В.Ф. Бабенко (Днепропетровский национальный университет, Институт прикладной математики и механики НАН Украины)
Р.О. Биличенко (Днепропетровский национальный университет)

Обобщение неравенства Тайкова на произвольные степени самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве

Через $L^r_{2,2}(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, обозначим пространство функций $x \in L_2(\mathbb{R})$ таких, что производная $x^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)} \in L_2(\mathbb{R})$. В 1967 году Л.В. Тайков [1] установил, что для функций $x \in L^r_{2,2}(\mathbb{R})$ и любых целых чисел k и r, $0 \le k \le r-1$ имеет место неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \le \left\{ \left(2\sin\pi\frac{2k+1}{2r}\right)^{-1} \left(\frac{1}{r-k-1/2}\right)^{(r-k-1/2)/r} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{k+1/2}\right)^{(k+1/2)/r)} \right\}^{1/2} \|x\|_2^{(r-k-1/2)/r} \left\|x^{(r)}\right\|_2^{(k+1/2)/r}. \quad (1)$$

Нами получено обобщение неравенства (1) на степени самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

Теорема. *Пусть $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, A – неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, E_t — разложение единицы, принадлежащее оператору A, f — функционал, определенный в H. Тогда, для любого $x \in D(A^r)$ и $\tau > 0$ справедливо неравенство*

$$\langle f, A^k x\rangle \le \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1+\tau t^{2r}}\, d(E_t f, f) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\|x\|^2 + \tau\|A^r x\|^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где знак равенства достигается на элементах

$$x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t^k}{1+\tau t^{2r}}\, dE_t f.$$

В качестве следствия могут быть получены неравенства Харди-Литллвуда-Полиа, Тайкова, Шадрина и ряд других неравенств.

[1] Тайков Л. В. Неравенства типа Колмогорова и формулы численного дифференцирования // Мат. заметки. – 1967. – **4**, №2. – С. 223 – 238.