С.Д. Димитрова-Бурлаенко (НТУ «ХПИ», Харьков, Украина)

Аналоги теоремы Дини

В данной работе рассмотрены функции $f(t): G \to Y$, заданные на топологической группе G со значениями в банаховой решетке Y. Сформулированы две теоремы, которые являются аналогами теоремы Дини о монотонных функциях [1]. Теорема Дини доказана для непрерывных функций, заданных на конечном отрезке [*a;b*] и не верна, например, на интервале $(-\infty;+\infty)$. Сформулированная в работе теорема 1 распространяет теорему Дини на случай произвольных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве, со значениями в банаховой решетке. Теорема 2 является аналогом теоремы Дини для почти периодических функций, заданных на топологической группе G со значениями в банаховой решетке Y.

Теорема 1.

Пусть пространство Y является банаховой решеткой**.** Если монотонно возрастающая последовательность функций $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n(t): G \to Y$ сходится поточечно к функции $f(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in G$ и всякий раз, когда существуют все пределы $C_n = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\|f_n(x_m) - f(x_m)\|}{1 + \|f_n(x_m) - f(x_m)\|}$, $n = 1,2,3,..$, выполняется равенство $\lim\limits_{n} C_n = 0$, то последовательность функций $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно.

Теорема 2.

Если последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ почти периодических функций со значениями в банаховой решетке Y монотонна, например $0 \le f_n(t) \le f_{n+1}(t),\ t \in G$, и для любого t последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к почти периодической функции $f(t)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$, $t \in G$, а также есть сходимость всех трансляций к трансляции предельной функции $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{f}_{s,n}(t) = \hat{f}_s(t)$, то последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к $f(t)$.

[1] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления ─ М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1958.