С.М. Чуйко, И.А. Бойчук
(Славянский государственный педагогический университет, Украина)

Автономная нетерова краевая задача в критическом случае

Построена модифицированная итерационная процедура для нахождения решения $z(t,\varepsilon) \in C^1[a,b(\varepsilon)], C[0,\varepsilon_0]$ автономной нетеровой $(m \neq n)$ краевой задачи [1]

$$dz/dt = Az + f + \varepsilon Z(z,\varepsilon), \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad \alpha \in R^m, \tag{1}$$

при $\varepsilon = 0$ обращающегося в решение $z(t) \in C^1[a,b^*]$ порождающей задачи

$$dz_0/dt = A(t)z_0 + f, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad b^* = b(0), \quad f \in R^n. \tag{2}$$

Здесь $A-$ постоянная $(n \times n)-$ мерная матрица и $Z(z,\varepsilon)-$ $n-$мерная вектор-функция, непрерывно-дифференцируемая по неизвестной $z(t,\varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно-дифференцируемая по ε в окрестности нуля; $\ell z(\cdot,\varepsilon)-$ линейный и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$ нелинейный векторный функционалы. Функционал $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ непрерывно-дифференцируем по неизвестной z и по ε в малой окрестности решения порождающей задачи и на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Предположим, что в критическом $(P_{Q^*} \neq 0)$ случае выполнено условие $P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} = 0$; при этом задача (2) имеет $r-$ параметрическое семейство решений $z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G[f;\alpha](t),\ c_r \in R^r$. Здесь $Q = \ell X(\cdot)-$ $(m \times n)-$ матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1 \leq \min\,(m,\ n)$, $n - n_1 = r$, $P_{Q^*}-$ $(m \times m)-$ матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : R^m \to N(Q^*)$, $X(t)-$ нормальная $(X(a) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (2); $(d \times m)-$ мерная матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из $d = m - n_1-$ линейно-независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*}, $G[f;\alpha](t)-$ обобщенный оператор Грина [1] задачи (2).

Лемма. *Если краевая задача (1) имеет решение $z(t,\varepsilon) \in C^1[a,b(\varepsilon)], C[0,\varepsilon_0]$, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z(t,0) = z_0(t,c_r^*)$, то вектор c^* удовлетворяет уравнению $F(c^*) = P_{Q_d^*}\{\varphi_0(c^*) - \ell K[f_0(s,c^*)](\cdot)\} = 0,\ c^* = \operatorname{col}\,(c_r^*,\ \beta^*) \in R^{r+1}$. Здесь*

$$\varphi_0(c^*) = \alpha\beta^* + J(z_0(\cdot,c_r^*),0), \quad f_0(s,c^*) = \beta^*[Az_0(s,c_r^*) + f] + Z(z_0(s,c_r^*),0).$$

Теорема. *Для каждого простого $(P_{B_0^*} = 0)$ корня уравнения $F(c^*) = 0$ задача (1) имеет по меньшей мере одно решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z(t,0) = z_0(t,c_r^*)$. Здесь $B_0 = F_c{}'(c^*)-$ $(d \times (r+1))-$ матрица, $P_{B_0} :\ R^{r+1} \to N(B_0)-$ $((r+1) \times (r+1))-$ матрица-ортопроектор. Это решение можно определить при помощи итерационного процесса типа [2], сходящегося [3] на отрезке $[0,\varepsilon_*]$.*

[1] *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Автономные слаболинейные краевые задачи // Дифференциальные уравнения. — 1992. — Т. 28, № 10. — С. 1668 — 1674.

[2] *Чуйко С.М.* Модифицированный метод простых итераций для критической краевой задачи // Динамические системы. — 2008. Т. 25. С. 145 — 158.

[3] *Чуйко С.М.* Область сходимости итерационной процедуры автономной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2006. Т. 9, № 3. — С. 416 — 432.