Г.А. Абдикаликова (Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан, aagulshat@mail.ru)

Корректная разрешимость краевой задачи с нелокальными условиями для системы уравнений в частных производных

Рассмотрим на $\overline{\Omega} = \{(x,t): \ t \le x \le t+\omega, \ 0 \le t \le T\}$, $T > 0$, $\omega > 0$ нелокальную краевую задачу

$$D\Big[\frac{\partial}{\partial x}u\Big] = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + P(x,t)Du + S(x,t)u + f(x,t), \quad u \in R^n, \tag{1}$$

$$B(s)\frac{\partial u}{\partial x}(s,0) + C(s)\frac{\partial u}{\partial x}(s+T,T) = d(s), \quad s \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(x,t)|_{x=t} = \Psi_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$Du|_{x=t} = \Psi_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Здесь $D = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}$; $A(x,t)$, $P(x,t)$, $S(x,t)$ – $(n \times n)$-матрицы, $f(x,t)$ – n-вектор-функция непрерывны по x и t на $\overline{\Omega}$; $B(s)$, $C(s)$ – $(n \times n)$-матрицы и n-вектор-функция $d(s)$ – непрерывны на $[0,\omega]$; на $[0,T]$ функция $\Psi_1(t)$ непрерывно дифференцируема, функция $\Psi_2(t)$ непрерывна.

Цель работы – установить коэффициентные достаточные условия корректной разрешимости задачи (1)–(4). Для исследования задачи используем метод введения функционального параметра [1]. Вводя новые неизвестные функции $v(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, $w(x,t) = Du$ исследуемую задачу сводим к эквивалентной системе гиперболических уравнений первого порядка и функциональных соотношении и методом характеристик получим краевую задачу для семейства обыкновенных дифференциальных уравнений [2]. Условием разрешимости задачи является обратимость матрицы $Q_\nu(\xi,h)$, составленной по исходным данным.

Теорема 1. Пусть при некоторых $h > 0 : Nh = T$ и ν, $\nu = 1,2,...$, $(nN \times nN)$-матрица $Q_\nu(\xi,h)$ обратима при всех $\xi \in [0,\omega]$ и выполняются
а) $\|[Q_\nu(\xi,h)]^{-1}\| \le \gamma_\nu(h)$;
б) $q_\nu(\xi,h) = \gamma_\nu(h)\max\{1, h\|C(\xi)\|\}\left[e^{\alpha(\xi)h} - \sum\limits_{j=0}^{\nu}\frac{(\alpha(\xi)h)^j}{j!}\right] \le \sigma < 1$,
где $\alpha(\xi) = \max\limits_{\tau\in[0,T]}\|\widetilde{A}(\xi,\tau)\|$, $\sigma = const$.

Тогда существует единственное решение $\widetilde{u}^\star(\xi,\tau) \in C(\overline{H}, R^n)$ краевой задачи семейства обыкновенных дифференциальных уравнений .

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда задача (1)-(4) имеет единственное решение $u^*(x,t) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$.

[1] Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т.41, №3. С.337-346.
[2] Абдикаликова Г.А. // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2007. – №10. С.162-165.