Г. Акишев (Карагандинский госуниверситет, Караганда, Казахстан)

О порядках приближения функций в пространствах Лоренца

Пусть $\overline{x} = (x_1, ..., x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$ и числа $\theta_j, q_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, ..., m$.

Через $L_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)$ обозначим пространство Лоренца со смешанной нормой – всех измеримых по Лебегу 2π – периодических функций $f(\overline{x})$, для которых (см.[1]) $\|f\|_{\overline{p},\overline{\theta}} = \|...\|f\|_{p_1,\theta_1}...\|_{p_m,\theta_m} < +\infty$,где

$$\|g\|_{p,\theta} = \left\{ \int\limits_0^{2\pi} (g^*(t))^\theta t^{\frac{\theta}{p}-1} dt \right\}^{\frac{1}{\theta}},$$

g^* - невозрастающая перестановка функции $|g|$.

$a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе. Положим $\delta_{\overline{s}}(f, \overline{x}) = \sum\limits_{\overline{n} \in \rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f) e^{i\langle \overline{n}, \overline{x} \rangle}$,где $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle = \sum\limits_{j=1}^m y_j x_j$, $\rho(\bar{s}) = \left\{ \overline{k} = (k_1, ..., k_m) \in Z^m : \quad 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, ..., m \right\}$. Рассмотрим класс Бесова

$$S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}} B = \left\{ f \in \circ L_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m) : \|f\|_{B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}} = \|f\|_{\overline{p},\overline{\theta}} + \left\| \left\{ 2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{p},\overline{\theta}} \right\} \right\|_{l_{\overline{\tau}}} \le 1 \right\},$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$, $1 \le p_j, \theta_j, \tau_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$.

Пусть дан вектор $\bar{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$, $\gamma_j > 0$. Положим

$$Q_n^{\bar{\gamma}} = \cup_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < n} \rho(\bar{s}), \quad T(Q_n^{\bar{\gamma}}) = \{ t(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q_n^{\bar{\gamma}}} b_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle} \}.$$

$S_n^{\bar{\gamma}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q_n^{\bar{\gamma}}} a_{\bar{k}}(f) \cdot e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}$ — частичная сумма ряда Фурье функции f. Справедлива

Теорема. Пусть $\theta^{\bar{(1)}} = (\theta_1^{(1)}, ..., \theta_m^{(1)})$, $\theta^{\bar{(2)}} = (\theta_1^{(2)}, ..., \theta_m^{(2)})$, $\bar{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$, $\bar{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\bar{q} = (q_1, ..., q_m)$, $\bar{r} = (r_1, ..., r_m)$, $\bar{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$, $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $1 \le \theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)}, \tau_j < +\infty$, $1 \le p_j < q_j < +\infty$, $\max_{j=1,...,m-1} \theta_j^{(2)} < \min_{j=2,...,m} q_j$, $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j$, $j = 1, ..., m$, $0 < r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \le ... \le r_m$, $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} = ... = \frac{1}{p_\nu} - \frac{1}{q_\nu}$, $r_1(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}) < r_j(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})$ $j = \nu + 1, ..., m$. Если $\tau_j \le \theta_j^{(2)} < +\infty$, $j = 1, ..., l < \nu$, $\quad \theta_j^{(2)} < \tau_j < +\infty$, $j = l + 1, ..., m$, то

$$C_1(p, q, m, r, \theta) \cdot 2^{-n\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} \cdot n^{\sum\limits_{j=l+2}^{\nu} \left(\frac{1}{\theta_j^{(2)}} - \frac{1}{\tau_j} \right)} \le \sup_{f \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}} B} \|f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \le$$

$$\le C_2(p, q, \theta, r, m) \times 2^{-n\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} \cdot n^{\sum\limits_{j=l+1}^{\nu} \left(\frac{1}{\theta_j^{(2)}} - \frac{1}{\tau_j} \right)}.$$

[1] Blozinski A. P. //Trans. Amer. Math. Soc. — 1981. — Vol. 263