Ш.А.Балгимбаева (Институт Математики, Алматы, КАЗАХСТАН)

Восстановление оператора свертки с гладкой функцией в пространстве Никольского-Бесова

Пусть $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ — пространство медленно растущих распределений (обобщенных функций) на $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{D}(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω. Преобразование Фурье обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ обозначим через $\mathcal{F}(f)$.

Для $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ рассмотрим сужение $\mathcal{F}(f)$ на $[-\sigma,\sigma]^n$, как сужение обобщенной функции, т.е. как линейный непрерывный функционал над пространством $\mathcal{D}((-\sigma,\sigma)^n)$. Обозначим данное сужение через $\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}$.

Будем рассматривать задачу восстановления оператора $G = f * g$ свертки с фиксированной гладкой функцией $g \in B^{s_1}_{p_1\,\theta}(\mathbf{R}^n)$ в пространстве $B^s_{p\,\theta}(\mathbf{R}^n)$.

Будем использовать в качестве информации о функциях $f \in B^s_{p\,\theta}(\mathbf{R}^n)$ сужение преобразования Фурье $\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}$.

В качестве (линейного) метода приближенного восстановления оператора G, использующего информацию $\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}$ о функции $f \in B^s_{p\,\theta}(\mathbf{R}^n)$, будем рассматривать свертку с функцией g специальной "частной суммы" ее разложения в ряд по n–мерной системе всплесков Мейера:

$$S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}] = G\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} c_k(f)\varphi_{0k} + \sum_{e\neq\varnothing}\sum_{j=0}^{j\sigma}\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} c^e_{jk}(f)\psi^e_{jk}\Big),$$

где n-мерная система всплесков Мейера $\Psi := \{\varphi_{0k}, \psi^e_{jk}\}_{e\neq\varnothing,\, j\in\mathbb{N}_0, k\in\mathbb{Z}^n}$ определяется следующим образом:

$$\Big\{\varphi_{0k}(x) := \prod_{\nu=1}^n \varphi_{0k_\nu}(x_\nu), \quad \psi^e_{jk}(x) := \prod_{\nu\in e'}\varphi_{jk_\nu}(x_\nu)\prod_{\nu\in e}\psi_{jk_\nu}(x_\nu)\Big\}_{e\neq\varnothing,\, j\in\mathbb{N}_0,\, k\in\mathbb{Z}^n};$$

здесь $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — масштабирующая функция и всплеск Мейера соответственно (см. [1]), e пробегает все непустые подмножества множества $e_n := \{1,2,...,n\}$, $e' = e_n \setminus e$, $c_k(f) = (f, \varphi_{0k})$, $c^e_{jk}(f) = (f, \psi^e_{jk})$ — коэффициенты Фурье f, а $j_\sigma = [\log_2 \frac{3\sigma}{4\pi}]$.

Теорема . *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$, *причем* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = 1 + \frac{1}{p_2}$, $s > 0$. *Пусть далее* $g \in B^{s_1}_{p_1\,\theta}(\mathbf{R}^n)$.

Тогда S_σ *— оптимальный метод восстановления и для его погрешности верна оценка*

$$\sup_{\|f|\ B^s_{p\,\theta}\|\le 1} \|G(f) - S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}]|\ B^{s_1}_{p_2\,\theta}\| \asymp \|g^\sigma|\ B^{s_1}_{p_1\,\theta}\| 2^{-j_\sigma s}.$$

[1] Meyer Y. Wavelets and operators. — Cambridge Univ. Press, 1992.