

М.М. Бубняк, О.Я. Ковальчук, А.О. Перченко

(Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль)

Оцінка швидкості збіжності одноперіодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду в параболічних областях

Періодичні неперервні дробу були об'єктом досліджень Д. Бернуллі, А.Прінгсгейма, О.Перрона, Т.Тіле, Е.Галуа, Л.Лорентсен та ін.

Розглянемо одноперіодичний гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду:

$$\left(1 + \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \quad (1)$$

де $a_{i_k} \in \mathbb{C}$; $1 \leq i_k \leq i_{k-1}$; $k = 1, 2, \dots$; $i_0 = N$ – фіксоване натуральне число.

Для дробу (1) доведено посилений аналог параболічної теореми:

Теорема. Нехай елементи дробу (1) задовольняють умови: $a_k \in P_k(\gamma)$, де

$$P_k(\gamma) = \left\{ \omega \in \mathbb{C} : |\omega| - \operatorname{Re}(\omega e^{-i\gamma}) \leq 2p_k \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right\} (k = \overline{1, N})$$

$i - \pi < \gamma < \pi$; $p_k = \frac{1}{2N} \left(1 - \frac{k}{2N}\right)$. Тоді

1) дріб (1) збіжний;

2) областю значень є круг $K(\gamma) = \left\{ \omega \in \mathbb{C} : \left| \omega - \frac{e^{-i\gamma/2}}{\cos \gamma/2} \right| \leq \frac{1}{\cos \gamma/2} \right\}$;

3) якщо елементи дробу (1) належать відповідно параболом

$$P_{k,\varepsilon} = \{ \omega \in \mathbb{C} : |\omega| - \operatorname{Re}(\omega) \leq 2p_{k,\varepsilon} \} (k = \overline{1, N}),$$

причому $0 < \varepsilon < 1$; $p_{k,\varepsilon} = \frac{1}{2N} \left(1 - \frac{k}{2N}(1 - \varepsilon)\right) (1 - \varepsilon)$, тоді швидкість збіжності виражається формулою

$$|F_{n+1} - F_n| \leq M(\rho_1^n + \rho_2^n + \dots + \rho_N^n),$$

$$\text{де } F_n = \left(1 + \prod_{k=1}^n \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i_k}}{1}\right)^{-1}; \quad n = 2, 3, \dots; \quad M = 2Nr_N; \quad r_j = \max_{1 \leq l \leq j} \{|a_l|\};$$

$$\rho_j = \begin{cases} \max \left\{ \frac{j(1-\varepsilon)}{2N-j(1-\varepsilon)}; \frac{r_j}{1+r_j} \right\} & \text{при } r_j < 1/2j, \\ \sqrt{\frac{N}{2N-j(1-\varepsilon)}} & \text{при } r_j = 1/2j, \\ \max \left\{ \frac{j(1-\varepsilon)}{2N-j(1-\varepsilon)}; \frac{r_j}{\sqrt{r_j^2 + 1 - \frac{j}{N}(1-\varepsilon)}} \right\} & \text{при } r_j > 1/2j. \end{cases}$$
