К.С. Галун, Б.Й. Пташник (ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна)

Багатоточкова задача для гіперболічно-параболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами

В області $D = \{(t,x) : t \in (0,T), x = (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega^p\}$, Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, розглядаємо задачу

$$P_1P_2u := \left(\sum_{|s|+2bs_0=2bm} A_{\hat{s}} \frac{\partial^{|\hat{s}|}}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\right)\left(\sum_{|\hat{s}|=n} B_{\hat{s}} \frac{\partial^{|\hat{s}|}}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\right) u(t,x) = 0, \qquad (1)$$

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x),\ j = 1, \ldots, m+n, \quad t_j = (j-1)t_0, \quad t_0 = T/(m+n-1), \qquad (2)$$

де $P_1 := P_1(\partial/\partial t, \partial/\partial x), P_2 := P_2(\partial/\partial t, \partial/\partial x)$ – параболічний та гіперболічний за Петровським, відповідно, диференціальні вирази; $b, m, n \in \mathbb{N}$, $s = (s_1, \ldots, s_p)$, $|s| = |s_1| + \ldots + |s_p|$, $\hat{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_p)$, $|\hat{s}| = |s_0| + |s_1| + \ldots + |s_p|$, $A_{\hat{s}}, B_{\hat{s}} \in \mathbb{R}$, $A_{m,0,\ldots,0} = 1$, $B_{n,0,\ldots,0} = 1$.

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду $u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(ik,x)$. Тоді $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком задачі

$$P_1(d/dt, ik)\, P_2(d/dt, ik)\, u_k(t) = 0, \quad u_k(t_j) = \varphi_{jk}, \quad j = 1, \ldots, m+n,$$

де $t_j = (j-1)t_0$, $\varphi_{jk} = (2\pi)^{-p} \int_{\Omega^p} \varphi_j(x) \exp(-ik,x) dx$.

Позначимо: $\mu_q(k)$, $q = 1, \ldots, m$, – корені рівняння $P_1(\mu, ik) = 0$; $\lambda_s(k)$, $s = 1, \ldots, n$, – корені рівняння $P_2(\lambda, k) = 0$ (для простоти міркувань вважатимемо, що в обох випадках вони є різними для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{\vec{0}\}$); $\mathcal{T}'$ – простір формальних тригонометричних рядів за змінними $x_1, \ldots, x_p$.

Теорема 1. *Якщо $Re\,\mu_r(k) \neq Re\,\mu_l(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{\vec{0}\}$, $1 \leq l < r \leq m$, то для единості розв'язку задачі (1), (2) в просторі $C^{m+n}([0,T], \mathcal{T}')$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{\vec{0}\} \quad \forall q \in \mathbb{Z} \quad [\lambda_r(k) - \lambda_l(k)]t_0 \neq 2\pi q, \quad 1 \leq l < r \leq n. \qquad (3)$$

Теорема 2. *Якщо $Re\,\mu_r(k) = Re\,\mu_l(k)$, $k \in \mathcal{K}_{rl} \subset \mathbb{Z}^p \backslash \{\vec{0}\}$ ($r = r_1, \ldots, r_\alpha$, $l = l_1, \ldots, l_\alpha$, $r \neq l$), то для единості розв'язку задачі (1), (2) в просторі $C^{m+n}([0,T], \mathcal{T}')$ необхідно і досить, щоб справджувалась умова (3) і умова*

$$\forall k \in \mathcal{K}_{rl} \quad \forall q \in \mathbb{Z} \quad [Im\,\mu_r(k) - Im\,\mu_l(k)]t_0 \neq 2\pi q, \quad r = r_1, \ldots, r_\alpha,\ l = l_1, \ldots, l_\alpha,\ r \neq l. \qquad (4)$$

Розв'язність задачі (1), (2) пов'язана з проблемою малих знаменників, для розв'язання якої використано метричний підхід. Встановлено умови існування класичного розв'язку задачі (1), (2) для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) значень параметра $t_0 \in (0, \infty)$ та для майже всіх векторів, складених із коефіцієнтів $B_{\hat{s}}$ рівняння (1). Результати поширено на випадок довільного розміщення вузлів t_j на відрізку $[0,T]$.

Дослідження підтримані ДФФД України (проект № Ф 29.1/005).