А.Я. Белецкий (Национальный авиационный университет, г. Киев, Украина)

Алгебраические основы преобразований Грея. Теория и приложения

Коды Грея, предложенные в середине XX века в ответ на запросы инженерной практики относительно построения оптимальных по критерию минимума ошибки неоднозначности преобразователей типа "угол–код" [1], на заре своего появления привлекли к себе внимание не только исследователей математиков, но и широкого круга разработчиков разнообразной аппаратуры. Отличительная особенность кодов Грея состоит в том, что в двоичном пространстве (или в двоичной системе счисления) при переходе от изображения одного числа к изображению соседнего старшего или соседнего младшего числа происходит изменение цифр (1 на 0, или наоборот) только в одном разряде числа.

За более чем пятидесятилетнюю историю своего развития теория кодов Грея претерпела незначительные изменения. По-видимому, оказались вне поля зрения, как математиков, так и разработчиков аппаратуры, возможности построения кодов, *инверсных* по направлению формирования *классическим* кодам Грея. В известной схеме [1] процесс формирования прямых и обратных кодов Грея развивается по направлению слева направо; при этом старший (левый) разряд преобразуемой кодовой комбинации сохраняется неизменным. Вместе с тем можно построить схему преобразования, в общем, m-ичных равномерных кодов, обратную по направлению классическому (*левостороннему*) преобразованию Грея [2]. В таком классе преобразований, который назван *правосторонним*, при прямом и обратном преобразованиях сохраняется неизменным значение младшего (правого) разряда преобразуемого числа.

Комбинация лево- и правостороннего преобразований Грея (как прямого, так и обратного), образующих совокупность *простых* кодов Грея, совместно с оператором инверсной перестановки (представляющим собой квадратную (0,1)-матрицу, в которой элементы вспомогательной диагонали равны единице, а остальные – нулю) послужила основой построения комбинированных или *составных* кодов Грея. Применение как простых, так и составных кодов Грея оказалось весьма успешным в задачах определения структуры и взаимосвязи дискретных симметричных систем Виленкина-Крестенсона функций (ВКФ), частным случаем которых являются системы дискретных экспоненциальных функций и системы функций Уолша. И, тем не менее, не для всех порядков систем ВКФ удается «связать» с помощью упомянутых выше преобразований Грея полное множество симметричных систем ВКФ. Возникает так называемая проблема *кластеризации*, которая, для примера, проявляется в том, что только 128 из 448 симметричных систем функций Уолша 16-го порядка оказалось возможным синтезировать с помощью простых и составных кодов Грея. Обозначенную проблему кластеризации удалось разрешить введением так называемых *обобщенных* кодов Грея [3].

В докладе обсуждаются теоретические основы построения алгебраической структуры, состоящей из конечного числа элементов (*индикаторных матриц* систем ВКФ), на множестве которых определена бинарная операция типа умножения, удовлетворяющая основным аксиомам группы: операция ассоциативна; гарантирует единицу и обратные элементы; замкнута для каждой пары элементов, входящих в группу. Рассматриваются различные направления применения преобразований Грея: в криптографии, теории и практике дискретного спектрального анализа сигналов и изображений, структурном синтезе пересчетных схем и др.

[1] Gray F. Pulse code communication. – Pat USA, № 2632058, 1953

[2] Белецкий А.Я. Комбинаторика кодов Грея. – К.: КВІЦ, 2003. – 506 с.

[3] Белецкий А.Я., Белецкий А.А., Белецкий Е.А. Преобразования Грея. Монография. В двух томах. Т. 1. Основы теории – К.: Кн. изд-во НАУ, 2007. – 412 с., Т. 2. Прикладные аспекты – К.: Кн. изд-во НАУ, 2007. –644 с.