

В. М. Онуфриенко, А. А. Долгий (Каф. общей математики ЗНТУ, Запорожье, Украина)

Математическая дифференциальная модель фрактально структурированных метаматериалов

Рассматриваются основы новой дифференциальной модели фрактальных метаматериалов. Модель основывается на возможности определения хаусдорфовой метрики и меры фрактальных точечных зарядов с помощью дифференциальной альфа-формы сингулярных распределений на топологии множеств физических зарядов (элементов токов) в метаматериальной среде [1].

В общем теоретическом плане использование известной связи и соответствия между определениями дифференциальных форм порядка p и антисимметричными тензорами [2], допускает введение дифференциальных форм в тензорное представление уравнений Максвелла с использованием понятия метрики и внешнего дифференцирования.

Рассматривается обобщение 2-формы тензора Максвелла ${}^*F^{(\alpha+\beta)}$ в виде свертки $F^{(\alpha)}$ с формой объема $\varpi^{(\beta)}$ (т.е. ${}^*F^{(\alpha+\beta)} \equiv \frac{1}{2} \varpi^{(\beta)}(F^{(\alpha)})$); обобщение 3-формы электрического тока ${}^*\tilde{J}_e$ как свертку с формой объема $\varpi^{(\beta)}$ (т.е. ${}^*\tilde{J}_e^{(\alpha+\beta)} \equiv \varpi^{(\beta)}(J_e^{(\alpha)})$); обобщение 3-формы магнитного тока ${}^*\tilde{J}_m$ как свертку с формой объема $\varpi^{(\beta)}$ (т.е. ${}^*\tilde{J}_m^{(\alpha+\beta)} \equiv \varpi^{(\beta)}(J_m^{(\alpha)})$). Таким образом можно записать уравнение Максвелла с фрактальными электрическими и магнитными токами в симметричном бескоординатном виде на любом многообразии с метрикой:

$$\tilde{d}{}^*F^{(\alpha+\beta)} = {}^*\tilde{J}_m^{(\alpha+\beta)}, \quad \tilde{d}{}^*\tilde{F}^{(\alpha+\beta)} = {}^*\tilde{J}_e^{(\alpha+\beta)}.$$

Введением в рассмотрение дифференциальных вектор-потенциалов с учетом особенностей математической модели дифференциальных зарядов и токов объясняется применение свойств вектор-потенциалов в однородной сплошной среде для описания явлений в неоднородной фрактальной среде.

Задачи с особенностями в метаматериалах таким образом сведено к классическим задачам с гладкими границами.

Обобщено использование дифференциальных альфа-форм с переменным комплексным скейлинговым показателем в краевых условиях задач исследования границы раздела искусственных метаматериальных сред с неоднородными комбинациями связанных электрических и магнитных альфа-полей. Подтвержден механизм фрактального происхождения моделей реиндов/рекапов, обобщающих известные идеализированные RLC элементы, которые используются в теории метаматериальной структуры вещества.

Выявлено, что любых значениях скейлингового показателя, который характеризует фрактальную структуру границы раздела сред, возникают поверхностные волны. Известно, что в классической теории такой эффект связан с необходимостью использования одной из сред с отрицательной диэлектрической проницаемостью или с ненулевой мнимой частью.

Рассматриваются перспективы дальнейшего применения математического метода для анализа и синтеза искусственных метаматериалов с необходимыми электродинамическими характеристиками.

[1] Онуфриенко В.М. // Радиоелектроніка. Інформатика. Управління.-2002.-№ 2(8).

[2] Шутц Б. Геометрические методы математической физики. Пер с англ.-М.:Мир.-1980.