Условия отсутствия нетривиальных аттракторов Эно

Владимир А. Добрынский
Институт металлофизики НАН Украины

Обычно под отображением Эно подразумевают отображение: $\tilde{T} : \binom{x}{y} \mapsto \binom{1-ax^2+y}{bx}$, реже его модификацию — отображение: $T : \binom{x}{y} \mapsto \binom{1-ax^2+by}{x}$, где a, b — параметры и $a > 0,\, b \neq 0$. T имеет две неподвижные точки $P_\pm = (x_\pm, y_\pm)$, где $x_\pm = y_\pm = -\frac{1-b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{1-b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{a}}$. Обозначим $W^u(P_+)$ неустойчивое многообразие T в P_+, $\Lambda_+ = Cl(W^u(P_+))$ — замыкание $W^u(P_+)$, а $W^s(\Lambda_+)$ — устойчивое множество T в Λ_+. Пусть также $z_m = (x_m, y_m) = T^m(z_0)$, $m = 0, 1, 2, \ldots,$ $\mathcal{O}rb^+(z_0) = \bigcup_{m=0}^{\infty} T^m(z_0)$, $\mathcal{O}rb^-(z_0) = \bigcup_{m=-\infty}^{0} T^m(z_0)$ — соответственно положительная и отрицательная полутраектории, а $\mathcal{O}rb(z_0) = \mathcal{O}rb^-(z_0) \cup \mathcal{O}rb^+(z_0)$ — траектория точки z_0; $\|\vec{f}\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ — эвклидова норма вектора $\vec{f} = \binom{f_1}{f_2}$, $\vec{e}_1 = \binom{1}{0}$, $\vec{e}_2 = \binom{0}{1}$.

Пусть $\wp > 0$ и $\mathcal{K} \in (0, 1]$ — некоторые постоянные.

Теорема $\aleph$. Для любого $a \in (2-\wp, 2)$ найдутся $\mathbf{b}_a > 0$ и $\mathbf{c}_a \in (0, 10^{-3} \cdot \log 4)$ такие, что для любых $b \in (0, \mathbf{b}_a)$ и $c \in (\mathbf{c}_a, \log 2)$, ложным является следующее утверждение: "Λ_+ — нетривиальное топологически транзитивное притягивающее множество (аттрактор), на котором есть точка $z_1 \in \Lambda_+$ такая, что её положительная полутраектория $\mathcal{O}rb^+(z_1)$ всюду плотна на Λ_+, т.е. $Cl(\mathcal{O}rb^+(z_1)) = \Lambda_+$, и при этом существует единичный вектор $\vec{j}$ такой, что неравенство $\|DT^m(z_1)\vec{j}\| \geq \mathcal{K}e^{cm}$ справедливо для всех натуральных m."

Теорема $\mathbf{\Omega}$. Для любого $a \in (2-\wp, 2)$ найдутся $\mathbf{b}_a > 0$ и $\mathbf{c}_a \in (0, 10^{-3} \cdot \log 4)$ такие, что для любых $b \in (0, \mathbf{b}_a)$ и $c \in (\mathbf{c}_a, \log 2)$, ложным является следующее утверждение: "Λ_+ — нетривиальное топологически транзитивное притягивающее множество (аттрактор), на котором есть точка $z_1 \in \Lambda_+$ такая, что её положительная полутраектория $\mathcal{O}rb^+(z_1)$ всюду плотна на Λ_+, т.е. $Cl(\mathcal{O}rb^+(z_1)) = \Lambda_+$, и при этом неравенство $\|DT^m(z_1)\vec{e}_\ell\| \geq e^{cm}$ (здесь $\vec{e}_\ell$ либо $\vec{e}_1$, либо $\vec{e}_2$) справедливо для всех натуральных m."

Кажется вероятным, что в действительности справедливы более общие утверждения, чем утверждения теорем $\aleph$ и Ω. Именно:

Гипотеза $\aleph$. Для любых $a \in (2-\wp, 2)$ и $c \in (0, \log 2)$ найдётся $\mathbf{b}_{ac} > 0$ такое, что для любых $b \in (0, \mathbf{b}_{ac})$ ложным является следующее утверждение: "Λ_+ — нетривиальное топологически транзитивное притягивающее множество (аттрактор), на котором есть точка $z_1 \in \Lambda_+$ такая, что её положительная полутраектория $\mathcal{O}rb^+(z_1)$ всюду плотна на Λ_+, т.е. $Cl(\mathcal{O}rb^+(z_1)) = \Lambda_+$, и при этом существует единичный вектор $\vec{j}$ такой, что неравенство $\|DT^m(z_1)\vec{j}\| \geq \mathcal{K}e^{cm}$ справедливо для всех натуральных m."

Гипотеза $\mathbf{\Omega}$. Для любых $a \in (2-\wp, 2)$ и $c \in (0, \log 2)$ найдётся $\mathbf{b}_{ac} > 0$ такое, что для любых $b \in (0, \mathbf{b}_{ac})$ ложным является следующее утверждение: "Λ_+ — нетривиальное топологически транзитивное притягивающее множество (аттрактор), на котором есть точка $z_1 \in \Lambda_+$ такая, что её положительная полутраектория $\mathcal{O}rb^+(z_1)$ всюду плотна на Λ_+, т.е. $Cl(\mathcal{O}rb^+(z_1)) = \Lambda_+$, и при этом неравенство $\|DT^m(z_1)\vec{e}_\ell\| \geq e^{cm}$ (здесь $\vec{e}_\ell$ либо $\vec{e}_1$, либо $\vec{e}_2$) справедливо для всех натуральных m."