В.И. Бодрая (Славянский государственный педагогический университет, г. Славянск, Украина)

Приближение классов функций многих переменных прямоугольными обобщенными методами

Пусть R^m – евклидово пространство с элементами $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, N_*^m – множество точек из R^m с целыми неотрицательными координатами, E^m – множество точек с координатами 0 или 1, T^m – m-мерный куб периодов, $L(T^m)$ – множество суммируемых на T^m 2π-периодических функций $f(\vec{x})$.

Пусть $f \in L(T^m)$. Каждой паре $\vec{s} \in E^m$, $\vec{k} \in N_*^m$ сопоставим коэффициент Фурье $a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \pi^{-2} \int_{T^m} f(\vec{x}) \prod_{i=1}^m \cos(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}) dx_i$ и гармонику $A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{s}\in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i=1}^m \cos(k_i x_i - \frac{s_i\pi}{2})$. Тогда, если $q(\vec{k})$ – количество нулевых координат вектора $\vec{k}$, то следуя [1], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ можно записать в виде $S[f] = \sum_{\vec{k}\in N_*^m} 2^{-q(\vec{k})} A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$. По аналогии с понятием $\overline{\psi}$-интеграла функции одной переменной, вводится понятие $\overline{\psi}_i$-производной функции $f(\vec{x})$ по переменной x_i, $i \in \overline{m} = \{1, 2, ..., m\}$, и смешанной $\overline{\Psi}_\mu$-производной по переменным x_i, $i \in \mu \subset \overline{m}$. Множество непрерывных функций, имеющих почти везде ограниченные единицей $\overline{\psi}_i$- и $\overline{\Psi}_\mu$-производные, обозначим $C_\infty^{m\overline{\psi}}$.

Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_m\}$ – набор бесконечных треугольных числовых матриц, $\Lambda_i = \{\lambda_{k_i}^{(n_i)}\}$. Пусть, далее, $G_{\vec{n}} = \prod\limits_{i=1}^{m} [0; n_i - 1]$. Функции $f \in L(T^m)$ поставим в соответствие многочлен $U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = \sum_{\vec{k}\in G_{\vec{n}}} 2^{-q(\vec{k})} \prod_{i=1}^m \lambda_{k_i}^{(n_i)} A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$. Если элементы матрицы Λ_i задаются соотношением $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = \lambda_{n_i}(k_i/n_i) = 1 - \frac{\varphi_i(k_i)}{\varphi_i(n_i)} h_i(\frac{k_i}{n_i})$, где $\varphi_i(x)$ – непрерывные монотонно возрастающие, а $h_i(x)$ – ограниченные функции, то многочлены $U_{\vec{n}}(f;\Lambda)$ мы называем обобщенными прямоугольными операторами и обозначаем $U_{\vec{n}}^{\varphi,h}(f)$. Пусть $\tau_{ij}(v) = (1 - \lambda_{n_i}(v))\psi_{ij}(v)$, $A(\tau_i) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} | \int\limits_0^{\infty} (\tau_{i1}(v)\cos vt + \tau_{i2}(v)\sin vt) dv| dt$. Нами показано, что, если функции $\varphi_i(x)\psi_{ij}(x)$, $\varphi_i(x)\Psi_{ij}(x)$ возрастают и выпуклы вниз, то при $n_i \to \infty$, $i \in \overline{m}$, имеет место асимптотическая формула:

$$\mathcal{E}(C_\infty^{m\overline{\psi}}; U_{\vec{n}}^{\varphi,h}) = \sup_{f\in C_\infty^{m\overline{\psi}}} ||f(\vec{x}) - V_{\vec{n},\vec{p}}^{\varphi,h}(f;\vec{x})||_C =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left(A(\tau_i) + O(1)\frac{\overline{\psi}_i(n_i)}{n_i} \right) + O(1) \sum_{\mu(2)\subset\overline{m}} \prod_{i\in\mu(2)} \overline{\Psi}_i(n_i),\ A(\tau_i) = O(1)\overline{\psi}_i(n_i).$$

[1] Степанец А. И., Пачулиа Н. Л. Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. — **192** (1991), 545–555.