М.М. Бокало (Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна)

Динамічна задача для еволюційних рівнянь в необмежених областях

Нехай Ω — необмежена область в $\mathbf{R}^n$ $(n \in \mathbf{N})$ з межею $\partial\Omega$ класу C^1; Γ_0 — замикання відкритої множини на $\partial\Omega$ або порожня множина, $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0; \nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ — одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі; $S = (0, T]$, $T > 0$; $p > 2$ — деяке число, $p' = p/p - 1$. Покладаємо $Q = \Omega \times S$, $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times S$, $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times S$. Припускаємо, що $0 \in \Omega$ і для будь-якого $R > 0$ під Ω_R розуміємо зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x : |x| < R\}$, яка містить 0. Нехай $\Gamma_{1,R} = \Gamma_1 \cap \partial\Omega_R$, $\quad \Sigma_{1,R} = \Gamma_{1,R} \times S$.

Розглядаємо динамічну крайову задачу: знайти функцію $u : \overline{\Omega} \times S \to \mathbf{R}$ таку, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_1(x)u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, \nabla u) + a_0(x, t, u, \nabla u) = f_1(x, t), \quad (x, t) \in Q\,, \tag{1}$$

$$u = 0, \quad (s, t) \in \Sigma_0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_2(s)\, u) + \sum_{i=1}^{n} a_i(s, t, u, \nabla u)\, \nu_i(s) + b(s, t, u) = f_2(s, t), \quad (s, t) \in \Sigma_1, \tag{3}$$

$$m_1(x)(u(x, 0) - u_1(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \qquad m_2(\cdot)(\gamma u(s, 0) - u_2(s)) = 0, \quad s \in \Gamma_1, \tag{4}$$

де $a_i\, (i = \overline{0, n}), b, f_1, f_2, u_1, u_2, m_1 \geq 0, m_2 \geq 0$ — деякі задані дійснозначні функції, причому функції m_1, m_2 можуть занулятися на множинах додатньої міри .

Накладаючи певні умови на вихідні дані, даємо означення узагальненого розв'язку задачі (1)-(4) і досліджуємо її коректність. При цьому, зокрема, вимагається, щоби функція m_1 належала простору $L_{q^*, loc}(\overline{\Omega})$, а функція m_2 — $L_{q, loc}(\overline{\Gamma}_1)$, де $q > 1, q^* > 1$ — деякі числа, значення яких залежать від p. Також припускаємо, що $\sqrt{m_1}u_1 \in L_{2, loc}(\overline{Q})$, $\sqrt{m_2}u_2 \in L_{2, loc}(\overline{\Sigma}_1)$, $f_1 \in L_{p', loc}(\overline{Q})$, $f_2 \in L_{p', loc}(\overline{\Sigma}_1)$.

Знайдено умови на функції $a_0, a_1, ..., a_n$, b, при яких задача (1)-(4) має єдиний узагальнений розв'язок і він для будь-яких R_0, R $(0 < R_0 < R,\ R \geq 1)$ задовольняє оцінку

$$\sup_{t\in[0,T]} \Big[\int\limits_{\Gamma_{1,R_0}} m_2(s) |\gamma u(s, t)|^2 \, d\Gamma + \int\limits_{\Omega_{R_0}} m_1(x)\, |u(x, t)|^2 \, dx \Big] + \int\int\limits_{Q_{R_0}} \Big[|u|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^p \Big] \, dxdt \leq$$

$$\leq C \Big(\frac{R}{R - R_0} \Big)^s \Big[R^\mu + \int\limits_{\Omega_R} m_1(x)\, |u_1(x)|^2 \, dx + \int\limits_{\Gamma_{1,R}} m_2(s) |u_2(s)|^2 \, d\Gamma +$$

$$+ \int\int\limits_{Q_R} |f_1(x, t)|^{p'} dxdt + \int\int\limits_{\Sigma_{1,R}} |f_2(s, t)|^{p'} \, d\Gamma dt \Big],$$

де C, s, μ — деякі сталі, що не залежать від u, u_0, u_1, f_1, f_2.

Зауважимо, що нами не накладається ніяких обмежень на поведінку розв'язку та зростання правих частин рівнянь задачі на нескінченності.