В. Ф. Бабенко (Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Украина; Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, Украина)

Теорема о поперечнике шара в пространствах отображений

Важную роль в теории приближений играет введенное А.Н. Колмогоровым понятие поперечника множества в нормированном пространстве, позволяющее сравнивать аппроксимативные свойства подпространств заданной размерности. При получении оценок снизу поперечников по Колмогорову во многих случаях использовалась теорема о поперечнике шара.

Обратимся к задачам аппроксимации функций, значения которых принадлежат заданному линейному нормированному пространству. Пусть Q – некоторое множество и X – некоторое нормированное пространство функций $f : Q \rightarrow X$ с нормой $\|\cdot\|_X$. Предположим, что X и $\|\cdot\|_X$ обладают следующими свойствами: 1) $x \in X \Rightarrow |x| \in X$; 2) $\|x\|_X = \||x|\|_X$; 3) $|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\|_X \leq \|y\|_X$. Через $L_X(Q, Y)$ будем обозначать пространство L с нормой

$$\|f\| = \|\|f(t)\|_Y\|_X.$$

Наилучшим приближением функции $f \in L_X(Q, Y)$ подпространством G в метрике пространства $L_X(Q, Y)$ называется величина

$$E(f, G)_{L_X(Q, Y)} = \inf_{g \in G} \|f - g\|,$$

а наилучшим приближением множества $\mathcal{M}$ подпространством G – величина

$$E(\mathcal{M}, G)_{L_X(Q, Y)} = \sup_{f \in \mathcal{M}} E(f, G)_{L_X(Q, Y)}.$$

Для сравнения аппроксимативных свойств некоторых совокупностей подпространств пространства $L_X(Q, Y)$ В.Ф. Бабенко и С.А. Пичуговым были введены понятие слабой размерности и понятие соответствующих (слабых) поперечников. Так соотношением

$$d_n^w(\mathcal{M}, L_X(Q, Y)) = \inf_{w - \dim G = n} E_n(\mathcal{M}, G)_{L_X(Q, Y)}$$

определяется слабый n -поперечник по Колмогорову класса $\mathcal{M} \subset L_X(Q, Y)$ в пространстве X .

Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ – линейно независимая система функций из X и пусть $G_{n+1} = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}$, $B_{n+1, \rho} = \{g(t) \in G_{n+1} : \|g(t)\|_X \leq \rho\}$, $\rho > 0$. Для произвольного $y \in Y$, $\|y\|_Y = 1$, положим

$$G_{n+1}^y = \{f \in L_X(Q, Y) : f(t) = g(t) \cdot y, g(t) \in G_{n+1}\}$$

и

$$B_{n+1, \rho}^y = \{f \in L_X(Q, Y) : f(t) = g(t) \cdot y, g(t) \in G_{n+1}, \|g(t)\|_X \leq \rho\}.$$

Следующая теорема является для слабых поперечников аналогом теоремы о поперечнике шара.

Теорема. Для любого $n \in \mathbb{N}$, любого $\rho > 0$ и произвольного $y \in Y$, $\|y\|_Y = 1$,

$$d_n^w(B_{n+1, \rho}^y, L_X(Q, Y)) = \rho.$$