Б.В. Забавський, О.В. Домша (Львівський нац. універ. ім. І. Франка, мех.-мат. факультет, кафедра алгебри і логіки)

2-прості області Оре стабільного рангу 1

В роботі [1] показано, що проста область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є 2-простою. В даній роботі показано, що над 2-простою областю Оре стабільного рангу 1 довільна повна матриця еквівалентна канонічній діагональній матриці.

Означення 1 *Кільце R без дільників 0 називається областю Оре, якщо для довільних ненульових елементів $a, b \in R$ виконується $aR \bigcap bR \neq \{0\}$ і $Ra \bigcap Rb \neq \{0\}$.*

Означення 2 *Кільце R є називається кільцем стабільного рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$, існують $t \in R$ і $u \in U(R)$ такі, що $a + bt = u$ [2].*

Означення 3 *Матриці A і B назвемо еквівалентними над областю R, якщо існують зворотні матриці P і Q над R відповідних розмірів такі, що $B = PAQ$.*

Нехай R — проста область. Тоді для довільного ненульового елемента $a \in R$ отримаємо $RaR = R$, тобто існують елементи $u_1, u_2, ...u_n; v_1, v_2, ...v_n \in R$ такі, що

$$u_1av_1 + u_2av_2... + u_nav_n = 1.$$

Якщо для всіх ненульових елементів $a \in R$ існує натуральне число n таке, що $u_1av_1 + \cdots + u_nav_n = 1$, причому число n є найменше зі всіх можливих, тоді кільце R називається n-простим. Зокрема, область R є 2-простою тоді і тільки тоді, коли для довільного ненульового елемента $a \in R$ існують елементи $u_1, u_2; v_1, v_2 \in R$ такі, що $u_1av_1 + u_2av_2 = 1$.

Означення 4 *Квадратна матриця A над областю Оре називається повною, якщо вона не є дільником нуля.*

Твердження 1 *Нехай R — 2-проста область Оре стабільного рангу 1. Тоді для кожної повної матриці A другого порядку існує рядок $(1, u)$ і стовпчик $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, $u, e, f \in R$, причому u- зворотній елемент і*

$$(1, u)A\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = 1.$$

Теорема 1 *Для довільної повної матриці A існують такі зворотні матриці P, Q що*

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Delta \end{pmatrix}.$$

[1] Забавский Б. В. Простые кольца елементарных делителей. — Мат. студії., 2004. — N 2, – С. 129-133.

[2] Vaserstein L. N. The stable rank of rings and dimensionality of topological spaces // Func. Anal. Appl.. — 1971. — N 5, P. 102-110.