М.Я. Барняк (Ін-т математики НАН України, Київ, Україна)

Побудова розв'язків крайових задач для рівняння Лапласа в областях обертання з ребристою межею

Пропонується метод побудови високоточних наближених розв'язків крайових задач для тривимірного рівняння Лапласа в областях обертання, з меридіональним перерізом, що має кутові точки. Характерною ознакою розв'язків таких задач є наявність особливостей в кутових точках. Відомо, що довільна ізольована особлива точка обмеженої гармонічної функції є усувною особливою точкою. Якщо ж особливість не є усувною і вона знаходиться в кутовій точці, то вона не може бути ізольованою, а це означає що сама функція або її частинні похідні терплять розрив за межею області. Для розв'язування задач в [1] використовуються варіаційні методи, для чисельної реалізації яких побудовано спеціальні координатні функції з особливостями, які самі, або їхні частинні похідні терплять розрив на деякому промені з початком в кутовій точці і спрямованим за межі області.

В областях обертання частинні розв'язки рівняння Лапласа в циліндричній системі координат (z, r, η) визначаються через розв'язки рівняння

$$L_m w(z,r) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w(z,r)}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w(z,r)}{\partial z^2} - m^2\frac{w(z,r)}{r^2} = 0, \quad m = 0, 1, ... \tag{1}$$

В роботі показано, що дійсна та уявна частини функцій,

$$\begin{aligned}
\varphi_k(u,r) &= \int_0^{\pi} ln(u + r\cos t)(u + r\cos t)^k \cos(mt)dt, \quad k = 0, 1, ... \\
\psi_k(u,r) &= \int_0^{\pi} (u + r\cos t)^{k-0,5} \cos(mt)dt, \quad k = 1, 2, ...,
\end{aligned}$$

при $u = iz + r_0 (r_0 > 0)$, задовольняють рівняння (1). Ці функції, або їхні частинні похідні першого порядку терплять розрив на промені $(r > r_0 > 0,\ z = 0)$. Наводяться явні вирази для цих функцій та рекурентні формули для обчислення функцій $\varphi_k(u,r)$ і $\psi_k(u,r)$ та їх частинних похідних.

Ці розв'язки, разом із системою однорідних многочленів, які задовольняють рівняння (1), використано в якості координатних функцій, при реалізації варіаційних методів розв'язування крайових задач для рівняння (1). В якості ілюстрації запропонованого методу, побудовані розв'язки задачі Неймана і задачі про власні коливання ідеальної рідини в сферичній порожнині. Показано, що враховані таким способом особливості розв'язків крайових задач дають змогу суттєво, на 2-3 порядки, збільшити точність виконання крайових умов задач.

[1] Барняк М.Я., Побудова розв'язків крайових задач для рівняння Лапласа в областях обертання з ребристою межею //Укр. мат. журн. 2009. т. 61. №5. с. 579–595.