

А.С. Бегматов (Институт математики и информационных технологий АНРУз, Ташкент, Узбекистан)

Периодические орбиты гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома

В этой работе изучаются гомеоморфизмы окружности $f(x)$ с одной точкой излома, т.е. отображения гладкие за исключением одной точки в которой производная $f'(x)$ имеет разрыв. Более точно, рассматриваются однопараметрические семейства отображений единичной окружности $f_\theta(x)$, $x \in S^1 = R^1/Z^1 \simeq [0, 1)$:

$$f_\theta(x) = \hat{f}(x) + \theta \pmod{1}, \quad x \in S^1, \quad \theta \in [0, 1],$$

причем поднятие $\hat{f}(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- (a) $\hat{f}(x)$ – строго возрастающая функция;
- (b) $\hat{f}(0) = 0$, $\hat{f}(x+1) = \hat{f}(x) + 1$, $x \in R^1$;
- (c) существует точка $x_b \in S^1$ такая, что в этой точке определены конечные односторонние производные $\hat{f}'(x_b \pm 0) > 0$ и $\sigma = \sigma(\hat{f}, x_b) = \hat{f}'(x_b - 0)/\hat{f}'(x_b + 0) \neq 1$;
- (d) $\hat{f}'(x)$ – абсолютная непрерывная функция на отрезке $[x_b, x_b+1]$ и $\hat{f}'' \in L_\alpha(S^1, d\ell)$ при некотором $\alpha > 1$, ℓ – мера Лебега на окружности.

Обозначим $\hat{f}_\theta(x) = \hat{f}(x) + \theta$. Таким образом, при каждом значении θ , гомеоморфизм $\hat{f}_\theta$ имеет только одну точку излома и за исключением этой точки она является гладкой функцией. Условия (d) называется **условиями гладкости Кацнельсона-Орнштейна**.

Обозначим через ρ_θ число вращения, отвечающее f_θ , $\rho_\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{f}_\theta^{(n)}(x)}{n} \pmod{1}$, где $\hat{f}_\theta^{(n)}$ обозначает n -ую итерацию функции $\hat{f}_\theta$. Хорошо известно, что ρ_θ является непрерывной и возрастающей (не строго) функцией параметра θ [1]. Заметим, что каждому рациональному $\rho = \frac{p}{q}$, $0 \leq \frac{p}{q} < 1$ отвечает невырожденный отрезок значений θ таких, что $\rho_\theta = \frac{p}{q}$, в то время как иррациональному ρ отвечает единственное θ . Обозначим через $I(\frac{p}{q})$, $0 \leq \frac{p}{q} < 1$ отрезок значений параметра θ таких, что $\rho_\theta = \frac{p}{q}$. Поскольку число вращения $\rho_\theta = \frac{p}{q}$, то для каждого $\theta \in I(\frac{p}{q})$ всегда существует по крайней мере одна периодическая орбита периода q гомеоморфизма f_θ .

Пусть разложение число $\frac{p}{q}$ в непрерывную дробь имеет вид: $\frac{p}{q} = [k_1, k_2, \dots, k_n]$, $k_n \geq 2$. Число $r(\frac{p}{q}) = n$ называется **рангом** рационального числа $\frac{p}{q}$.

Определения. Пусть g отображение отрезка $[a, b]$ в себя из класса C^1 и $B = \{\beta_i, i = 0, \dots, m-1\}$ его периодическая орбита периода m . Если $|\prod_{i=0}^{m-1} g'(\beta_i)| < 1$,

то периодическая орбита B называется **устойчивой**, если $|\prod_{i=0}^{m-1} g'(\beta_i)| > 1$ - **неустойчивой**. В случае $|\prod_{i=0}^{m-1} g'(\beta_i)| = 1$, она называется **нейтральной**.

Концевые точки отрезка $I(\frac{p}{q})$ обозначим через $\theta_1(\frac{p}{q})$ и $\theta_2(\frac{p}{q})$, т.е. $I(\frac{p}{q}) = [\theta_1(\frac{p}{q}), \theta_2(\frac{p}{q})]$. Теперь сформулируем основной результат нашей работы.

Теорема 1. Пусть поднятие $\hat{f}$ удовлетворяет условиям (a) – (d). Предположим, что число вращения $\rho_\theta = \frac{p}{q}$ гомеоморфизма f_θ , $\theta \in I(\frac{p}{q})$ ранга n . Тогда существует натуральное число n_0 такое, что при всех $n > n_0$ справедливы следующие утверждения:

(1) при $\theta = \theta_1(\frac{p}{q})$ и $\theta_2(\frac{p}{q})$ существует только одна периодическая орбита периода q гомеоморфизма f_θ : одна из них нейтральная, а вторая проходит через особую точку x_b ;

(2) для каждого $\theta \in (\theta_1(\frac{p}{q}), \theta_2(\frac{p}{q}))$ существуют ровно две периодические орбиты периода q гомеоморфизма f_θ : одна устойчивая, другая неустойчивая.

Отметим, что утверждение теоремы 1 для гомеоморфизмов окружности $f \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, было доказано в работе Вул и Ханина [2].

[1] Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М. Наука, 1980.

[2] Khanin K.M. and Vul E.B. Circle homeomorphisms with weak discontinuities. In Dynamical systems and statistical mechanics. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 57-98, 1991.