Т.В. Бородич (Гомельский госуниверситет им. Ф. Скорины, Беларусь)

Влияние несубнормальных подгрупп на строение конечной группы

Одним из важнейших направлений теории конечных групп является изучение строения групп с заданными свойствами некоторых подгрупп.

Будем рассматривать только конечные группы. Используемые обозначения и термины соответствуют [1]. Хорошо известно, что порядок класса сопряженных подгрупп совпадает с индексом нормализатора некоторой подгруппы из этого класса, см. [1], теорема 1.49. В работе [2] П. И. Трофимов начал исследовать свойства конечной группы в зависимости от наибольшего общего делителя $d(G)$ порядков всех классов ненормальных сопряженных подгрупп (т. е. в зависимости от наибольшего общего делителя индексов нормализаторов ненормальных подгрупп конечной группы). Он установил признаки непростоты, разрешимости и сверхразрешимости в зависимости от значения наибольшего общего делителя в работах [2, 3, 4].

Его исследования нашли отклик в работах К. Геринга [5] и В. А. Ведерникова [6]. К. Геринг установил следующий критерий: *$d(G) = p$ — простое число тогда и только тогда, когда справедливы следующие утверждения: a) существует нормальная подгруппа N такая, что G/N циклическая, $|G/N|$ делит $p - 1$ и $N = P \times D$, где P — силовская p-подгруппа в группе G и D — дедекиндова подгруппа; b) каждая нормальная подгруппа из P нормальна в группе G; c) G/P — дедекиндова группа; d) G/D — не дедекиндова группа.* Значение $d(G)$ К. Геринг предложил называть числом Трофимова.

В. А. Ведерников исследовал свойства конечной группы в зависимости от наибольшего общего делителя $d_2(G)$ порядков всех классов ненормальных максимальных сопряженных подгрупп и порядков всех классов ненормальных примарных сопряженных подгрупп группы G. В частности, он доказал, что *если $d_2(G) > 1$, то $d_2(G)$ — простое число и группа G сверхразрешима.*

В настоящей заметке развивается это направление за счет рассмотрения классов несубнормальных подгрупп.

Введем некоторые обозначения. Обозначим через $d^*(G)$ наибольший общий делитель порядков порядков всех классов несубнормальных сопряженных подгрупп группы G.

Наибольший общий делитель порядков всех классов несубнормальных максимальных сопряженных подгрупп и порядков всех классов ненормальных примарных сопряженных подгрупп группы G обозначим через $d_2^*(G)$.

Напомним, что метанильпотентной называют группу, содержащую нильпотентную нормальную подгруппу, фактор-группа по которой нильпотентна.

Развивая результаты [4, 5, 6] была получена следующая

Теорема 1. *Пусть G — произвольная конечная группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) значение $d^*(G)$ равно либо 0, либо 1, либо степени некоторого простого числа;

2) если $d^*(G) \neq 1$, то группа G — метанильпотентна.

Доказана следующая теорема, которая является развитием соответствующей теоремы работы [6].

Теорема 2. *Пусть G — произвольная конечная группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) значение $d_2^*(G)$ равно либо 0, либо 1, либо степени некоторого простого числа;

2) если $d_2^*(G) \neq 1$, то группа G — метанильпотентна.

Пусть S_n и A_n — симметрическая и знакопеременная группы соответственно. Несложно проверить, что $d_2^*(S_n) = d_2^*(A_n) = 1$ при $n > 4$, $d_2^*(S_4) = 1$, $d_2^*(S_3) = 3$, $d_2^*(A_4) = 2^2$.

Пример знакопеременной группы A_4 показывает, что у несверхразрешимой группы значение $d_2^*(G)$ может быть степенью некоторого простого числа.

[1] Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Выш. школа — 2006. — 320 С.

[2] Трофимов П. И. Сибирский матем. журнал. — 1962. — Т. 3, № 6 — С. 876-881.

[3] Трофимов П. И. Сибирский матем. журнал. — 1963. — Т. 4, № 1. — С. 236-239.

[4] Трофимов П. И. Известия высших учебных заведений. Математика. — 1965. — Т. 49, № 6. — С. 144-146.

[5] Hering Ch. Arch. Math. — 1964. — V. 15, № 6. — С. 404-407.

[6] Ведерников В. А. Сибирский матем. журнал. — 1967. — Т. 8, № 6. — С. 1236-1244.