В.П. Бурский, Е.В. Кириченко (Ин-т прикл. матем. и мех. НАНУ, Донецк, Украина)

О нарушении единственности решения первой краевой задачи в шаре для ультрагиперболического уравнения

В работе изучается задача Дирихле $u\big|_{\partial\Omega} = 0$ в n-мерном шаре $\Omega = \left\{x \in \mathbf{R}^n : \quad 1 - x^2 > 0\right\}$ для ультрагиперболического уравнения

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_{k+1}^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) = 0$$

с комплексным параметром a.

Получена полная классификация случаев существования нетривиального решения данной задачи на основе аппарата сферических функций и с помощью метода двойственности. Исследование включает в себя как ситуацию зональных, так и ситуацию тессеральных сферических функций. При этом узловые линии первых образованы параллелями, делящими шаровую поверхность на зоны, в пределах каждой из которых значение сферической функции сохраняет знак, а при переходе через узловую линию меняет его на противоположный; а узловые линии тессеральных функций образованы пересечением параллелей и меридианов, которые делят шаровую поверхность на клетки (внутри каждой клетки значение сферической функции сохраняет знак, а при переходе через ее границу изменяет его на обратный).

Доказан критерий однозначной разрешимости задачи Дирихле для ультрагиперболического уравнения в шаре.

Теорема. *Задача Дирихле при* $n \geq 4$ *имеет нетривиальное решение* $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ *тогда и только тогда, когда найдутся такие натуральные* $m, i, j, i + j \leq m$, *что выполняется одно из следующих условий:*

1) $m - i - j$ *четное и* $P_{\frac{m-i-j}{2}+1}^{\left(\frac{n-k}{2}+j-1,\ i+\frac{k}{2}-1\right)}\left(\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right) = 0$;

2) $m + n - k - i + j$ *четное и* $P_{\frac{m+n-k-i+j}{2}}^{\left(1-j-\frac{n-k}{2},\ i+\frac{k}{2}-1\right)}\left(\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right) = 0$;

3) $m + n + i + j$ *четное и* $P_{\frac{m+n+i+j}{2}-1}^{\left(1-j-\frac{n-k}{2},\ 1-i-\frac{k}{2}\right)}\left(\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right) = 0$;

4) $m + k + i - j$ *четное и* $P_{\frac{m+k+i-j}{2}}^{\left(\frac{n-k}{2}+j-1,\ 1-i-\frac{k}{2}\right)}\left(\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right) = 0$.

Здесь $P_N^{(\alpha,\,\beta)}$ *– полиномы Якоби, нижний индекс соответствует порядку полинома, а верхние индексы, записанные через запятую, являются показателями степени в выражении весовой функции, отвечающей данной системе классических ортогональных полиномов.*

В заключение показано, что полученный результат переносится на случаи малой размерности пространства $\mathbf{R}^n$ и совпадает с существующими классическими результатами.