С.Н. Герасин, А.Г. Балакирева (Харьковский национальный университет радиоэлектроники)

Моделирование циклических колебаний в модифицированной модели Лесли

В жизненном цикле любого организма можно выделить либо несколько стадий развития, либо несколько возрастных ступеней, определяемых в некоторых единицах времени, например, в годах с момента рождения особи. Тогда популяция естественно распадается на некоторое число n возрастных групп. Простейшие постулаты относительно взаимозависимости численностей возрастных групп приводят к так называемой модели Лесли [1].

Если через $x(t)$ обозначить вектор-столбец, координатами которого является численности всех n возрастных групп, то модель Лесли имеет вид:

$x(t+1) = Lx(t)$, где L - квадратная матрица ($n \times n$). (1)

В переходной матрице Лесли элементы первой поддиагонали β_i $(i = \overline{1,n})$ – это коэффициенты выживаемости (то есть вероятность перехода особей из i- го класса в ($i+1$)-й класс), а элементы первой строки α_i $(i = \overline{1,n})$ – коэффициенты рождаемости (то есть средняя плодовитость особей i-й возрастной группы). Все остальные элементы матрицы равны нулю.

Таким образом, зная структуру матрицы L и начальное состояние популяции (вектор-столбец $x(0)$), можно прогнозировать состояние популяции в любой наперед заданный момент времени $x(k+1) = L^k x(0)$.

Матрица Лесли имеет единственное положительное собственное число λ такое, что для любого другого собственного числа этой же матрицы выполняется условие $|r| \le \lambda$. Это собственное число называется доминирующим и показывает скорость размножения популяции.

Известно, что реальные популяции имеют циклические колебания численности, однако траектории однородной модели Лесли (1) являются экспоненциальными. В связи с этим возможно использование неоднородной модели Лесли. Циклическая или почти циклическая динамика популяции моделируется с помощью двух матриц Лесли, отличающихся одна от другой набором значений выживаемостей β_i так, что одна из них (L_1) имеет доминирующее собственное число $\lambda > 1$, а другая (L_2) имеет $\lambda < 1$. Когда общая численность $N(t)$ популяции меньше некоторого среднего (фиксированного) значения $\overline{N}$, популяция управляется матрицей, которая дает возрастание численности. Как только $N(t)$ превышает $\overline{N}$, популяция управляется матрицей L_2 дающей убывание численности.

Таким образом, в работе было проведено исследование неоднородной модификации модели Лесли. С помощью данной модели прогнозировали численность модельной популяции и установили, что результаты моделирования хорошо согласуются с реальными данными.

[1] Leslie P.H. On the use of matrices in certain population mathematics / Biometrica.– 1945.–V.33, N3.– P.183-212.