Т.В. Будницька (Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна)

Дробово-лінійні перетворення та матриці

Дробово-лінійні перетворення - це перетворення з $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ вигляду $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, де a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ такі, що $ad - bc \neq 0$.

Перетворення f, $g : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ (де $\mathbb{F} = \mathbb{C}^2$, $\overline{\mathbb{C}}$) називають *топологічно спряженими* (позн. $f \overset{t}{\sim} g$), якщо існує гомеоморфізм $h : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ такий, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Очевидно, що топологічна класифікація лінійних перетворень з $\mathbb{C}^2$ в $\mathbb{C}^2$, еквівалентна до проблеми аналогічної класифікації невироджених (2×2) матриць.

Нехай A – комплексна квадратна матриця, а J_A – її жорданова нормальна форма.

Означення 1. *Будемо казати, що дві жорданові нормальні форми* $J_A = J_{k_1}(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus J_{k_t}(\lambda_t)$ *та* $J_C = J_{k_1}(\mu_1) \oplus \ldots \oplus J_{k_t}(\mu_t)$ *є* ****рівними*** *(позн.* $J_A \overset{*}{=} J_C$*), якщо* $\mu_i = \lambda_i$ *або* $\mu_i = \overline{\lambda_i}$*, для кожного* $i = 1, \ldots, t$.

Ми будемо розглядати розклад жорданової нормальної форми невиродженої матриці у пряму суму: $J_A = A_+ \oplus A_- \oplus A_0$, де

$$A_+ := \bigoplus_{0<|\lambda_i|<1} J_{k_i}(\lambda_i), \quad A_- := \bigoplus_{|\lambda_i|>1} J_{k_i}(\lambda_i), \quad A_0 := \bigoplus_{|\lambda_i|=1} J_{k_i}(\lambda_i).$$

Теорема 1. *Нехай* f, $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f(z) = Az$, $g(z) = Cz$ *- лінійні перетворення (бієктивні відображення). То* $f \overset{t}{\sim} g$ *(*$\Leftrightarrow A \overset{t}{\sim} C$*) тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rank}(A_+) = \operatorname{rank}(C_+),\\
&\operatorname{rank}(A_-) = \operatorname{rank}(C_-),\\
&A_0 \overset{*}{=} C_0 \ (\textit{з точністю до перестановки діагональних блоків}).
\end{aligned}$$

Відомо, що кожна матриця визначає дробово-лінійне перетворення. Та навпаки, кожне дробово-лінійне перетворення визначає дві матриці $\widetilde{A}$ та $-\widetilde{A}$ із $\mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$.

Теорема 2. *Нехай* f, $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *дробово-лінійні перетворення та* $\widetilde{A}$, $\widetilde{C} \in \mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$ *матриці, що відповідають цим перетворенням. То* $f \overset{t}{\sim} g$ *тоді і тільки тоді, коли* $\widetilde{A} \overset{t}{\sim} \widetilde{C}$ *або* $\widetilde{A} \overset{t}{\sim} -\widetilde{C}$.

[1] Бердон А. Геометрия дискретных групп/Пер. с англ.. — М.: Наука, 1986.

[2] Будницька Т.В. // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2009. — **Т. 6**, № 2.

[3] Budnytska T.V. // `arXiv:0812.4921`.