А.М. Джураев (Кыргызский национальный университет, Бишкек, Кыргызстан)

Существование и единственность ограниченного решения краевой задачи с кратным спектром

Рассмотрим сингулярно-возмущенное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon y'(t,\varepsilon) - A(t)\,y(t,\varepsilon) = h(t), \qquad (1)$$

при $\varepsilon \to +0$ с краевым условием

$$Gy \equiv \{y_1(0,\varepsilon),\dots,y_r(0,\varepsilon),\,y_{r+1}(1,\varepsilon),\dots,y_n(1,\varepsilon)\} = y^0, \qquad (2)$$

где $2r=n$.

Сингулярно-возмущенные однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с кратным спектром предельного оператора изучались Тамаркиным Я.Д. [3].

Регуляризованная асимптотика решения задачи Коши для системы с кратным спектром дифференциальных уравнений в случае предельного оператора *A(t)* жордановой структуры получена С.А. Ломовым и А. Г. Елисеевым [2].

В [1] была разработана теория асимптотического интегрирования краевой задачи с кратным чисто мнимым спектром.

Пусть изучается краевая задача (1), (2). Пусть *A(t)* – матрица, эквивалентная многоклеточной жордановой матрице и выполнены следующие условия:

1^0. $A(t) \in C^\infty([0,1], C^{n\times n}),\ h(t) \in C^\infty([0,1], C^n)$ и спектр $\{\lambda_{ij}(t)\}, i=1..r, n=2r, j=1,2$ матрицы *A(t)* при каждом $t\in[0,1]$ удовлетворяет требованиям многоклеточности ($r > 1$): 1) $\lambda_{ij}(t)=\lambda_i(t)\neq 0,\ i=1..r, j=1,2;$ 2) $\operatorname{Re}\lambda_i(t)\equiv 0, i=1..r;$ 3) $\lambda_i(t)\neq\lambda_k(t),\ i,k=1..r.$

2^0. Матрица *A(t)* имеет жордановы цепочки векторов, т.е.

$$\forall t\in[0,1] \qquad A(t)\varphi_{i1}(t)=\lambda_i(t)\varphi_{i1}(t),\ A(t)\varphi_{i2}(t)=\lambda_i(t)\varphi_{i2}(t)+\varphi_{i1}(t), i=1..r.$$

Производные от собственных и присоединенных векторов разложим по базису $\varphi_{ij}(t), i=1..r, j=1,2 : \dot\varphi_{ij}(t)=\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=1}^{2} C_{ij}^{ks}(t)\varphi_{ks}(t).$

Потребуем, чтобы для $C_{i1}^{i2}(t)$ выполнялось условие

3^0. $\forall t\in[0,1] \qquad \operatorname{Re}\sqrt{-C_{i1}^{i2}(t)} > 0, i=1..r.$

В этой работе сформулирована и доказана теорема существования и единственности ограниченного решения краевой задачи (1), (2).

Теорема. Пусть дана задача (1), (2) и выполнены условия 1^0-4^0. Тогда задача (1), (2) имеет единственное ограниченное решение при $\varepsilon\to+0$.

[1] Dzhuraev A.M. Singular-perturbed boundary-value problems with a multiple pure imaginary spectrum. – Oldenburg, Germany, 2006. – P.3-5.

[2] Елисеев А.Г., Ломов С.А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора // Мат. сб. – 1986. - Т.131(173),№4. - С.544-557.

[3] Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград, 1917.