А.В. Чайковський (Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна)

Про розв'язність абстрактної задачі Коші

Розглядається задача Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку відносно функцій зі значеннями в банаховому просторі

$$x'(t) + Ax(t) = f(t),\ t \in (0, T],\ x(0) = \overline{0}, \tag{1}$$

у випадку секторіального операторного коефіцієнта A. Знайдені умови її розв'язності, коли вихідна функція не обов'язково є гельдеровою.

Розв'язність цієї задачі Коші доведена у випадку гельдерової функції f [1-4]. Виникає питання, яким чином умову гельдеровості можна послабити.

Введемо такі класи функцій

$$F := \left\{ f \in C([0,T],B) \mid \forall t \in (0,T]\ :\ \int_0^t \frac{\|f(t-s) - f(t)\|}{s} ds < +\infty \right\}.$$

$$F_1 := \left\{ f \in C([0,T],B) \mid \forall [a,b] \subset (0,T]\ :\ \sup_{t \in [a,b]} \int_0^\delta \frac{\|f(t-s) - f(t)\|}{s} ds \to 0,\ \delta \to 0+ \right\}.$$

$$F_2 := \left\{ f \in C([0,T],B) \mid \sup_{t \in [\delta,T]} \int_0^\delta \frac{\|f(t-s) - f(t)\|}{s} ds \to 0,\ \delta \to 0+ \right\}.$$

$$W := \{ f \in C([0,T],B) \mid \forall t \in (0,T]\ \exists \delta = \delta(t) \in (0,t)\ :\ V(f,[t-\delta,t]) < +\infty \}.$$

$$W_1 := \{ f \in C([0,T],B) \mid \forall \delta \in (0,T)\ :\ V(f,[\delta,T]) < +\infty \}.$$

$$W_2 := C([0,T],B) \cap BV([0,T],B).$$

Теорема. *Якщо $f \in F \cup W$, то задача Коші (1) має єдиний розв'язок.*

Якщо $f \in F_1 \cup W_1$, то похідна цього розв'язку неперервна на $(0,T]$. Якщо $f \in F_2 \cup W_2$, то похідна розв'язку додатково існує і неперервна в нулі.

[1] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.

[2] *Pazy A.* Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York Springer-Verlag., 1983.

[3] *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М., 1985.

[4] *Jerome A. Goldstein* Semigroups of Linear Operators and Applications. Oxford University Press. 1985.