Д.Б. Базарханов (Институт Математики, Алматы, КАЗАХСТАН)

Приближение тригонометрическими полиномами и всплесками некоторых классов периодических функций многих переменных

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, $n \le d$; для произвольных $\varepsilon \subset \varepsilon_d = \{1, \ldots, d\}$ $(\varnothing \ne \varepsilon = \{j_1, \ldots, j_{|\varepsilon|}\},\ 1 \le j_1 < \ldots < j_{|\varepsilon|} \le d)$ и $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $x(\varepsilon) = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_{|\varepsilon|}}) \in \mathbb{R}^{|\varepsilon|}$. Далее, фиксируем разбиение $\epsilon = \{\varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(n)}\}$ множества ε_d (т.е. $\varepsilon_d = \cup_{i=1}^n \varepsilon^{(i)}$, $\varepsilon^{(i)} \cap \varepsilon^{(j)} = \varnothing$ при $i \ne j$, $\varepsilon^{(i)} \ne \varnothing$, $d_i := |\varepsilon^{(i)}|$, $i \in \varepsilon_n$). Для удобства для $x \in \mathbb{R}^d$ пишем $x = (x^1, \ldots, x^n)$, где $x^i = x(\varepsilon^{(i)}) \in \mathbb{R}^{d_i}$, $i \in \varepsilon_n$.

Выберем бесконечно дифференцируемые функции $\eta_0^{(i)} : \mathbb{R}^{d_i} \to \mathbb{R}$ такие, что $0 \le \eta_0^{(i)}(\xi^i) \le 1$, $\xi^i \in \mathbb{R}^{d_i}$; $\eta_0^{(i)}(\xi^i) = 1$ при $|\xi^i| \le 1$; $\eta_0^{(i)}(\xi^i) = 0$ при $|\xi^i| \ge 3/2$ $(i \in \varepsilon_n)$. Положим $\eta^{(i)}(\xi^i) = \eta_0^{(i)}(2^{-1}\xi^i) - \eta_0^{(i)}(\xi^i)$, $\eta_j^{(i)}(\xi^i) = \eta^{(i)}(2^{-j+1}\xi^i)$, $j \in \mathbb{N}$; $\eta_k(\xi) = \prod_{i=1}^n \eta_{k_i}^{(i)}(\xi^i)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

Пусть $L_q = L_q(\mathbb{T}^d)(1 \le q \le \infty)$ — пространство функций f, 2π - периодических по каждой переменной, суммируемых в степени q (существенно ограниченных при $q = \infty$) на $\mathbb{T}^d$, с нормой $\| f \|_q = \| f \,|\, L_q(\mathbb{T}^d) \|$ (здесь $\mathbb{T}^d$ — d-мерный тор), а $l_\theta = l_\theta(\mathbb{N}_0^n)\,(1 \le \theta \le \infty)$— пространство кратных (комплекснозначных) числовых последовательностей $\{a_k\} = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0^n}$ со стандартной нормой $\|\{a_k\} \mid l_\theta \|$.

Определение . *Пусть* $s = (s_1, \ldots, s_n) \in (0, \infty)^n$, $1 \le \theta \le \infty$. *Пространство типа Никольского – Бесова* $\mathbf{B}_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{T}^d)$ $(1 \le p \le \infty)$ *состоит из всех функций* $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, *для которых конечна норма*

$$\| f \,|\, B \| = \| f \,|\, \mathbf{B}_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{T}^d) \| \ = \ \|\{2^{(s,k)}\| \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^d} \eta_k(\lambda) \widehat{f}(\lambda) e^i(\lambda, x)\|_p\} \,|\, l_\theta\|.$$

Пространство типа Лизоркина – Трибеля $\mathbf{F}_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{T}^d)$ $(1 \le p < \infty)$ *состоит из всех функций* $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, *для которых конечна норма*

$$\| f \,|\, F \| = \| f \,|\, \mathbf{F}_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{T}^d) \| \ = \ \|\|\{2^{(s,k)} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^d} \eta_k(\lambda) \widehat{f}(\lambda) e^{i(\lambda, x)}\} \,|\, l_\theta\|\|_p.$$

(*Здесь* $\widehat{f}(\lambda) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-i(\lambda,x)} dx$— *коэффициенты Фурье функции* f, $\quad \lambda \in \mathbb{Z}^d$.)

В докладе будут рассмотрены точные в смысле порядка оценки наилучших приближений тригонометрическими полиномами со специальным спектром, наилучших N–членных тригонометрических приближений и тригонометрических поперечников единичных шаров пространств $\mathbf{B}_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{T}^d)$ и $\mathbf{F}_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{T}^d)$ в пространстве $L_q(\mathbb{T}^d)$ для ряда соотношений между параметрами этих пространств. Будут также рассмотрены оценки приближений функций из этих классов специальными частичными суммами их разложений по кратной периодизированной системе всплесков Мейера.