І.Б. Базилевич, О.І. Охрін (ЛНУ ім. Ів. Франка, Львів, Україна)

Виродження S -зупиненого докритичного процесу з неперервним часом та зліченою кількістю типів частинок

Розглядаємо нерозкладний докритичний однорідний гіллястий процес $\mu(t)$ з неперервним часом t та зліченою кількістю типів частинок. Позначимо через $X = \{x_1, \dots x_d, \dots\}$ множину типів частинок і введемо σ-алгебру $\mathcal{X} = \sigma(X)$, яка містить всі одноточкові множини. Позначимо $Z_+ = \{0, 1, \dots\}$ та $Z_+^\infty = \times_{i=1}^\infty Z_+$. Важливою умовою для такого типу задач [1] є той факт, що в початковий момент є велика кількість частинок $n = \sum_{i=1}^\infty n_i$, де n_i - кількість частинок типу x_i при $t = 0$. Вважаємо при цьому, що $n < \infty$. Нехай $\mu(t, A)$ – випадкова міра, яка позначає кількість частинок в момент часу t типи яких належать множині $A \in \mathcal{X}$. Випадковий процес $\mu(t) = \mu(t, \mathcal{X})$ визначає кількість частинок в момент часу t.

Розглянемо $S \subset Z_+^\infty$ ($\mathbf{0} = (0, \dots, 0, \dots)' \overline{\in} S$. Позначимо через ζ момент першого попадання гіллястого процесу $\mu(t)$ в поглинаючу множину S. S-зупиненим гіллястим процесом називатимемо процес $\xi(t)$, який пов'язаний з $\mu(t)$ наступним чином

$$\xi(t) = \begin{cases} \mu(t), & t < \zeta, \\ \mu(\zeta), & t \geq \zeta. \end{cases}$$

Припускається, що задано перехідні ймовірності $\hat{P}(t, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ процесу $\mu(t)$, де $\mathbf{a} = (n_1, \dots, n_d, \dots)'$ та $\mathbf{b} = (m_1, \dots, m_d, \dots)'$ з n_j, m_j – кількість частинок типу x_j в початковий та в момент часу t відповідно. Введемо $q(t, \mathbf{a}) = P_{\mathbf{a}}\{\mu(t) = \mathbf{r},\ \mathbf{r} \in S\}$ – ймовірність попадання процесу в поглинаючу множину S до моменту часу t. Тут $P_{\mathbf{a}}(\cdot)$ - умовна ймовірність того, що в початковий момент часу процес знаходився в стані $\mathbf{a}$.

Для знаходження рівняння для функції розподілу $G_\zeta(\mathbf{a}, t)$ випадкової величини ζ припустимо, що зупинка процесу відбулась в інтервал часу $[t; t + \triangle t)$ та в початковий момент часу система знаходилась в стані $\mathbf{a}$. Вважвємо, що при $t \to 0$

$$P_{\mathbf{a}}(\mu(t) = \mathbf{b}) = \begin{cases} 1 + p(\mathbf{a})\alpha(t) + o(t), & \mathbf{a} = \mathbf{b}; \\ p(\mathbf{a}, \mathbf{b})\alpha(t) + o(t), & \mathbf{a} \neq \mathbf{b}, \end{cases}$$

$p(\mathbf{a}) < 0$, $p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$, $\sum_{\mathbf{b}} p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + p(\mathbf{a}) = 0$ та $\exists \lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t)}{t}$, тобто $\exists \alpha'(t)$ в $t = 0$.

Щодо ймовірності виродження $q(t, \mathbf{a})$, то очевидним є наступне

$$1 - q(t, \mathbf{a}) = P_{\mathbf{a}}\{\mu(t) \notin S, \forall t_1 < t\} = P_{\mathbf{a}}\{\zeta \geq t\} = 1 - G_\zeta(\mathbf{a}, t) \Rightarrow q(t, \mathbf{a}) = G_\zeta(\mathbf{a}, t),\ \forall \mathbf{a}, t$$

Теорема 1 *За вищенаведених умов, ймовірність виродження задовільняє наступному диференціальному рівнянню*

$$\frac{dG_\zeta(\mathbf{a}, t)}{dt} = [1 - G_\zeta(\mathbf{a}, t)]\alpha'(t) \sum_{\mathbf{b} \notin S, \mathbf{c} \in S} p(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

[1] Севастьянов Б. (1988). “Асимптотическое поведение вероятностей вырождения остановленных ветвящихся процессов”, Теория Вер. и ее Прил. 43, ст. 315-322.