Е.С.Антонова, Ю.П.Вирченко(Белгородский Государственный Университет, Белгород, Россия)

Верхние оценки порогов перколяции бернуллиевского поля на плоских однородных решётках

Бесконечное множество $V \in \mathbf{R}^2$ называют периодическим, если есть пара $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ неколлинеарных векторов в $\mathbf{R}^2$ (параллелограмм периодов) таких, что, для любого $n_i \in \mathbf{Z}$, $i \in \{1, 2\}$ имеет место равенство $V = V + n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2$. Кристаллической решеткой в $\mathbf{R}^2$, мы называем периодическое множество, которое состоит из изолированных точек. Кристаллическая решетка допускает диъюнктивное разложение

$$V = \bigcup_{\langle n_1, n_2 \rangle \in \mathbf{Z}^2} \{V_0 + n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2\} ,$$

где конечное множество V_0 называется кристаллической ячейкой. Если число точек в V_0 минимально среди всех возможных кристаллических ячеек, допустимых в V, то такая ячейка называется элементарной.

О п р е д е л е н и е. Пусть $\Lambda = \langle V, \Phi \rangle$ – бесконечный неориентированный граф без петель, где V – множество вершин и Φ – множество рёбер (двухэлементных подмножеств из V). Этот граф называется периодическим, имеющим размерность два, если он допускает такое вложение M в $\mathbf{R}^2$, при котором образ $\mathsf{M}V$ является кристаллической решёткой в $\mathbf{R}^2$, а образ $\mathsf{M}\Phi$ множества Φ инвариантен относительно трансляций с параллелограммом периодов $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$,

$$\mathsf{M}\Phi + n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 = \mathsf{M}\Phi , \tag{1}$$

$\langle n_1, n_2 \rangle \in \mathbf{Z}^2$ и при этом множество $\Phi_0 = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \Phi : \mathsf{M}\mathbf{y} \in V_0\}$ конечно.

Множество $\mathsf{M}\Phi$ допускает дизъюнктивное разложение

$$\mathsf{M}\Phi = \bigcup_{\langle n_1, n_2 \rangle \in \mathbf{Z}^2} \{\mathsf{M}\Phi_0 + n_1\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + n_2\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle\} .$$

Бесконечный двумерный периодический граф $\Lambda = \langle V, \Phi \rangle$ называют однородной решеткой, если он инвариантен, при подходящем вложении $\mathsf{M} : V \mapsto \mathbf{R}^2$, относительно сдвигов, определяемых парами из Φ_0. Существуют только три однородные решётки размерности 2 – треугольная, квадратная и шестиугольная.

Рассматривается случайное бернуллиевское поле $\{\tilde{c}(r) \in \{0, 1\}; r \in V\}$ на периодическом графе, являющемся гексагональной решеткой Λ. Это поле характеризуется параметром $Pr\{\tilde{c}(r) = 1\} = c$.

О п р е д е л е н и е. Поле $\{\tilde{c}(r); r \in V\}$ обладает перколяцией, если вероятность $P(c)$ существования бесконечного несамопересекающегося пути от точки $\mathsf{M}^{-1}0$ на случайном подграфе $\tilde{\Lambda} = \langle \tilde{W}, \tilde{\Phi} \rangle$ с $\tilde{W} = \{r \in W : \tilde{c}(r) = 1\}$ отлична от нуля. Значение $\inf\{c \in [0,1] : P(c) > 0\}$ называется порогом перколяции.

Вероятность $P(c)$ допускает так называемое кластерное разложение

$$P(c) = c - \sum_{W\ \mathsf{M}^{-1}0 \in W \in \Gamma} \Pr\{W \subset \tilde{W}\} \tag{1}$$

где Γ – класс конечных Φ-связанных подмножеств V, которые называются кластерами, и справедлива следующая оценка для слагаемых в сумме

$$\Pr\{W \subset \tilde{W}\} \leq (1-c)^{|\partial_+ W|}\,. \tag{2}$$

Здесь, $\partial_+ W$ – так называемая внешняя граница множества W, которая представляет собой набор вершин z из V, непринадлежащих V, но для которых существует, по крайней мере, одна вершина x такая, что пара $\{x, z\}$ принадлежит Φ и, из вершины z, существует бесконечный путь на графе Λ, расположенный на множестве $V \setminus W$. Внешние границы кластеров являются простыми циклами на т.н. сопряжённом графе $\Lambda^* = \langle V, \Phi^* \rangle$.

В работе разработана методика получения последовательно уточняющихся верхних оценок c_k, $k = 0, 1, 2, ...$ порога перколяции c_* для плоских периодических графов. В рамках этой методики, вычислены явно оценки c_0 для однородных решёток. В частности, для гексагональной решётки, получена оценка $c_* \leq {}_0 = 2(1 - \sqrt{3}/3)$.
