$\boxed{\textit{В.І. Рукасов,}}$ *С.О. Чайченко* (Слов'янський держ. пед. ун-т, Слов'янськ, Україна)

Апроксимативні властивості операторів Фур'є на класах функцій, локально інтегровних на дійсній осі

Нехай $\widehat{L}_p,\ p \geq 1,$ — множина функцій φ, заданих на дійсній осі $\mathbb{R}$ (і не обов'язково періодичних), які мають скінченну норму: $\|\varphi\|_{\widehat{p}} = \sup\limits_{a\in\mathbb{R}}\left(\int\limits_a^{a+2\pi} |\varphi(t)|^p\ dt\right)^{1/p}$, $p \in [1;\infty)$; $\|\varphi\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)|,\ t \in \mathbb{R}$.

Множину функцій $f \in \widehat{L}_1$, які майже при всіх $x \in \mathbb{R}$ можна зобразити рівністю

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\int\limits_0^{\infty} \psi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv\ dt \overset{\mathrm{df}}{=} A_0 + (\varphi * \widehat{\psi}_\beta)(x), \qquad (1)$$

де A_0 — деяка стала, $\varphi \in \widehat{L}_1$, β — фіксоване дійсне число, а інтеграл розуміється як границя інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються, позначають через $\widehat{L}^\psi_\beta$ [1, с. 168]. Якщо $f \in \widehat{L}^\psi_\beta$ і при цьому $\varphi \in \mathfrak{N} \subset \widehat{L}_1$, то покладають $f \in \widehat{L}^\psi_\beta\mathfrak{N}$. Функцію $\varphi(\cdot)$ із (1) називають (ψ,β)-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $\varphi(\cdot) = f^\psi_\beta(\cdot)$.

Функції $f \in \widehat{L}^\psi_\beta\mathfrak{N}$ будемо наближати за допомогою операторів вигляду

$$F^*_\sigma(f;x) = A_0 + (f^\psi_\beta * \widehat{\lambda_\sigma\psi}_\beta)(x), \quad \lambda_\sigma(v) = \begin{cases} 1, & 0 \leq v \leq \sigma - 1, \\ 1 - (v-\sigma+1)\frac{\psi(\sigma)}{\psi(v)}, & \sigma - 1 \leq v \leq \sigma, \\ 0, & \sigma \leq v, \end{cases}$$

які означені у [1, с. 176] і називаються операторами Фур'є функції f.

Нехай

$$\widehat{S}_p = \{f \in \widehat{L}_p :\ \|f\|_{\widehat{p}} \leq 1\},\ \widehat{L}^\psi_\beta\widehat{S}_p = \widehat{L}^\psi_{\beta,p},\ \mathcal{E}(\widehat{L}^\psi_{\beta,p}; F^*_\sigma)_{\widehat{p}} \overset{\mathrm{df}}{=} \sup\{f \in \widehat{L}^\psi_{\beta,p} :\ \|f - F^*_\sigma\|_{\widehat{p}}\};$$

$$\mathcal{D}_\alpha = \{\psi \in \mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A} :\ \lim_{v\to\infty} \psi''(v)/\psi'(v) = -\alpha,\ \alpha > 0\},$$

де $\mathfrak{A}$ — множина, означена у [1, с. 193], а $\mathfrak{A}^*$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{A}$ у яких, починаючи з деякого v_0, існує скінченна похідна другого порядку $\psi''(v)$.

Теорема 1. *Нехай* $1 \leq p \leq \infty$, $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$ *і*

$$\varepsilon_\sigma = \max\{\varepsilon^{(1)}_\sigma, \varepsilon^{(2)}_\sigma\}, \quad \varepsilon^{(1)}_\sigma = \sup_{t\geq\sigma}\left|\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} + \alpha\right|,\ \varepsilon^{(2)}_\sigma = \sup_{t\geq\sigma}\left|\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} - \alpha^2\right|.$$

Тоді при $\sigma \to \infty$ *має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^\psi_{\beta,p}; F^*_\sigma)_{\widehat{p}} = \psi(\sigma)\left(e^{\alpha\sigma}\mathcal{E}(\widehat{L}^\alpha_{\beta,p}; F^*_\sigma)_{\widehat{p}} + O(1)\frac{(2\alpha^2+\alpha+2)}{\alpha(\alpha-\varepsilon_\sigma)}\varepsilon_\sigma\right),$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно параметрів* σ, p, α, ψ *і* β.

[1] Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 2. — 468 с.