В.Л. Макаров, Д.В. Драгунов (Інститут математики НАН України, Київ, Україна)

Аналітико-чисельний метод наближеного розв'язування задачі Коші для систем нелінійних диференціальних рівнянь

Розглядається задача Коші

$$\frac{d}{dx}\overrightarrow{u}(x)+\widehat{f}(x,\overrightarrow{u}(x))\overrightarrow{u}(x)=\overrightarrow{g}(x),\ \overrightarrow{u}(x_0)=\overrightarrow{u}_0,\ x\in[x_0,x_K],\ x_0<x_K, \tag{1}$$

де $\overrightarrow{u}(x)=[u_1(x),\ldots,u_m(x)]^T$ – шуканий вектор, $\widehat{f}(x,\overrightarrow{u})$ – $m\times m-$матриця, елементи якої є функціями, визначеними на множині $B=[x_0,x_K]\times[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_m,b_m]$, $a_i<b_i$, $i=\overline{1,m}$, $(x_0,\overrightarrow{u}_0)\in B$, неперервними по x, та нескінченно диференційовними по u_i, $i=\overline{1,m}$, $\overrightarrow{g}(x)$– неперервна на $[x_0,x_K]$ вектор-функція.

Розв'язок задачі (1) шукається, використовуючи функціонально-дискретний (FD) [1] метод, який полягає у наступному:вводиться сітка $\{x_0<\ldots<x_N=x_K\}$ з кроком h, замість (1) розглядається більш загальна задача

$$\begin{gathered}\tfrac{d}{dx}\overrightarrow{u}(t,x)+\left\{\widehat{f}(x_{i-1},\overrightarrow{u}(t,x_{i-1}))-t\left[\widehat{f}(x_{i-1},\overrightarrow{u}(t,x_{i-1}))-\right.\right.\\ \left.\left.-\widehat{f}(x,\overrightarrow{u}(t,x))\right]\right\}\overrightarrow{u}(x)=\overrightarrow{g}(x),\ x\in[x_{i-1},x_i],i=\overline{1,m},\ \overrightarrow{u}(x_0)=\overrightarrow{u}_0,\end{gathered} \tag{2}$$

$t\in[0,1]$, розв'язок якої шукається у вигляді ряду з умовами зшивки в вузлах сітки

$$\overrightarrow{u}(t,x)=\sum_{i=0}^{\infty}t^i\overrightarrow{u}^{(i)}(x),\ \overrightarrow{u}(t,x_i-0)=\overrightarrow{u}(t,x_i+0),i=\overline{1,N-1}. \tag{3}$$

Доведено теорему.

Теорема 1. Нехай для задачі (1) виконуються умови:

1. На множині B має місце представлення $\widehat{f}(x,\overrightarrow{u})=\sum\limits_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum\limits_{i_m=0}^{\infty}u_1^{i_1}\ldots u_m^{i_m}K_{i_1\ldots i_m}(x)$, де $K_{i_1\ldots i_m}(x)$ – $m\times m-$матриці, неперервні та обмежені на $[x_0,x_K]$ в сукупності;
2. Розв'язок задачі (1) на $[x_0,x_K]$ існує і разом з деяким околом належить множині $B_u=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_m,b_m]$;

Тоді розв'язок задачі (1) на $[x_0,x_K]$ може бути з будь-якою точністю знайдений за допомогою FD-методу у вигляді частинної суми ряду (3) при $t=1$, причому швидкість збіжності цього ряду є суперекспоненційною: $\max\limits_{x_0\le x\le x_K}\left\|\overrightarrow{u}^{(j)}(x)\right\|\le\frac{C}{(j+1)^{1+\varepsilon}}\left(\frac{R}{h}\right)^j$, $C,R,\varepsilon>0$.

Розглянуте питання чисельної стійкості методу на нескінченному проміжку $[x_0,+\infty]$ (знайдено достатні умови стійкості).

[1] I.P. Gavrilyuk, I.I. Lazurchak, V.L. Makarov, D. Sytnik. A Method with a Controllable Exponential Convergence Rate for Nonlinear Differential Operator Equations // Computation Methods in Applied Mathematics, Vol. 9 (2009), No. 1, pp. 63-78 pp.386-392.