

З.Ю. Філер (Кіровоградський державний педагогічний університет ім. Володимира Винниченка, Україна)

Узагальнена формула Тейлора та її використання для розв'язання рівнянь

Ще в кінці 70-х років автор запропонував розглядати класичну формулу Тейлора як розв'язок задачі Коші $y^{(n+1)} = f(x)$, $y^{(k)} = y_{k0}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Відповідні узагальнення отримуються при використанні лінійного оператора $L[y] \equiv y^{(n+1)} + a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$. Якщо $u_k(x)$ є розв'язок задачі Коші $L[y] = 0$, $u_k^{(j)}(0) = \delta_{kj}$, то маємо для розв'язку неоднорідного рівняння $L[y] = f(x)$ з даними початковими умовами формулу $y(x) = T_L(x, x_0) + R_L(x, x_0)$, де узагальнений многочлен Тейлора $T_L(x, x_0) = \sum_{k=0}^n y_{k0} u_k(x - x_0)$, а залишковий член в інтегральній формі $R_L(x, x_0) = \int_{x_0}^x u_n(x - t) f(t) dt$ [1].

Це представлення є природнім апаратом для представлення розв'язків задачі Коші для лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами. Для квазілінійного рівняння $L[y] = f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ інтегральне рівняння, зручне для побудови як послідовних ітерацій $y = T_L(x, x_0) + u_{n+1}(x - x_0) \cdot f(x, y, y', \dots, y^{(n)})_c$. Останній множник є значенням “правої” частини в деякій середній точці x_c . При невеликому проміжку (x, x_0) можна в ролі це $x = c$ прийняти x_0 , а в ролі значень функцій $y(x_c)$ – лінійне “Тейлорівське” наближення $T_L(x, x_0)$.

Звідси впливає й чисельний метод розв'язання задачі Коші, який використовує матрицю з елементів $u_k^{(j)}(h)$, де h є вибраний крок чисельних квадратур. Цей метод є узагальненням методу ламаних Ейлера, але ланками цієї ламаної є дуги кривої – графіка $T_L(x, x_0)$, $h = x - x_0$. Кінець попередньої ланки є початком наступної. Залишковий член дає оцінку похибки. Для граничної задачі отримаємо систему інтегральних рівнянь Вольтерри – Гаммерштейна. Це дає змогу розглядати й задачі теорії нелінійних коливань у середовищі [2].

Узагальнений многочлен Тейлора $T_L(x, x_0)$ дає побудову “дотичного” наближення функції $f(x)$ в околі шуканого кореня, що узагальнює метод Ньютона. Для пошуку всіх комплексних коренів поблизу екстремуму ($f'(x_0) = 0$) маємо $f(x) \approx f(x_0)u_0(x - x_0) + f''(x_0)u_2(x - x_0)$. Часто достатньо для ітерацій використовувати оператори 2-го порядку типу $y'' \pm \omega^2 y$ або $y'' - ky'$.

- [1] Філер З.Е. Об одном обобщении формулы Тейлора и её применении к решению дифференциальных уравнений // УМЖ, 1981. — 33, №1. С. 123-128.
 - [2] Філер З.Е. О приближенном методе решения краевой задачи при изучении колебаний систем с распределёнными параметрами // Прикл. Мех., 1978. — 14, № 6. — С. 66-71.
-