І. В. Андрусяк (Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна)

Зростання цілих функцій, показник збіжності нулів яких є цілим числом

Позначимо через A клас цілих функцій $f(z) \not\equiv 0$. Для $f \in A$ і кожного $r \geq 0$ покладемо $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.

Через $\mathcal{Z}$ позначимо клас комплексних послідовностей $\zeta = (\zeta_n)$ таких, що $0 < |\zeta_0| \leq |\zeta_1| \leq \ldots$ і $\zeta_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Нехай $n_\zeta(r) = \sum_{|\zeta_n| \leq r} 1$ — лічильна функція послідовності ζ, а $\tau_\zeta = \overline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{\ln n_\zeta(r)}{\ln r}$ — порядок функції $n_\zeta(r)$. Скажемо, що $f \in A(\zeta)$, якщо і лише якщо $f \in A$ і послідовність нулів функції f, занумерована (з урахуванням кратностей) у порядку неспадання їх модулів, збігається з послідовністю ζ. За класичною теоремою Вейєрштрасса [1] $A(\zeta) \neq \varnothing$ для довільної послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$.

Наступне твердження є наслідком з добре відомих класичних результатів (у випадку $\tau_\zeta < \infty$), а також результатів В. Бергвайлера [2] і Дж. Майлза [3] (у випадку $\tau_\zeta = \infty$).

Теорема А. *Нехай $\zeta \in \mathcal{Z}$ і $\tau_\zeta \in [0, +\infty]\setminus\mathbb{Z}$. Тоді існує $f \in A(\zeta)$, для якої*

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{n_\zeta(r)} < \infty.$$

Розглядається задача про мінімальне зростання функцій $f \in A(\zeta)$ у випадку цілого τ_ζ.

Теорема. *Нехай $\tau \in \mathbb{N}$, $\varphi \in L$. Для того, щоб для довільної послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$ такої, що $\tau_\zeta = \tau$, існувала ціла функція $f \in A(\zeta)$, для якої*

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{n_\zeta(r)\varphi(\ln n_\zeta(r))} = 0, \tag{1}$$

необхідно і досить, щоб

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\varphi(x)} < \infty. \tag{2}$$

Також є результати у випадку $\tau_\zeta = 0$.

[1] Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.

[2] Bergweiler W. Canonical products of infinite order // J. reine angew. Math. – 1992. – V. 430. – P. 85–107.

[3] Miles J. On the growth of entire functions with zero sets having infinite exponent of convergence // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2002. – V. 27. – P. 69–90.