Е.В. Божонок (Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина)

Классы вейерштрассовских псевдоквадратичных отображений

1 Введение. Предварительные сведения

Активно ведущиеся в последние десятилетия исследования по экстремумам вариационных функционалов в пространствах Соболева показали, что в пространствах с гильбертовой интегральной метрикой основной вариационный функционал обладает значительно худшими аналитическими свойствами, чем в случае банаховых пространств типа C^k. Так, в частности, в ([1]) установлено, что вариационный функционал не является дважды дифференцируемым по Фреше в пространстве Соболева W_2^1. В работах ([2], [3], [4]) установлены некоторые варианты слабой непрерывности и слабой дифференцируемости в пространствах с интегральной метрикой. В работах ([5], [6]) было показано, что в пространстве Соболева W_2^1 вариационный функционал обладает более сильными свойствами K–непрерывности, K–дифференцируемости и повторной K–дифференцируемости при условии попадания интегранта в соответствующие вейерштрассовские классы псевдоквадратичных по y' функционалов $WK_2(z)$, $W^1K_2(z)$, $W^2K_2(z)$.

В работе установлены простые достаточные условия принадлежности интегранта подходящим вейерштрассовским классам и исследована их связь с классическими оценками роста интегранта. Рассмотрены конкретные примеры.

Приведем необходимые определения и результаты ([5]–[6]).

Определение 1.1. Говорят, что борелевское отображение $f : \Omega \times Y \times Z =: T \to F$, где Ω—компактное пространство с конечной борелевской мерой, Y, Z, F— вещественные банаховы пространства, *псевдоквадратичное по* z ($f \in K_2(z)$), если f можно представить в виде:

$$f(x, y, z) = P(x, y, z) + R(x, y, z) \cdot \|z\|^2, \tag{1}$$

где для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ борелевские отображения P, и R существенно по $x \in \Omega$ ограничены на $T_C = \Omega \times C_Y \times Z$.

Говорят, что отображение f *вейерштрассовское псевдоквадратичное по* z: $f \in WK_2(z)$, если представление (1) можно выбрать таким образом, что для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ отображения P и R равномерно непрерывны и ограничены на T_C.

Аналогично, вводя требование принадлежности классу $WK_2(z)$ градиентов $\nabla_{yz}P$, $\nabla_{yz}R$ и гессианов $H_{yz}(P)$, $H_{yz}(R)$ отображений P и R, мы приходим к определению *вейерштрассовских классов* $W^1K_2(z)$ и $W^2K_2(z)$ соответственно.

Определение 1.2. Пусть H—вещественное гильбертово пространство, $\Phi : H \to \mathbb{R}$. Говорят, что функционал Φ *компактно непрерывен, (компактно (дважды) дифференцируем)* (*K–непрерывен, K–дифференцируем, дважды K–дифференцируем*) в точке $y \in H$, если для любого компактного эллипсоида $C_\varepsilon \subset H$ сужение Φ на $(y + span\, C_\varepsilon)$ непрерывно ((дважды) дифференцируемо по Фреше) в y относительно гильбертовой нормы $\|\cdot\|_{C_\varepsilon}$ в $span\, C_\varepsilon$, порожденной C_ε.

Определение 1.3. Говорят, что, в обозначениях определения 1.2, функционал Φ имеет *компактный экстремум* (*K–экстремум*) в точке $0 \in H$, если для любого компактного эллипсоида $C_\varepsilon \subset H$ сужение Φ на $span\, C_\varepsilon$ имеет локальный экстремум в 0 относительно гильбертовой нормы $\|\cdot\|_{C_\varepsilon}$ в $span\, C_\varepsilon$.

В [6] были получены следующие результаты.

Теорема 1.1. *Пусть $\Omega = [a; b]$, H—вещественное гильбертово пространство, $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times H^2 \to \mathbb{R}$. Тогда при $f \in K_2(z)$ вариационный функционал Эйлера-Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int\limits_\Omega f(x, y, y')dx, \quad y(\cdot) \in W_2^1(\Omega, H), \tag{2}$$

определен всюду на $W_2^1(\Omega, H)$.

Теорема 1.2. *Если $f \in WK_2(z)$, то функционал Эйлера-Лагранжа* (2) *K–непрерывен всюду на $W_2^1(\Omega, H)$.*

Теорема 1.3. *Если $f \in W^1K_2(z)$ $(f \in W^2K_2(z))$, то функционал Эйлера-Лагранжа* (2) *(дважды) K–дифференцируем всюду на $W_2^1(\Omega, H)$.*

2 Достаточные условия принадлежности интегранта классам $WK_2(z)$, $W^1K_2(z)$, $W^2K_2(z)$

В данном пункте мы опишем условия на коэффициенты P и R в представлении (1), при которых f попадает в классы $WK_2(z)$, $W^1K_2(z)$, $W^2K_2(z)$.

Сначала выясним необходимые и достаточные условия попадания функции f в класс $WK_2(z)$. Для этого введем вспомогательное понятие.

Определение 2.1. Борелевское отображение $G : \Omega \times Y \times Z =: T \to F$, где Ω—компактное пространство с конечной борелевской мерой, Y, Z, F—вещественные гильбертовы пространства, назовем *вейерштрассовским по y* ($G \in W_K(y)$), если для любого абсолютно выпуклого компакта $C = C_Y \subset Y$ G равномерно непрерывно и ограничено на $T_C = \Omega \times C_Y \times Z$.

Из определения 1.1 немедленно следует

Предложение 2.1. *Пусть, в обозначениях определения 1.1 функция f представима в виде* (1)*. Тогда $f \in WK_2(z)$ в том и только в том случае, когда $P \in W_K(y)$, $R \in W_K(y)$.*

Для описания достаточных условий попадания функции f в класс $W^1K_2(z)$ ($W^2K_2(z)$), введем следующее

Определение 2.2. Пусть, в обозначениях определения 2.1, функция G непрерывно дифференцируема (дважды непрерывно дифференцируема) в $\Omega \times Y \times Z$ по (y, z). Будем говорить, что $G \in W_K^1(y)$ $(G \in W_K^2(y))$, если $(G, \nabla_{yz}G) \in W_K(y)$ $((G, \nabla_{yz}G, H_{yz}G) \in W_K(y))$, или, что равносильно, $\partial_i^k G \in W_K(y)$, $k = 0, 1$; $i = y, z$ $(\partial_{ij}^k G \in W_K(y),\ k = 0, 1, 2;\ i, j = y, z)$.

Справедливо следующее

Предложение 2.2. *Пусть, в обозначениях определения 1.1, функция f представлена в виде* (1). *Если $P, R \in W_K^1(y)$ $(P, R \in W_K^2(y))$, то $f \in W^1K_2(z)$ $(f \in W^2K_2(z))$.*

Пример 2.1. Рассмотрим, как частный случай, интегрант вида $f(x, y, z) = \varphi(z) \cdot \|z\|^2 + \psi(x, y)$. Если $\varphi, \psi \in W_K^2(y)$, то, в силу предложения 2.2, $f \in W^2K_2(z)$. Эти достаточные условия легко записать на языке джетов второго порядка функций φ и ψ :

a) джет $J^2\varphi(z) = (\varphi(z), \varphi'(z), \varphi''(z))$ равномерно непрерывен и ограничен на Z,

b) джет $J_y^2\psi(x, y) = (\psi(x, y), \psi_y'(x, y), \psi_{y^2}''(x, y))$ равномерно непрерывен и ограничен на $\Omega \times C_Y$ для любого абсолютно выпуклого компакта $C_Y \subset Y$.

Пример 2.2. Рассмотрим интегрант вида $f(x, y, z) = \varphi(x, y) \cdot \|z\|^2 + \psi(x, y, z)$. Тогда $f \in W^2K_2(z)$, если джеты второго порядка функций φ и ψ :

$$J^2\varphi(x, y) = (\varphi(x, y), \varphi_y'(x, y), \varphi_{y^2}''(x, y))$$

и

$$J_{yz}^2\psi(x, y, z) = \left(\psi, (\psi_y', \psi_z'), \begin{pmatrix} \psi_{y^2}'' & \psi_{yz}'' \\ \psi_{zy}'' & \psi_{z^2}'' \end{pmatrix}\right)$$

равномерно непрерывны и ограничены на $\Omega \times C_Y$ для любого абсолютно выпуклого компакта $C_Y \subset Y$.

Отметим, что в приведенных примерах отсутствует, вообще говоря, чистая квадратичность интегранта по z. Тем самым, по теореме Скрыпника (см. [1]), отсутствует повторная сильная дифференцируемость $\Phi(y)$. В тоже время, в силу теоремы 1.3, $\Phi(y)$ является дважды K-дифференцируемым.

3 Сравнение полученных условий с классическими оценками роста интегранта

Во многих работах по абсолютным экстремумам вариационных функционалов в пространствах Соболева $W_2^1([a; b], \mathbb{R})$ на интегрант $f(x, y, z)$ налагается так называемое *условие роста по z* ([7], [8])

$$f(x, y, z) \geq \alpha|z|^2 + \beta, \quad \text{где } \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Напомним, что классическая *теорема Тонелли* ([7]) утверждает, что, в предположениях гладкости по x и y, гладкости и выпуклости по z интегранта, выполнении условия квадратичного роста и корректной определенности основной вариационный функционал достигает абсолютного минимума в $W_2^1([a;b],\mathbb{R})$.

Условие корректной определенности $\Phi(y)$ в W_2^1 обеспечивается, как правило, *ограничением на рост сверху (условием роста не выше* 2*-ой степени)* ([7], [9], [10]):

$$f(x,y,z) \leq \gamma|z|^2 + \delta, \quad \text{где } \gamma > 0,\ \delta \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, условие квадратичного роста вместе с условием роста не выше 2-ой степени приводит, в случае W_2^1, к условию двойной оценки:

$$\alpha z^2 + \beta \leq f(x,y,z) \leq \gamma z^2 + \delta \tag{3}$$

(как правило, вместе с условием выпуклости по z).

Сравнение найденных в теоремах 1.1, 1.2, 1.3 условий на интегрант f с условием (3) (в случае $W_2^1([a;b],\mathbb{R})$) рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 3.1. Функция

$$f_1(x,y,z) = e^y \cdot z^2 + \sin(x+y+z)$$

локально по y удовлетворяет оценке (3).

Пример 3.2. Функция

$$f_2(x,y,z) = e^y \sin^2(x+y+z) \cdot z^2$$

локально по y удовлетворяет только верхней оценке (3).

Отметим, что обе рассматриваемые функции принадлежат классу $WK_2(z)$ (и даже $W^2K_2(z)$), при этом ни одна из них не удовлетворяет оценкам (3) глобально по y. Заметим также, что как $f_1(x,y,z)$, так и $f_2(x,y,z)$ не являются выпуклыми по z. Таким образом, полученные условия на f являются более общими, чем соответствующие классические двухсторонние оценки роста интегранта в W_2^1.

Замечание 3.1. Так как в рассмотренных выше примерах $f \in W^2K_2(z)$, то в этом случае вариационный функционал $\Phi(y)$ будет дважды K–дифференцируемым. Кроме того, можно отметить, что Φ может достигать компактного минимума (см. опр. 1.3), который при этом не является локальным (а тем более, абсолютным), без двойной квадратичной оценки (3) и без условия выпуклости по z.

Пример 3.3. Один общий класс нелокальных K–экстремумов

Рассмотрим функционал

$$\Phi(y) = \int_0^T \left(\varphi(y')\cdot(y')^2 \pm y^2\right) dx,\ y(\cdot) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1([0;T]). \tag{4}$$

Если $\varphi \in W_K^2(y)$, $\varphi(0) > 0$, $\exists\lambda\ \varphi(\lambda) < 0$, то у функционала (4) в каждом из рассматриваемых случаев "$\pm$" в точке $y_0(x) \equiv 0$ отсутствует локальный минимум в $W_2^1([0;T],\mathbb{R})$ для любого $T > 0$.

Однако "соболевская квази–норма" (случай "+") имеет сильный K–минимум в точке $y_0(\cdot) \equiv 0$ $\forall T > 0$, а "гармонический квази–осциллятор" (случай "-") имеет сильный K–минимум в 0 при $0 < T < \pi\sqrt{\varphi(0)}$.

[1] Скрыпник И.В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. — К.: Наукова думка, 1973. — 219 с.

[2] Згуровский М.З., Мельник В.С. Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. — К.: Наукова думка, 1999. — 630 с.

[3] Hencl S., Kolář J., Pangrác O. Integral functionals that are continuous with respect to the weak topology on $W_0^{1,p}(0;1)$ // Preprint submitted to Elsevier Science 3 May 2005. — 8 p.

[4] Marcellini P., Sbordone C. Semicontinuity Problems in the Calculus of Variations // Nonlinear Anal. — 1980. — Vol. 4. — P. 241–257.

[5] Орлов И.В. K–дифференцируемость и K–экстремумы // Украинский математический вестник. — 2006. — Т. 3, № 1. — С. 97–115.

[6] Орлов И.В., Божонок Е.В. Условия существования, K–непререрывности и K–дифференцируемости функционала Эйлера-Лагранжа в пространстве Соболева W_2^1 // Ученые записки ТНУ, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". — 2006. — № 2. — С. 63–78.

[7] Тихомиров В.М., Фурсиков А.В. Существование решений экстремальных задач. — http://lib.mexmat/ru/books/9645. — 39 с.

[8] Dacorogna B. Direct methods in the calculus of variations. — New York: Springer–Verlag, 1989. — 228 p.

[9] Ambrosio L., Fonseca I., Marcellini P., Tartar L. On a volume–constrained variational problem // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1999. — Vol. 149(1). — P. 21—47.

[10] Mosconi S., Tilli P. Variational problems with several volume constraints on the level sets // Calc. Var. Partial Differential Equations. — 2002. — Vol. 14. — P. 233–247