В.А. Болилый, М.А. Добрынина (Кировоградский государственный педагогический университет им. В. Винниченка, Украина)

Нестабильная дифференциальная точка поворота 1-го рода

Рассматривается сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение

$$\mathbf{L}_\varepsilon y(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon y'''(x,\varepsilon) + \varepsilon a(x) y''(x,\varepsilon) + b(x) y'(x,\varepsilon) + c(x) y(x,\varepsilon) = 0, \tag{1}$$

при $\varepsilon \to +0$, $x \in I = [-l; l]$, функції $a(x)$, $b(x)$, $c(x) \in C^\infty[-l; l]$.

Предполагается, что коэффициенты уравнения (1) имеют вид

$$b(x) \equiv x\tilde{b}(x), \quad c(x) \equiv x\tilde{c}(x). \tag{2}$$

Вырожденное уравнение, соответствующее уравнению (1)

$$b(x)\omega'(x) + c(x)\omega(x) = 0, \tag{3}$$

в точке $x = 0$ имеет разрыв 2-го рода.

Рассматриваемому уравнению (1) отвечает характеристическое уравнение следующего вида

$$\lambda^3(x) + a(x)\lambda^2(x) + \varepsilon b(x)\lambda(x) + \varepsilon c(x) = 0. \tag{4}$$

Поскольку исследуется дифференциальное уравнение (1) с точкой поворота, то корни характеристического уравнения (4) должны удовлетворять условиям: один простой корень $\lambda_1(x) \neq 0$, и два корня $\lambda_{2,3}(x) = \pm\sqrt{x\tilde{\lambda}(x)}$ слипаются в точке $x = 0$.

Из (2) видно, что $b(0) \equiv c(0) \equiv 0$, следовательно уравнение (1) содержит классическую точку поворота $x = 0$. Учитывая же тот факт, что в точке поворота обращается в нуль не только коэффициент при неизвестной функции, а и при ее первой производной (см. [2]), то такую точку поворота принято называть *дифференциальной*.

Для исследуемого уравнения (1) на всем отрезке I, включая точку поворота, построена равномерная асимптотика решения в виде ряда:

$$y(x,\varepsilon) = \sum_{r=-1}^{+\infty} \varepsilon^r \Big[V_{1r}(x)\mathbf{Ai}(x,\varepsilon) + V_{2r}(x)\mathbf{Bi}(x,\varepsilon) + Q_{1r}(x)\mathbf{Ai}'(x,\varepsilon) + Q_{2r}(x)\mathbf{Bi}'(x,\varepsilon) +$$

$$+ \alpha_r(x) \exp(\varepsilon^{-1} \int_0^x \lambda_i(\tau) d\tau) \Big]. \tag{5}$$

[1] Болілий В.О., Костигін С.С. Рівняння Орра-Зомерфельда з нестабільною псевдодиференціальною точкою звороту // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ, 2007. – 8. – С. 59-65.

[2] Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. – М.: Наука, 1990. – 528 с.