теорема. Пусть различные силовские p_i -подгруппы $P_1, P_2, \dots, P_k$ полунормальны в группе G , где $p_i \in \pi(G)$, $i = \overline{1, k}$, $k \geq 2$. Тогда σ -холлова подгруппа, равная произведению $P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_k$, полунормальна в группе G , где $\sigma = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$.

Следствие 1. Если $P_1, P_2, \dots, P_k$ – различные силовские p_i -подгруппы полунормальные в G , $p_i \in \pi(G)$ и $p_i > q$ для каждого $q \in \pi', i = \overline{1, k}$, $k \geq 1$, то в группе G существует нормальная π -холлова подгруппа $P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_k$.

Доказательство. Если $k = 1$ и $p_1 > q$, для каждого $q \in \pi(G) \setminus \{p_1\}$, то по лемме 3 из [2] $P_1 \triangleleft G$. Пусть $k \geq 2$. Тогда по теореме в группе G существует π -холлова подгруппа $P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_k$. Так как $p_i > q$, для каждого $q \in \pi', i = \overline{1, k}$, $k \geq 1$, то по лемме 4 [1] $P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_k$ нормальная подгруппа в группе G . Следствие 1 доказано.

Следствие 2. Пусть r – наименьший простой делитель порядка конечной группы G , а также для любого $p \in \pi(G) \setminus \{r\}$ в G существует хотя бы одна силовская p -подгруппа из G полунормальная в G . Тогда группа G будет r -нильпотентной.

Доказательство. По теореме в группе G существует полунормальная σ -холлова подгруппа, которая по следствию 1 является нормальной подгруппой в G . Следствие 2 доказано.

Литература

1. В.С. Монахов. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой. // Мат. заметки. 2006. т.80, № 4. – С. 573-581.
 2. В.С. Монахов. В.В. Подгорная. Конечные группы с полунормальными нециклическими силовскими подгруппами // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2004. т.6, № 27. – С. 50-54.
 3. В. Huppert. Endliche Gruppen. I: Springer. 1967. – 793 s.
-