В.В. Булдигін, В.В. Павленков (НТУУ "КПІ", Київ, Україна)

Про узагальнення теореми Карамати на функції з невиродженою групою регулярних точок

У роботі узагальнюється теорема Карамати [1] про асимптотичну поведінку інтегралів від регулярно змінних функцій.

Розглянемо функції виду

$$f(x) = x^{\rho} l(x) \exp(h(\log x)), \quad x > 0. \tag{1}$$

де $\rho \in \mathbf{R}$, l — функція з повільною зміною, $(h(u), u \in \mathbf{R})$ — неперервна та відмінна від константи періодична функція така, що $T(h) > 0$, де $T(h)$ найменший серед її додатних періодів. В [2] показано, що функції f будуть функціями з невиродженою групою регулярних точок, при цьому

$$\limsup_{c \to 1} f^*(c) = 1, \tag{2}$$

де $f^*(c) = \limsup_{x\to\infty} f(cx)/f(x)$, $c > 0$. Мають місце наступні твердження.

Пряма теорема. *Якщо локально інтегровна функція f має вигляд* (1) та $\rho > -1$, то знайдеться неперервна додатна та відмінна від константи періодична функція θ, найменший додатний період якої збігається з $T(h)$, і така, що

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\rho+1)\int_0^x f(t)dt}{x\theta(\log x) f(x)} = 1.$$

Обернена теорема. *Нехай функція $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ є локально інтегровною та $\int_0^\infty f(t)dt = \infty$. Якщо знайдуться число $\rho > -1$ і неперервна додатна та відмінна від константи періодична функція θ, з найменшим додатним періодом $T(\theta)$, такі, що*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\rho+1)\int_0^x f(t)dt}{x\theta(\log x) f(x)} = 1,$$

то функцію f можна подати у вигляді (1). *Якщо при цьому виконується умова* (2), *то* $T(h) = T(\theta)$.

[1] J. Karamata, Sur un mode de croissance reguliere, Mathematica (Cluj), 4(1930), 38-53.

[2] V.V. Buldygin, O.I. Klesov and J.G. Steinebach, On factorization representation for Avakumovic'-Karamata functions with nondegenerate groups of regular points, Analysis Mathematica, 30(2004), 161-192.