*А.А. Борисенко, И.А. Кулик* (Сумский государственный университет, Сумы, Украина)

## Матричные биномиальные системы счисления

В работах [1, 2] рассматривались двоичные биномиальные системы счисления, отличающиеся избыточностью структуры по сравнению со структурами обычных естественных систем счисления, например двоичной. Они обладают определенными полезными свойствами. К ним относится их естественная помехоустойчивость, что позволяет с большей надежностью реализовывать специальные математические операции при построении специализированных процессоров. Однако главное их свойство – это возможность с более высоким быстродействием, чем при применении обычных алгоритмов, генерировать различные комбинаторные конфигурации, основанные на сочетаниях, сочетаниях с повторениями, композициях и др. и при необходимости решать обратную задачу – производить их нумерацию. Указанные свойства биномиальных систем счисления позволяют решать задачи сжатия информации, построения различных помехоустойчивых комбинаторных кодов, осуществлять защиту данных.

Дальнейшие исследования двоичных биномиальных систем счисления показали, что на их основе можно получить более сложные, обладающие большими возможностями, матричные системы счисления. Они представляют особую разновидность биномиальных систем счисления, в которых числа представляются не в обычной форме, в виде последовательностей цифр, а в виде двоичных прямоугольных матриц, которые, по мнению авторов, сами по себе представляют интересные математические объекты, требующие своего исследования.

Матричные биномиальные системы счисления представляют собой двоичные матрицы, содержащие $k$ столбцов и $(n-k)$ строк, где $n$ и $k$ – параметры биномиальных коэффициентов $C_n^k$, которые определяют диапазон данных систем счисления (табл. 1).

Таблица 1 – Матричная биномиальная система счисления

| $i$ \ $j$ | $k$ | $k-1$ | … | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $x_{0k}C_k^k$ | $x_{0(k-1)}C_{k-1}^{k-1}$ | … | $x_{01}C_1^1$ |
| 1 | $x_{1k}C_{k+1}^k$ | $x_{1(k-1)}C_k^{k-1}$ | … | $x_{11}C_2^1$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | … | ⋮ |
| $n-k$ | $x_{nk}C_n^k$ | $x_{n(k-1)}C_{n-1}^{k-1}$ | … | $x_{n1}C_{n-k+1}^1$ |

В этой матрице $x_{ij} \notin \{0,1\}$ представляют цифры матричной биномиальной системы счисления, биномиальные коэффициенты $C_{i+j}^j$ которой образуют весовые значения этих цифр.

Числовая функция в этом случае для матричной биномиальной системы счисления будет иметь следующий вид:

$$F = \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=1}^{k} x_{ij} C_{i+j}^j .$$

С ее помощью биномиальная матрица преобразуется в соответствующий номер и обратно номер преобразуется в биномиальную матрицу.

Так как $x_{ij}$ может принимать лишь два значения 0 и 1, то при записи конкретных чисел в матричной биномиальной форме их можно представить, записывая лишь те элементы матрицы, где $x_{ij} = 1$, как например, показано в табл. 2, получив при этом матрицу весовых коэффициентов – весовую матрицу.

Таблица 2 – Пример матричного числа, представленного в виде весовой матрицы

| $i \backslash j$ | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 | | | $C_1^1$ |
| 1 | $C_4^3$ | $C_3^2$ | |
| 2 | | | |

После сложения биномиальных коэффициентов, задаваемых весовой матрицей (табл. 2), получим ею представляемое число:

$$C_4^3 + C_3^2 + C_1^1 = 4 + 3 + 1 = 8 .$$

Кодовое изображение этого числа в виде двоичной биномиальной матрицы будет иметь вид, приведенный в таблице 3.

Таблица 3 – Кодирование числа с помощью двоичной числовой биномиальной матрицы

| $i \backslash j$ | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 |

Представим табл. 1 для биномиальной $(n,k)$-матрицы в виде табл. 4 для двоичной матрицы и определим ее свойства.

Таблица 4 – Биномиальная $(n,k)$-матрица

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{(n-k)1} & \alpha_{(n-k)2} & & \alpha_{(n-k)j} & & \alpha_{(n-k)k} \end{bmatrix}$$

Часть свойств двоичной $(n,k)$-матрицы приведено ниже:

1. Число элементов биномиальной матрицы: $N = (n-k)k$ .

2 В столбце матрицы может находиться не более одной 1, т.е. $\alpha_{ij}\alpha_{zj} = 0$, где $z = 1,2,\dots,n-k; i \neq z$ .

3 Число единиц $q_M$ в матрице $0 \le q_M \le k$ , а число нулей $l_M = N - q_M \le N$ .

4 Единицы в матрице, в количестве от 1 до $k$, расположены в одной или нескольких строках так, что первая из них находится в крайнем левом, а последняя – в любом последующем столбце. При этом между столбцами с единицами отсутствуют столбцы, в которых находятся только нули. Это значит, что если даны элементы, начальная единица в виде элемента $\alpha_{i1}$, промежуточная в форме $\alpha_{i'2}$ и конечная $\alpha_{\gamma j}$, то $\alpha_{i1}\alpha_{i'2}\dots\alpha_{\gamma j} = 1$, $i,\gamma,i' = 1,2,\dots,n-k$ , $i \neq i' \neq \gamma$ .

5 Логическое суммирование элементов диагоналей биномиальной матрицы, идущих сверху вправо, образует цифры линейного биномиального числа:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{(n-k)1} = x_{r-1},\\
&\alpha_{(n-k-1)1} + \alpha_{(n-k)2} = x_{r-2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_{1(k-1)} + \alpha_{2k} = x_1,\\
&\alpha_{1k} = x_0.
\end{aligned}$$

6 Если в $(n-k)$-й строке расположена последовательность единиц, то она всегда расположена в ее начальной части, начиная с элемента $\alpha_{(n-k)1}$ и до $\alpha_{(n-k)j'}$, то есть произведение $\alpha_{(n-k)1}\alpha_{(n-k)2}\dots\alpha_{(n-k)j'} = 1$, $j' = 1,2,\dots,k$.

7 Во всех строках матрицы, за исключением $(n-k)$- й, в любой ее части может быть образована последовательность единиц длиной от 1 до $k$, в которой не могут присутствовать промежуточные нули. Это значит, что если даны элементы, начальная единица в строке $i$ $\beta_{ij'}$ и конечная $\beta_{ij''}$; $j', j'' = 1,2,\dots,k$, $j' \ge j''$, то логическое произведение $\beta_{ij'}\beta_{i(j'+1)}\dots\beta_{ij''} = 1$.

8 Среди элементов любой диагонали матрицы, направленной сверху и направо, только один элемент может быть равен 1.

9 Количества единиц $q_M$ в биномиальной матрице и $q$ в линейном биномиальном числе равны между собой: $q_M = q$.

10 В первом столбце биномиальной матрицы, за исключением матрицы нулевого числа, обязательно содержится 1.

11 Единицы в матрице располагаются так, что единица каждого последующего столбца находится или в той же строке, что и в предшествующем столбце, или в одной из верхних строк с меньшим номером.

12 Если в первом столбце 1 отсутствует, то и в остальных столбцах не будет единиц.

Для примера приведем начальные биномиальные матрицы, число которых определяется диапазоном биномиальных чисел $P = C_6^3 = \dfrac{6!}{3!3!} = 20$:

$$\begin{array}{cccc}
0 & 1 & 2 & 3\\
\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\\
0\,0\,0\,0\,0 & 0\,0\,1\,0\,0 & 0\,0\,1\,1\,0 & 0\,0\,1\,1\,1\\
4 & 5 & 6 & 7\\
\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}.\\
0\,1\,0\,0\,0 & 0\,1\,0\,1\,0 & 0\,1\,0\,1\,1 & 0\,1\,1\,0\,0
\end{array}$$

Вверху над матрицей стоит ее номер, а внизу биномиальное число в линейной форме. Линейные биномиальные числа получаются из матриц логическим сложением по диагоналям слева направо. Тем самым осуществляется свертка биномиальных матриц. Не намного сложнее и обратная процедура – развертки линейного биномиального числа в матрицу [2, 3].

[1] Борисенко А.А., Кулик И.А. Представление чисел на основе биномиальных систем счисления // Тези доповідей "Алгебра і теорія чисел" Україн. матем. конгресу, 2001. – с. 13-14.

[2] Борисенко А.А. Введение в теорию биномиального счета: Монография. – Сумы: ИТД "Университетская книга", 2004. – 88 с.

[3] Борисенко А.А. Биномиальный счет: теория и практика: Монография. – Сумы: ИТД "Университетская книга", 2004. – 170 с.