В.И. Берник, О.С. Куксо (Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь)
Н.В. Шамукова (Бобруйский филиал БГЭУ, Бобруйск, Беларусь)

О связи теории диофантовых приближений с распределением алгебраических чисел, их дискриминантов и результантов

Основанием теории диофантовых приближений является задача о приближении действительных чисел рациональными числами. Фундаментальным фактом этой теории являются теоремы Минковского о линейных формах и о последовательных минимумах. Применяя их к многочленам $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P \leqslant n$, можно получить для $\forall x \in \mathbb{R}$ существование бесконечного числа таких многочленов, модули которых не превосходят $H(P)^{-n}$, где $H(P)$ — высота $P(x)$, равная максимуму модулей коэффициентов $P(x)$. Из этого факта нетрудно получить достаточно точные оценки $|x - \alpha|$, где α — ближайший к x корень $P(x)$. По определению, α — алгебраическое число. Однако, из теорем Минковского мы мало знаем о многочлене $P(x)$. Идея нового подхода состоит в изучении $|P(x)|$ не для всех x из некоторого интервала $I = [a, b]$, а для x из множества $B \subset I$, $\mu B > 0,5(b - a)$, где μA — мера Лебега измеримого множества A. В этом случае удается доказать, что многочлены $P_j(x)$, реализующие теоремы Минковского имеют одинаковые степени, близкие высоты, практически равные производные любого порядка. Этот факт интуитивно понятен, хотя его доказательство весьма непростое [1, 2, 3, 4].

В докладе будут приведены многочисленные следствия из приведенного метрического результата, связанные с расстоянием между корнями $P(x)$, количеством $P(x)$, $H(P) \leqslant Q$, у которых дискриминанты и результанты не превосходят заданной границы. Полученные результаты могут быть обобщены на поля комплексных, p–адических чисел, на системы диофантовых неравенств, а также на специально устроенные многочлены (монические, со старшим коэффициентом, равным единице, многочлены с простыми коэффициентами и т.д.)

[1] Спринджук В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. — Мн.: Наука и Техника. 1967.

[2] Bernik V.I. On exact order of zero approximatins by values of integer polynomials // Acta Arithmetica.— 1989.— V. 53.— P. 17—28.

[3] Beresnevich V.V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arithmetica.— 1999.— Vol. 90, No 2.— P. 97—112.

[4] Bernik V.I., Goetze F., Kukso O.S. Lower bounds for the number of integral polynomials with given order of discriminants // Acta Arithmetica.— 2008.— Vol. 133, No 4.— P. 375—390.