Національна академія наук України
Інститут математики

Ю.Ю.Трохимчук

ДИФЕЕРЕНЦИРОВАНИЕ, ВНУТРЕННИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И КРИТЕРИИ АНАЛИТИЧНОСТИ

Киев — 2007

УДК 517.5

Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности /Трохимчук Ю.Ю. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 300 с.

Монография посвящена исследованию дифференциальных свойств множеств и функций с применением различных теорем о продолжении внутренних отображений, из которых возникают и новые критерии аналитичности функций как одной, так и многих комплексных переменных.

Для математиков, аспмрантов и студентов старших курсов математических факультетов вузов.

Ил. 18. Библиогр.: с.

Ответственный редактор В.Я. Гутлянский

Утверждено к печати ученым советом Института математики НАН Украины

Предисловие

Дифференцирование и — внутренние отображения? Такое аналитичное, даже аналитический процес и — такое топологичное? И все же математики издавна привыкли к единству своей науки и это привычное пока держит, в свою очередь, такое единство. Помните, как вдруг в анализ "вторглись" расслоенное пространство, когомологии с коэффициентами в пучках голоморфных функций, индекс Атьи-Зингера и т.д. По-настоящему, это был момент шока типа возникновения квантовой теории в физике в свое время (1922 – 1925 гг.). Очень многие (кто смог) вынуждены были учить новые языки...

Итак, дифференцирование и топология... Такое сочетание все же не должно особенно смущать: ведь это касается далее прежде всего функции комплексного переменного $f(z)$, а связанные с ними отображения $w = f(z)$ плоских областей часто требуют чисто топологических подходов.

Здесь и предлагается (надеюсь, ранее не замеченный) подход топологии к дифференциальным свойствам. Но это — в основном относительно комплексных функций.

Но, конечно, возникли некоторые соображения и для вещественных функций многих переменных, которые также приводят к достаточно содержательным утверждениям.

Здесь можно было бы сказать, что ситуация оказалась связанной не столько с дифференциальными свойствами функций, как с этими же свойствами *множеств*, которые приводят к известным понятиям контингенции и паратингенции.

Можно выдать секрет: конечно, все начиналось с функций комплексного переменного, а в конце туннеля виделись связи с аналитическими функциями. Но в процесе исследований каждый раз выяснялась прямая связь найденных методов и с многомерными вариантами, что, как показалось, имело смысл подчеркнуть. Поняв их определенную силу в одном, стало очевидным, что многомерные утверждения могут оказаться полезными и в другом...

Многомерный случай оказался связанным с упомянутым давним понятием контингенции произвольных множеств в евклидовом пространстве и поэтому следовало более подробно остановиться особенно на их неисследованных до сих пор свойствах на подмножествах второй категории (гл II); при этом настолько, что автору хотелось озаглавить книгу такими первыми словами: "Дифференциальные свойства множеств и функций..."Но из стилистических соображений пришлось ограничить себя этаким неопределенным словом как "Дифференцирование..."

Так вот, оказывается, что в таком старом вопросе как дифференцирование можно сказать новое слово: в данном случае, например, заменив слово "производная"словом "производное число". Далее, понять, что даже такая простая замена приводит к пониманию более глубоких свойств произвольных множеств евклидовых пространств.

Конечно, во многих случаях в анализе хочется иметь дело с почти гладкими функциями, с которыми связаны чудесные формулы, из которых вытекают, как известно и чудесные следствия... Все это здесь и связано с различными критериями не только гладкости, но и аналитичности функции в области. Критерии новые и — не обычные.

Даже не упоминая классических критериев K Меньшова, которые так же приводятся здесь (но с другими доказательствами) мы даем ряд утверждений, связанных уже со "старинной" проблемой об устранимости особенностей аналитической функции. Это, если хотите, определенный апогей наших тем — их соединение.

Фактически уже K-теоремы Меньшова связаны с этой проблемой. Она формулируется следующим образом: пусть в области $D \subset \mathbb{C}$ заданы нигде не плотное замкнутое множество P и функция f, аналитическая в $D \setminus P$; при каких условиях f продолжается аналитически на всю область D?

Прежде всего, напомним, что для каждого нигде не плотного множества $P \subset D$ всегда существует функция f, аналитическая в $D \setminus P$, для которой каждая точка из P является особой, т. е. ни в какой окрестности ее функция f не является уже аналитической.

Конечно, как и в случае изолированной особой точки, хотелось бы и здесь получить необходимые и достаточные условия устранимости P как особого множества для f.

Но и, конечно же, сходу появились простые (и красивые) достаточные условия на основе не очень сложных понятий типа длины множества (Пенлевэ), которые способствовали определенному оптимизму у математиков. К сожалению, только сейчас (через сто лет!)

полный критерий найден для случая нульмерного P и ограниченной f [1], хотя, как и ожидалось, проверить такой критерий на практике не очень легко: один подсчет так называемой кривизны P представляет трудности.

Известно, что все совершенные нульмернве компактны гомеоморфны канторову совершенному множеству P_0 и каждый плоский такой компакт можно представить как каким-то образом сверху рассыпанное на плоскости это самое канторово множество. Уже из результатов Пенлевэ следовало, что, так сказать, тождественное вложение канторова множества в плоскость не влияет на ограниченную аналитическую функцию: она его "стирает". Значит, проблема возникает из-за других вложений... Вот и надо было вмешаться в определенную *геометрию* этого вложения.

Сначала казалось, что это касается внешней, простой геометрии, например, в виде прямых произведений нульмерных компактов $P_1 \times P_2$, или чего-то в этом роде, но уже быстро последовавший пример $P_0 \times P_0$ (Голубев [ ]) показал, что примитивизму здесь не место. Грубо говоря, здесь оказалось необходимым учитывать не только приближения первого порядка к точкам особого множества, но и второго: та самая кривизна.

Дьедоннэ, как известно, в свое время провозгласил (по выражению одного из известных математиков) "кровожадный"лозунг: "Долой треугольники"! Это — из изложения в школе, высшей школе и т. д. Он же — Дьедоннэ, — один из ведущих представителей в свое время знаменитой школы-семинара Николая Бурбаки, высказал другой роковой приговор: теория функций выпала из бурного потока развития современной математики (конечно, имеется в виду — в отличие от ее роли в XIX веке).

В связи с этим хотелось бы сказать, что Дьедоннэ не сумел оценить мудрое высказывание одного из классиков нашей науки — Ф. Клейна: "... Если вам кто-нибуть скажет, что в некотором месте прекращается математическое понимание, то будьте уверены, что там как раз должна найтись наиболее интересная постановка вопроса".

Возвращаясь к проблеме стираемости особенностей, нужно сказать, что попытки дать простые, более наглядные, критерии никогда не прекращались. Например, возник вопрос: устраним ли при непрерывном продолжении нульмерный компакт, расположенный на графике однозначной непрерывной функции $y = \psi(x)$? Отрицательный ответ был дан построением функции с подобным особым множеством, осуществляющей даже гомеоморфизм всей плоскости на себя [ ].

Наконец, вспомним о дифференциальных свойствах функции f. Так, если обычное непрерывное продолжение на P не обеспечивает ее аналитичность, то может ли более сильное липшицево условие быть достаточным для устранимости P? В случае $\mathrm{Mes}P = 0$ этот вопрос решается тривиально и положительно. В случае же $\mathrm{Mes}P > 0$ ответ отрицательный (!), несмотря на то, что f почти всюду (и ограниченно) дифференциируемо — в вещественном смысле — на множестве особенностей!

И все же определенный (и, конечно, нетривиальный) критерий устранимости здесь можно сформулировать (гл. XIV). Приведем лишь частный случай соответствующий общей теоремы: пусть f непрерывна в области D и $P \subset D$ — нульмерное замкнутое множество, такое, что f в $D \setminus P$ аналитична; если в каждой точке P существует конечная частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$, то f аналитична всюду в D.

Подчеркнем, что известные до сих пор критерии, касающиеся, например, множеств положительной меры (а P у нас произвольно), обязательно, в прямой или завуалированной форме, были связаны с требованием выполнения условий Коши-Римана почти всюду. Ничего подобного в сформулированном критерии нет: критерий таков, что условия Коши-Римана (или подобные им) нельзя и ввести — требуется существование производной лишь вдоль одной прямой. Конечно, новый критерий потребовал и принципиально нового подхода к нему; таким подходом в конечном счете явились некоторые теоремы о продолжении внутренних отображений. Изложение этих теорем и дано во второй части монографии.

Одни из главных объектов изучения в этой книге — внутренние отображения с особенностями — проявляют все свои основные свойства подобных им функций одного пременного, поэтому в главе V мы подробно останавливаемся на таких функциях.

Основной топологический апарат наших дальнейших исследований — степень отображения и продолжения внутренних отображений — разрабатывается в гл. IX и X.

Глава XI фактически посвящена приложению наших теорем о внутренних отображениях к исследованию дифференциальных свойств комплексных функций. в частности доказывается теорема о том, что если граничные значения аналитической функции удовлетворяют условию Липшица, то этому же условию функция удовлетворяет во всей замкнутой области — и с той же липшицевой константой! В дальнейшем особенно существенно применяется локальный вариант этой теоремы.

В главе XII приводятся давно ожидаемые решения проблем Данжуа — решения, о которых он и предполагал.

Обобщения теорем Дзядыка и Радо даны в главе XIII (вместе с другими критериями аналитичности).

Наконец, в главе XIV доказывается ряд теорем о стираемости особенностей, в том числе и основная теорема, частный случай которой привели выше.

В добавлении на многомерный случай переносятся основные утверждения глав VIII и IX.

Часть 1

Дифференциальные свойства действительных и комплексных функций

Глава 1

"Дискретные" теоремы

1. Производные числа

Пусть $f(x)$ — конечная функция на интервале (a, b). Скажем, что d, $-\infty \leq d \leq +\infty$, есть производное число функции $f(x)$ в точке $x \in (a, b)$, если существует последовательность $h_k \to 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, такая, что $\frac{f(x+h_k)-f(x)}{h_k} \to d$. При этом, если $h_k > 0$, говорим о правом производном числе, и если $h_k < 0$, — о левом.

Конечно, всегда существует наименьшее и наибольшее правое (левое) производные числа, обозначающиеся соответственно как $\underline{f}^+(x)$ и $\bar{f}^+(x)$ (для левого $\underline{f}^-(x)$ и $\bar{f}^-(x)$), и которые часто называют производными числами Дини в точке . Если $\underline{f}^+ = \bar{f}^+ = f^+$ $(\underline{f}^- = \bar{f}^- = f^-)$, то это общее значение назовем правой (левой) *производной* функции $f(x)$ в точке x; наконец, если все производные числа Дини совпадают, то это, очевидно, означает существование обычной (конечной или бесконечной) *производной*.

Известны характеристики множеств всех производных чисел в каждой точке $x \in (a, b)$, например, для точек полной меры на (a, b): эти множества либо содержат все числа, включая $\pm\infty$, либо одно-единственное конечное число (т. е. функция дифференцируема) [1]; при этом лишь на множестве меры нуль может существовать правая (левая) производная, равная $+\infty$ или $-\infty$. Отсюда следует такое предложение:

Т е о р е м а 1. *Для произвольной конечной функции $f(x)$ почти в каждой точке $x \in (a, b)$ существует конечное правое (левое) производное число $d(x)$.*

Докажем сначала такое утверждение:

Т е о р е м а 2. *Пусть непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ имеет в каждой точке полуинтервала $[a, b)$ правое производное число, равное нулю. Тогда $f \equiv \mathrm{const}$ на $[a, b]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $b_1, a < b_1 < b$ — произвольно; докажем, что $f(b_1) = f(a)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$; из условия теоремы следует, что найдется точка $\tilde{x} > a$ — и сколь угодно близкая к a, для которой

$$|f(\tilde{x}) - f(a)| \leq \varepsilon(\tilde{x} - a). \tag{1}$$

Для всех таких точек $\tilde{x}$ на $[a, b_1]$ рассмотрим $x' = \sup \tilde{x}$. В силу непрерывности f из (1) следует, что

$$|f(x') - f(a)| \leq \varepsilon(x' - a).$$

Если бы было: $x' < b_1$, то снова справа от x' мы, в силу условия теоремы, нашли бы точку $\tilde{\tilde{x}}$, для которой было бы: $|f(\tilde{\tilde{x}}) - f(x')| \leq \varepsilon(\tilde{\tilde{x}} - x')$ и, следовательно, $|f(\tilde{\tilde{x}}) - f(a)| \leq \varepsilon(\tilde{\tilde{x}} - a)$, т. е. неравенство (1) для $\tilde{\tilde{x}} \in [a, b_1]$ и $\tilde{\tilde{x}} > x' = \sup \tilde{x}$: противоречие. Поэтому $x' = b_1$ и мы имеем:

$$|f(b_1) - f(a)| \leq \varepsilon(b_1 - a).$$

Из произвольности ε следует, что $f(b_1) = f(a)$. А из произвольности $b_1 < b$ и непрерывности f получим утверждение теоремы.

А теперь мы докажем более общее утверждение.

Т е о р е м а 3. *Пусть непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ обладает в каждой точке полуинтервала $[a, b)$, исключая не более чем счеттное их множество, правым производным числом $d(x)$, совокупность которых ограничена сверху (снизу) числом $L : d(x) \leq L$ $[d(x) \geq L]$. Тогда $f(x)$ удовлетворяет на $[a, b]$ неравенству*

$$f(x_2) - f(x_1) \leq L(x_2 - x_1), x_1 < x_2$$

(соответственно, неравенству $f(x_2) - f(x_1) \geq L(x_2 - x_1)$, $x_1 < x_2$).

Д о к а з а т е л ь с т в о достаточно провести для случая $L \geq 0$: случай $L \leq 0$ сводится к этому изменением знака у функции $f(x)$.

Итак, пусть $d(x) \leq L$, $L \geq 0$, исключая не более чем счетное множество $H \subset [a, b)$. Возьмем произвольные точки: $x_1 \in [a, b) \setminus H$ и $x_2 \in [a, b), x_1 < x_2$; достаточно доказать неравенство $f(x_2) - f(x_1) \leq L(x_2 - x_1)$, чтобы вывести теорему: ведь выбираемые точки x всюду плотны на $[a, b)$ и $f(x)$ — непрерывна.

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ произвольно. Так как $d(x_1) \leq L$, то найдется $\tilde{x} > x_1$, такое, что

$$f(\tilde{x}) - f(x_1) \leq (L + 2\varepsilon_0)(\tilde{x} - x_1) \tag{2}$$

Обозначим через $x'' \leq x_2$ точную верхнюю грань множества всех $\tilde{x}$, для которых справедливо неравенство (2): из непрерывности f следует, что (2) имеет место и для x''. Покажем, что $x'' = x_2$.

Предположим, что $x'' < x_2$. Обозначим через x' точную верхнюю грань точек $\overline{x} > x_1$, для которых имеем: $f(\overline{x})-f(x_1) \leq (L+\varepsilon_0)(\overline{x}-x_1)$. Тогда, легко видеть, что $x_1 < x' < x'' < x_2$.

Рассмотрим график $B(f)$ функции $y = f(x)$ на плоскости xOy и обозначим через $\Omega(\varepsilon)$ угол с вершиной в точке $(x_1, f(x_1))$, сторонами которого являются: нижний вертикальный луч, выходящий из этой точки, и луч с угловым коэффициентом $L + \varepsilon$ (Рис. 1).

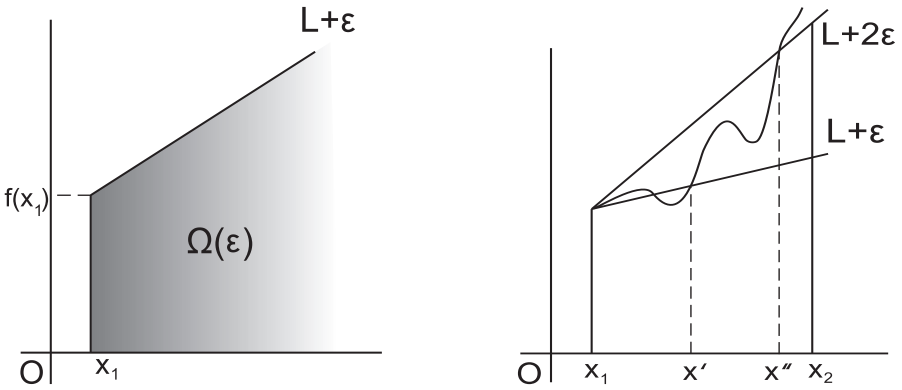

Рис. 1

Из предыдущего следует, что часть графика $B(f)$, расположенная правее точки x' (точки x''), всегда лежит выше угла $\Omega(\varepsilon_0)$ (соответственно $\Omega(2\varepsilon_0)$). Возьмем для любого $\varepsilon, \varepsilon_0 < \varepsilon < 2\varepsilon_0$, точную верхнюю грань $x(\varepsilon)$ точек x, для которых $f(x) - f(x_1) \leq (L + \varepsilon)(x - x_1)$; иначе: абсциссу последней точки пересечения графика $B(f)$ с прямой $y - f(x_1) = (L + \varepsilon)(x - x_1)$.

Легко видеть, что $x(\varepsilon)$ — строго возрастающая функция от $\varepsilon \in [\varepsilon_0, 2\varepsilon_0]$ и, следовательно, множество ее значений имеет мощность континуума. Поэтому для некоторого ε точка $x(\varepsilon) \in [x_1, x_2] \setminus H$. Но вся часть графика $B(f)$, расположенная правее точки $x(\varepsilon)$, лежит выше угла $\Omega(\varepsilon)$, а поэтому все правые производные числа $f(x)$ в этой точке не меньше $L + \varepsilon$, что противоречит условию теоремы.

Итак, для произвольного $\varepsilon_0 > 0$ и произвольных $x_1 \notin H, x_2 \in [a, b), x_1 < x_2$, имеем:

$$f(x_2) - f(x_1) \leq (L + 2\varepsilon_0)(x_2 - x_1);$$

устремляя ε_0 к нулю, завершим доказательство.

В случае $d(x) \geq L$ рассуждаем, как и прежде, внося лишь следующие изменения:

1) строго возрастающая функция $x(\varepsilon), \varepsilon \in [\varepsilon_0, 2\varepsilon_0]$, возникает, как точная верхняя грань точек x, для которых $f(x)-f(x_1) \geq (L-\varepsilon)(x-x_1)$;

2) вместо угла $\Omega(\varepsilon)$ рассматриваем угол $\Omega'(\varepsilon)$, сторонами которого являются верхний вертикальный луч, выходящий из точки $(x_1, f(x_1))$, и луч с угловым коэфициентом $L-\varepsilon$; при этом часть графика $B(f)$, расположенная правее точки $x(\varepsilon)$, вся лежит ниже угла $\Omega'(\varepsilon)$.

Доказательство очевидным образом завершается, как и выше.

С л е д с т в и е 1. *Если в условиях теоремы 3 производные числа $d(x)$ ограничены по модулю: $|d(x)| \leq L$, то $f(x)$ удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица:*

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|.$$

С л е д с т в и е 2. *Если непрерывная функция $f(x), x \in [a, b)$, обладает в каждой точке, исключая не более чем счетное их множество, неотрицательным (неположительным) правым производным числом, то $f(x)$ — неубывающая (невозрастающая) функция на $[a, b)$.*

Заметим, что в условиях теоремы 3 функция $f(x)$ оказывается с ограниченной вариацией: ведь из следствия 2 вытекает, что функция $\varphi(x) = f(x) - Lx$ убывает (возрастает).

С л е д с т в и е 3. *Если непрерывная функция $f(x), x \in [a, b]$, обладает в каждой точке, исключая не более чем счетное их множество, нулевым правым производным числом, то $f(x)$ есть постоянная на $[a, b]$.*

Конечно, все доказанное справедливо, если везде заменить правые производные числа на левые; подчеркнем лишь, что здесь важным является то, что все производные числа мы каждый раз берем с одной и той же стороны. Важность этого замечания показывает приводимый ниже пример нигде не дифференцируемой непрерывной функции, в каждой точке обладающей любыми производными числами (в том числе и нулевыми, но с разных сторон!).

Усилим несколько утверждение теоремы 3; тогда, естественно, изменяется и формулировка приведенных выше ее следствий. Так как они возникают автоматически, то этих изменений приводить не будем.

Для этого введем еще одно понятие.

Скажем, что функция $f(x), x \in [a,b]$, обладает свойством $N_+^{-\infty}$ ($N_+^{+\infty}, N_+^{\infty}$), если образ множества тех точек $[a,b]$, где правая производная $f^+ = -\infty$ ($f^+ = +\infty$ или $f^+ = \infty$), имеет на оси Oy меру нуль.

Аналогично определяют свойства N_-.

В процессе дальнейшего доказательства мы воспользуемся следующей легко доказываемой леммой:

Л е м м а. *Пусть на некотором множестве $e \subset \mathbb{R}^1$ задана функция $f(x)$ с ограниченной вариацией. Если проекции графика $B(f)$ на оси координат имеют меру нуль, то и длина этого графика (т. е. его хаусдорфова 1-мера) также равна нулю.*

Обобщение теоремы 3 выглядит следующим образом.

Т е о р е м а 4. *Пусть непрерывная функция $f(x), x \in [a,b]$, обладает свойством $N_+^{+\infty}(N_+^{-\infty})$ и пусть $P = \{x : f^+ = +\infty\}$ $(P = \{x : f^+ = -\infty\})$. Если в каждой точке дополнения cP существует конечное правое производное число $d(x)$, такое, что почти всюду (на cP) совокупность их ограничена сверху (снизу) числом $L : d(x) \le L$ $(d(x) \ge L)$, то $f(x)$ на $[a,b]$ удовлетворяет неравенству*

$$f(x_2) - f(x_1) \le L(x_2 - x_1), \quad x_1 < x_2$$

(соответственно $f(x_2) - f(x_1) \ge L(x_2 - x_1)$, $x_1 < x_2$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в доказательстве теоремы 3, достаточно рассмотреть случай $L \ge 0$. Повторим его до возникновения строго возрастающей функции $x(\varepsilon), \varepsilon_0 \le \varepsilon \le 2\varepsilon_0$. Покажем, что значения $x(\varepsilon)$ на оси x-ов образуют множество $\mathcal{E}$ положительной меры ($\mathcal{E}$ измеримо как образ отрезка $[\varepsilon_0, 2\varepsilon_0]$ для B-измеримой функции $x(\varepsilon)$).

Пусть это не так и $\mathrm{mes}\mathcal{E} = 0$; тогда известно, что $x'(\varepsilon) = 0$ почти всюду на отрезке $[\varepsilon_0, 2\varepsilon_0]$.

Легко показать, что производная $x'(\varepsilon)$ связана с угловым коэффициентом λ соответствующей полукасательной к графику $B(f)$ равенством

$$\lambda = (L+\varepsilon) + \frac{x(\varepsilon) - x_1}{x'(\varepsilon)}. \tag{3}$$

Возьмем точку $x(\overline{\varepsilon}) \in \mathcal{E}$, для которой $x'(\overline{\varepsilon}) = 0$. Из (3) следует, что график $B(f)$ имеет в соответствующей точке вертикальную касательную и из геометрического смысла функции $x(\overline{\varepsilon})$ следует, что $f^+(x(\overline{\varepsilon})) = +\infty$.

Но $f(x(\varepsilon))$ также строго возрастает: тоже из геометрических соображений. Поэтому из свойства $N_+^{+\infty}$ и из леммы следует, что точки графика функции (это — часть $B(f)$), в которых $x'(\varepsilon) = 0$, образуют множество A длины нуль на плоскости. Но тогда радиальная проекция A на отрезок $[L + \varepsilon_0, L + 2\varepsilon_0]$ определенной вертикали должна иметь меру нуль, а в то же время она, по предыдущему, полной меры на этом отрезке.

Полученное противоречие показывает, что должно быть:
mes$\mathcal{E} > 0$.

Множество точек из cP, где не выполнено неравенсиво $d(x) \leq L$, имеет меру нуль (по условию), а так как mes$P = 0$ (см. замечание перед теоремой 1), то найдется точка $x_0 = x(\varepsilon') \in \mathcal{E}$, в которой выполняется неравенство

$$f(x_0) - f(x_1) \leq (L + \varepsilon')(x_0 - x_1)$$

и существует $d(x_0) \leq L$. Но вся часть графика $B(f)$, расположенная правее точки $x_0 = x(\varepsilon')$, лежит выше угла $\Omega(\varepsilon')$, а потому все правые производные числа $f(x)$ в этой точке не меньше $L + \varepsilon'$, что также противоречиво.

Доказательство завершается так же, как и в теореме 3.

Подобные же изменения, внесенные в ее доказательство для случая $d(x) \geq L$, и приведут нас полностью к нужному утверждению.

2. Структурные теоремы.

Приведем здесь некоторые критерии принадлежности непрерывных функций к определенным класам "гладкости", но не в терминах обычных производных, а в терминах отдельных производных чисел. В сущности, уже доказанные выше утверждения — такого же типа.

Т е о р е м а 5. *Если в каждой точке $x \in [a, b)$ непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ обладает таким правым производным числом $d(x)$, что функция $d(x)$ оказывается также непрерывной и непрерывно продолжается на весь отрезок $[a, b]$, то $f(x) \in C^1$ (и тогда $d(x) = f'(x)$ всюду).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольный отрезок $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

В силу ограниченности $d(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, функция $f(x) \in Lip$ (см. следствие 1); поэтому почти всюду $d(x) = f'(x)$ и $f(x) - f(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{x} f'(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{x} d(t)dt$. Из непрерывности $d(x)$ и следует теорема.

Т е о р е м а 6. *Если в каждой точке $x \in [a,b)$ непрерывная функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ обладает таким конечным правым производным числом $d(x)$, что функция $d(x)$ оказывается локально суммируемой, то f — AC-функция (т.е. абсолютно непрерывная).*

З а м е ч а н и е. Вообще говоря, $d(x)$ — неизмеримая функция, здесь мы предполагаем суммируемость некоторой (измеримой) мажоранты $g(x) \ge 0$: $|d(x)| \le g(x)$ почти всюду; полагая на оставшемся множестве меры нуль $g(x) = +\infty$, получим уже неравенство всюду.

Предположим еще все же, что множества $d(x) > 0$ и $d(x) < 0$ измеримы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим некоторую функцию $\delta(x)$ следующим образом:
если $d(x) = 0$, то и $\delta(x) = 0$;
если $d(x) > 0$, то $\delta(x) = \inf\{g(x), \overline{f}^+(x)\}$ (оба значения $\ge d(x)$);
если $d(x) < 0$, то $\delta(x) = \sup\{\underline{f}^+(x), -g(x)\}$.
Отсюда $|\delta(x)| \le g(x)$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \delta(x) & \text{при} \quad \delta(x) \le n \\ n & \text{при} \quad \delta(x) > n. \end{cases}$$

Тогда $|\varphi_n| \le |\delta(x)|$. Возьмем разность $r_n(x) = f(x) - \int\limits_a^x \varphi_n(t)\,dt$. Так как $\delta(x)$ есть одно из производных чисел f в точке x, то почти всюду на $[a,b]$ существует производное число $d[r_n(x)] \ge 0$. Так как $\varphi_n \le n$, то $\frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} \varphi_n(t)\,dt \le n$ и

$$\frac{r_n(x+h_k) - r_n(x)}{h_k} \ge \frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} - n.$$

Берем такую последовательность $h_k \to 0$, для которой возникает конечное производное число функции $f(x)$. Другими словами, $r_n(x)$ не имеет правых производных, равных $-\infty$ (а это влечет $N_+^{-\infty}$) и удовлетворяет всем условиям теоремы 4 (при $L = 0$). Это означает, что $r_n(x)$ — возрастающая функция на $[a,b]$.

Зафиксируем $x \in [a,b)$; тогда $r_n(x) \geq r_n(a)$, т.е. $f(x) - f(a) \geq \int\limits_a^x \varphi_n(t)\,dt$; но $\varphi_n(t) \to \delta(t)$ всюду и φ_n имеют суммируемую мажоранту $g(t)$. Поэтому, переходя к пределу, получим:

$$f(x) - f(a) \geq \int\limits_a^x \delta(t)\,dt.$$

Рассмотрим теперь функцию — $f(x)$ и последовательность

$$\psi_n(x) = \begin{cases} -\delta(x) & \text{при} \quad -\delta(x) \leq n \\ n & \text{при} \quad -\delta(x) > n. \end{cases}$$

Возьмем разность $\rho_n(x) = -f(x) - \int\limits_a^x \psi_n(t)\,dt$; снова почти всюду на $[a,b]$ существует производное число $d\rho_n \geq 0$. Т.к. $\psi_n \leq n$, то $\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} \psi_n(t)\,dt \leq n$ и

$$\frac{\rho_n(x+h_k) - \rho_n(x)}{h_k} \geq -\frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} - n.$$

Это снова дает $N_+^{-\infty}$ для $\rho_n(x)$ и возрастание.

Все это и приводит к противоположному неравенству $f(x) - - f(a) \leq \int\limits_a^x \delta(t)\,dt$.

Это и означает абсолютную непрерывность функции f и равенство $f'(x) = d(x)$ почти всюду.

Для случая функций многих переменных мы приведем одну из "дискретных"теорем подобного рода.

Пусть $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ — непрерывная функция в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и l — некоторый луч, выходящий из точки $x \in D$. Скажем, что d, $-\infty \leq d \leq +\infty$, — производное число функции $f(x)$ в точке x по направлению l, если существует последовательность точек $x_k \in D$ $(k = 1, 2, \dots)$, таких, что:

1) $x_k \to x$, 2) $\overrightarrow{xx_k} \to l$, т.е. l является предельным положением лучей $\overrightarrow{xx_k}$ и 3) $\frac{f(x_k) - f(x)}{|x_k - x|} \to d$.

Далее, рассмотрим определенный репер $r(x)$ в точке x, т.е. совокупность n линейно независимых лучей $l_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, выходящих из этой точки. Совокупность $d(x) = d_i(x)$ некоторых производных чисел $d_i(x)$ функции $f(x)$ по всем направлениям $l_i(x)$ в точке x естественно назвать производными числами вдоль репера $r(x)$; это понятие — очевидный аналог одностороннего производного числа для случая функции одного переменного. Наконец, скажем, что семейство реперов $\{r(x)\}$, $x \in D$, образует постоянное поле, если каждый из них получается параллельным переносом любого другого.

Докажем теорему:

Т е о р е м а 7. *Пусть в выпуклой области $D \subset \mathbb{R}^n$ заданы непрерывная функция $f(x)$ и некоторое постоянное поле реперов $\{r_n(x)\}$. Если в каждой точке $x \in D$ функция f обладает ограниченными производными числами $d(x) = \{d_i(x)\}$ вдоль репера $r(x)$:*

$$|d_i(x)| \leq L \qquad (i = 1, \dots, n),$$

то $f(x)$ удовлетворяет в D условию Липшица:

$$|f(x') - f(x)| \leq K|x' - x|; \qquad x', x \in D.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем какой-либо из реперов $r(x)$ в качестве базы новой системы координат и покажем, что вдоль каждой координатной прямой $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L.

Берем одну из таких прямых l и на ней — произвольные точки x_1, x_2, принадлежащие (напомним: выпуклой) области D; пусть направление вектора $\overrightarrow{x_1x_2}$ совпадает с положительным направлением на соответствующей оси координат.

Пусть ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{l^2+\sqrt{L^2+4}}$, — произвольно; обозначим через $Q(x,\varepsilon) \equiv Q(x)$ конус с вершиной x из отрезка $[x_1, x_2]$ прямой l с осью, направленной в положительную сторону l, и углом между осью и образующей, равным ε. Производное число $d_i(x)$ вдоль l кратко запишем $d(x)$.

Так как $|d(x_1)| \leq L$, то найдется такое $\tilde{x} \in Q(x_1, \varepsilon)$, что

$$|f(\tilde{x}) - f(x_1)| \leq (L + 2\varepsilon)|\tilde{x} - x_1| \tag{4}$$

Пусть R — точная верхняя грань множества всех чисел $|\tilde{X} - x_1|$ для точек конуса $Q(x_1, \varepsilon)$ с высотой $|x_2 - x_1|$, для которых справедливо неравенство 4; из непрерывности f следует, что на части сферы $S(x_1)$ радиуса R, лежащей внутри конуса $Q(x_1, \varepsilon)$, <u>найдется точка</u>, для которой это неравенство также имеет место.

Покажем, что $R = |x_2 - x_1|$. Предположим, что $R < |x_2 - x_1|$; снова обозначим через $\overline{x}$ точку конуса $Q(x_1, \varepsilon)$, для которой $|\overline{x} - x_1| = R$ и выполнено неравенство (4). Через $\overline{x}$ проведем луч, параллельный l, и в конусе $Q(\overline{x}, \varepsilon) \subset Q(x_1, \varepsilon)$ возьмем произвольную точку x', для которой

$$|f(x') - f(\overline{x})| \le (L+\varepsilon)|x' - \overline{x}|. \tag{5}$$

Угол между векторами $\overrightarrow{x_1\overline{x}}$ и $\overrightarrow{\overline{x}x'}$ не превышает 2ε; легко проверить, что если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{a}+\overline{b}$ образуют треугольник с наибольшей стороной $|\overline{a}+\overline{b}|$, то $|\overline{a}+\overline{b}| \ge |\overline{a}| + |\overline{a}|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$. Для треугольника $x_1\overline{x}x'$ это дает

$$|x' - x_1| \ge |\overline{x} - x_1| + |x' - \overline{x}|\cos 2\varepsilon > R. \tag{6}$$

Складывая неравенства (4), (5), получаем

$$|f(x') - f(x_1)| \le (L+2\varepsilon)(|\overline{x} - x_1| + |x' - \overline{x}|\frac{L+\varepsilon}{L+2\varepsilon}).$$

Но при $\varepsilon < \frac{1}{L+\sqrt{L^2+4}}$

$$\cos 2\varepsilon \ge 1 - 2\varepsilon^2 \ge \frac{L+\varepsilon}{L+2\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{L+2\varepsilon},$$

а это вместе с (6) дает

$$|f(x') - f(x_1)| \le (L+2\varepsilon)|x' - x_1|,$$

что противоречит определению R в связи с (6).

Устремляя ε к нулю, мы получим точки $\overline{x}$, стремящиеся к точке x_2 на луче l.

Тем самым мы докажем, что условие Липшица с константой L имеет место на каждой координатной прямой. Но отсюда уже следует условие Липшица и в целом в области D (например с константой nL).

Приведенные в этом наброске утверждения, которые в классическом анализе требуют от функции существования призводных, убеждают, что эти же утверждения справедливы при гораздо меньших ограничениях: ведь, например, производные могут не существовать, а производные числа (конечные или бесконечные) <u>всегда</u> существуют. Конечно, не следует уж слишком переоценивать здесь наши достижения: они не всегда являются обобщениями "классики". Например (классика): если f дифференцируема и $f' = 0$ всюду, то $f \equiv \mathrm{const}$. И (у нас): если f непрерывна и в каждой точке существует нулевое правое призводное число, то $f \equiv \mathrm{const}$; все-таки мы должны требовать <u>дополнительно</u> непрерывность f (чего не нужно делать в "классике").

Мы познакомились с некоторыми небезынтересными теоремами, которые формулируются в терминах отдельных производных чисел. И все же — даже для случая функций одного переменного — для многих целей анализа оказывается необходимым рассмотрение множества всех производных чисел и в каждой точке области задания функции.

Это же потребует от нас более углубленного проникновения в дифференциальные свойства множеств в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (у нас — в основном $n = 2, 3$). К этому мы и перейдем в следующих главах.

Глава 2

Контингенции множеств

1. Множества первой и второй категории

Пусть X — произвольное несчетное множество. Назовем пренебрежимым любое его не более чем счетное подмножество A. Тогда дополнение $X \setminus A$ к такому A можно было бы назвать доминирующим множеством, как бы заменяя собой понятие "подавляющего" большинства точек в X. Уж во всяком случае те же доминирующие множества обладают важным свойством: пересечение любой их счетной совокупности есть снова доминирующее множество.

Это последнее свойство оказывается определяющим в применении различных понятий о доминировании.

Возьмем, например, вероятностное пространство Ω, на котором распределена мера μ и $\mu(\Omega) = 1$. Пренебрежимыми подмножествами здесь, конечно же, являются множества меры нуль и основное свойство доминирующих множеств, т.е. множеств полной меры, безусловно имеет место: счетное пересечение множеств полной меры есть множество полной меры.

Здесь мы взяли за основу определение понятия "подавляющего" большинства точек — мощность и меру.

Оказывается, есть еще одна важная основа.

Пусть R — произвольное хаусдорфово топологическое пространство. Скажем, что множество $A \subset R$ нигде не плотно в R, если каждое открытое множество $\mathcal{G} \subset R$ содержит другое открытое подмножество $\mathcal{G}'$, не содержащее точек A (т.е. в любом $\mathcal{G}$ есть "дыры" — относительно A). Назовем множество $\tilde{A}$ — первой категории в R, если оно является объединением счетной совокупности нигде не плотных множеств:

$$\tilde{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{1}$$

Эти множества первой категории мы и хотим назвать пренебрежимыми в R. Но в общем случае, оказывается, они не так уж и пренебрежимы: например множество рациональных точек просто совпадает с такой суммой (1).

Но если R — не просто топологическое пространство, а, например, метрическое и полное, то все станет на свои места.

В этом убеждает следующее главное для нас утверждение, принадлежащее Бэру [1]:

Т е о р е м а 1. *Пусть R —метрическое и полное пространство и $\{\mathcal{G}_n\}$ — последовательность открытых и плотных в R множеств. Тогда $\bigcap\limits_n \mathcal{G}_n$ также плотно в R*

Это следует из того, что если $A = \bigcup\limits_n A_n$ и A_n — нигде не плотны, то и замыкания их $\overline{A}_n$ также нигде не плотны и

$$A \subset \bigcup_n \overline{A}_n.$$

В полном пространстве R назовем множество B резидуальным (или остаточным — в буквальном переводе и — как говорили раньше), если его дополнение — первой категории; имеем

$$B = R \setminus A \supset R \setminus \bigcup_n \overline{A}_n = \bigcap_n (R \setminus \overline{A}_n).$$

Так как $R \setminus \overline{A}_n$ — открытое и плотное в R, то B содержит плотное в R множество типа G_δ (в частности, никогда не пусто). Легко обратить этот вывод и мы получим окончательно:

Для того, чтобы множество в R было резидуальным, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало плотное G_δ.

Это, плюс следствие из теоремы, позволяют нам рассматривать резидуальные множества, как новый класс доминирующих множеств: пересечение счетной их совокупности также резидуально (и плотно в R).

Рассмотрим некоторые примеры для случая, когда $R = \mathbb{R}$, т.е. прямая.

1. Множество Q рациональных точек:

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

очевидно представляет счетное объединение нигде не плотных подмножеств (отдельных точек) и, следовательно, первой категории на

$\mathbb{R}^1$. Значит, дополнение к нему, т.е. множество иррациональных точек, образует резидуальное множество.

Вообще, резидуальное множество в $\mathbb{R}^1$ не может быть счетным, так как вместе с дополнением — что давало бы всю прямую $\mathbb{R}^1$ — было бы первой категории, чего, по теореме, не может быть. Так как такое множество содержит плотное $\mathcal{G}_\delta$, которое по тем же соображениям не может быть счетным, то по известной теореме оно всегда мощности континуума.

2. Возьмем последовательность $\varepsilon_k \to 0$ и рассмотрим снова множество Q рациональных точек

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

Построим последовательность открытых плотных на $\mathbb{R}^1$ множеств $\{\mathcal{G}_k\}$ следующим образом: каждую точку r_n заключим в интервал $(r_n - \frac{\varepsilon_k}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon_k}{2^{n+1}})$, а объединение этих интервалов и возьмем в качестве $\mathcal{G}_k$. По теореме пересечение $\bigcup_k \mathcal{G}_k$ есть резидуальное множество на прямой, линейной меры нуль и тем не менее не представимое в виде объединения счетной совокупности нигде не плотных множеств. Зато дополнение к нему — полной меры, но первой категории.

Сначала несколько уточним терминологию. Если вернуться, скажем, к приведенному выше примеру вероятностного пространства, то множества полной меры — единица, — конечно, пренебрежимыми не будут, но и множества положительной промежуточной меры (между 0 и 1) тоже не пренебрежимы, хотя и доминирующими не являются.

Подобное происходит и с понятием категории. Выше мы определили множества первой категории в пространстве R как объединения нигде не плотных в R множеств. Так вот, точное отрицание такой возможности приводит нас к следующему определению:

Если множество $\mathcal{E} \subset R$ нельзя представить в виде объединения нигде не плотных в R множеств, то скажем, что оно *второй категории* в R.

Например, любое открытое множество в R представляет подобное множество.

Еще одно. Если на прямой $\mathbb{R}^1$ взять канторово совершенное множество P_0, то — как нигде не плотное подмножество $\mathbb{R}^1$ — оно первой категории на прямой. Но само по себе оно есть компакт и, следовательно, полное пространство, в котором можно говорить об открытых подмножествах, нигде не плотных, первой и второй категории и т.д.

Поэтому иногда следует различать понятия: быть первой или второй категории в R или "в себе". Например, множество рациональных точек в $\mathbb{R}^1$ — первой категории даже в себе и, уж тем более, в $\mathbb{R}^1$.

О связи наших терминов; если множество $\mathcal{E} \subset R$ резидуально, то говорим иначе: оно — всюду второй категории, т.е. второй категории в каждой своей открытой порции в R.

Оказывается, что каждое подмножество типа $\mathcal{G}_\delta$ (например, замкнутое или открытое) — всюду второй категории в себе. Это можно доказать и непосредственно, но также из известного факта, что каждое $\mathcal{G}_\delta$-множество гомеоморфно полному пространству; так как понятие категории — чисто топологическое, поэтому все, что мы выше доказали для полных пространств, переносится и на их гомеоморфы.

Выше мы построили резидуальное множество на прямой $\mathbb{R}^1$ длины нуль, т.е. хаусдорфовой 1-меры нуль (на прямой она совпадает с лебеговой). Но точно так же мы можем построить в любом эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ $n = 1, 2, \dots$ (и в любом его $\mathcal{G}_\delta$-множестве) подобное множество и тоже хаусдорфовой 1-меры нуль. Казалось бы — какая польза от таких жидких множеств (с точки зрения меры), несмотря на то, что мы доказали их *какую-то* доминантность... Мы убедимся в том, что этим множествам не нужна никакая мера, они берут своим *качеством.*

3. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$, которая на некотором множестве $\mathcal{E}$ второй категории (может быть, и меры нуль) обладает конечной призводной. Тогда найдется отрезок $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, на котором $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, дифференцируема на нем почти всюду.

Сначала докажем, что множество вида

$$e = \left\{ x \in [a, b] : \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \le n, \quad 0 < |h| < \frac{1}{m} \right\}$$

является замкнутым.

В самом деле, пусть $x_k \in e$ и $x_k \to x_0 \in [a, b]$ $k = 1, 2, \dots$. Возьмем в $\frac{1}{m}$-окрестности точки x_0 произвольную точку x'. Начиная с некоторой k она попадет в $\frac{1}{m}$-окрестность любой точки x_k, а потому (для этих k)

$$\left| \frac{f(x') - f(x_k)}{x' - x_k} \right| \le n \qquad (x' \ne x_k).$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $k \to \infty$, в силу непрерывности $f(x)$ получим:

$$\left| \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} \right| \leq n,$$

т.е. $x_0 \in e$, что и требовалось доказать. Отметим лишь, что при рассмотрении абсолютных разностных отношений $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, т.е. относительно всего отрезка $[a,b]$, при определении $\mathcal{E}$ все равно, что брать в качестве h: $0 < |h| < \frac{1}{m}$ или $0 < |h| \leq \frac{1}{m}$. Но, если эти отношения берутся относительно, скажем нигде не плотного подмножества на $[a,b]$, то замкнутость e возникает только в случае $0 < |h| < \frac{1}{m}$.

А теперь для функции f в наших условиях введем множества

$$\mathcal{E}_n = \left\{ x \in \mathcal{E} : \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq n, \quad 0 < |h| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Мы уже знаем, что эти множества замкнуты, а по условию имеем:

$$\mathcal{E} = \bigcup_n \mathcal{E}_n.$$

Так как $\mathcal{E}$ — второй категории, то найдется интервал (α, β), на котором (вместе с $\mathcal{E}$) будет всюду плотным одно из слагаемых $\mathcal{E}_n$; считая, что длина (α, β) меньше $\frac{1}{n}$, мы, по определению $\mathcal{E}_n$, и получим, что в этом интервале

$$|f(x') - f(x)| \leq n|x' - x|.$$

Если взять строго возрастающую сингулярную функцию f на отрезке, т.е. функцию, для которой $f' = 0$ почти всюду, то ни о каком условии Липшица у f где-либо на отрезке речи быть не может: множество, где конечная производная f' существует — полной меры, но первой категории.

В виде следующего примера докажем такое утверждение:

4. *На отрезке* $[0,1]$ *существует нигде не плотное множество лебеговой меры нуль, не представимое в виде счетного объединения множеств жордановой меры нуль.*

Для этого возьмем произвольное нигде не плотное на $[0,1]$ совершенное множество P, каждая порция которого имеет положительную меру.

Рассмотрим резидуальное множество $\mathcal{E} \subset P$ линейной меры нуль; оно и решает задачу.

В самом деле, предполагая противное, будем иметь:

$$\mathcal{E} = \bigcup_k \mathcal{E}_k,$$

где каждое $\mathcal{E}_k$ — жордановой меры нуль. Отсюда следует, что и замыкание каждого $\mathcal{E}_k$ также жордановой меры нуль. Так как $\mathcal{E}$ — второй категории на P, то найдется порция $P' = P \cap [\alpha, \beta]$, на которой одно из множеств $\mathcal{E}_k$ всюду плотно, и, следовательно, для этого $\mathcal{E}_k$ имеем:

$$\overline{\mathcal{E}}_k \cap [\alpha, \beta] = P'.$$

Но, по условию, $\mathrm{mes} P' > 0$, это же означает, что внешняя жорданова мера $\mathcal{E}_k$ и $\overline{\mathcal{E}}_k$ — положительна, что противоречит нашему предположению.

2. Контингенции множеств

Пусть $\mathcal{E}$ — произвольное множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$; луч l, выходящий из точки $x \in \mathcal{E}$, называется *промежуточной полукасательной* множества $\mathcal{E}$ в точке x, если существует последовательность точек $x_k \in \mathcal{E}$, отличных от x, сходящихся к x, и такая, что последовательность лучей $\{\overrightarrow{xx_k}\}$ сходится к l. Совокупность всех промежуточных полукасательных множества $\mathcal{E}$ в точке x называется *контингенцией* этого множества в этой точке и обозначается символом $\mathrm{contg}_{\mathcal{E}} x$; контингенция в изолированой точке $\mathcal{E}$ считается пустым множеством.

Прямая линия, проходящая через точку x, составленная из двух полукасательных множества $\mathcal{E}$ в точке x, называется *промежуточной касательной* в этой точке. Если $\mathrm{contg}_{\mathcal{E}} x$ совпадает с совокупностью всех лучей, выходящих из x и лежащих в некоторой $(n-1)$-плоскости t, то она называется *касательной гиперплоскостью* множества $\mathcal{E}$ в точке x.

Легко убедиться, что данное нами определение контингенции равносильно следующему: пусть $S(x)$ — единичная сфера S^{n-1} с центром x и пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно; спроектируем лучами из точки x на сферу $S(x)$ все точки множества $\mathcal{E} \cap V_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$, где $V_\varepsilon(x)$ — открытый шар с центром x и радиуса ε. Полученное множество обозначим $C_\varepsilon(x)$; тогда

$$\mathrm{contg}_{\mathcal{E}} x \bigcap S(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{C_\varepsilon(x)}.$$

Само же это пересечение контингенции со сферой мы назовем сферической контингенцией, о которой ниже мы еще вспомним.

Ясно, что $\operatorname{contg}_{\mathcal{E}} x$ является некоторым замкнутым множеством лучей, выходящих из точки x; обратно, любое замкнутое множество лучей является контингенцией некоторого множества (хотя бы того же множества лучей). Но, оказывается, что если учитывать не все точки множества $\mathcal{E}$, а лишь — в каком-то смысле — "подавляющее"их большинство, то произвол в структуре $\operatorname{contg}_{\mathcal{E}} x$ существенно ограничивается.

Один из основных здесь результатов мы и приведем:

Т е о р е м а о к о н т и н г е н ц и я х. *В каждой точке x множества $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$, исключая, быть может, подмножество хаусдорфовой $(n-1)$-меры нуль,* $\operatorname{contg}_{\mathcal{E}} x$ *есть либо полное пространство, либо полупространство, либо гиперплоскость (т.е. касательная к $\mathcal{E}$).*

Как видим, в этой теореме в основу описания "подавляющего"большинства точек множества $\mathcal{E}$ взята мера Лебега и Хаусдорфа; применение этой теоремы, например, к графику произвольной конечной действительной функции $u = f(x_1, \dots, x_n)$ сразу дает описание дифференциальных свойств такой функции на множестве полной меры.

В качестве примера отметим знаменитую в свое время теорему В.В. Степанова [2], которая была доказана еще до введения понятия контингенции:

Для того, чтобы непрерывная функция $f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, была дифференцируемой почти всюду на множестве $\mathcal{E} \subset D$, необходимо и достаточно, чтобы почти в каждой его точке $x \in \mathcal{E}$ выполнялось условие

$$\overline{\lim_{x' \to x}} \frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|} < \infty.$$

Действительно, выполнение этого условия означает для графика Γ этой функции $u = f(x)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, что в соответствующей его точке A некоторый вертикальный двуполостный конус не содержит точек Γ, а значит $\operatorname{contg}_{\mathcal{E}} x$ не является ни полным пространством $\mathbb{R}^{n+1}$,ни полупространством; поэтому исключая подмножество Γ хаусдорфовой меры нуль (проекция которого в D имеет $n-$меру Лебега нуль), во всех его точках contg есть касательная плоскость.

Нашей ближайшей целью будет изучение структуры $\operatorname{contg}_{\mathcal{E}} x$ с точностью до подмножества на $\mathcal{E}$ первой категории. Другими словами, в основу описания "подавляющего" большинства точек множества мы вместо *меры* возьмем *категорию.* Но, конечно, все ожидаемые результаты будут содержательными лишь для множеств второй категории в себе, например, для множеств типа $\mathcal{G}_\delta$; в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением замкнутых и открытых множеств.

Хотя полного аналога вышеприведенной теоремы в терминах *категории* для общего случая нет, все же одно общее утверждение привести здесь можно, а именно:

Т е о р е м а 2. *Если $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$, — совершенно, то на его резидуальном подмножестве $\mathcal{E}'$ $\operatorname{contg}_{\mathcal{E}} x$, $x \in \mathcal{E}'$, есть центрально-симметрическое (с центром x) множество в $\mathbb{R}^n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\theta_p\}$ $p = 1, 2, \ldots$ — всюду плотная последовательность направлений в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{E}_{pqr} \subset \mathcal{E}$ $(q, r = 1, 2, \ldots)$ множество точек $x \in \mathcal{E}$, таких, что круговой конус с вершиной x, осью $\theta_p(x)$, углом $\frac{1}{q}$ при вершине и с высотой $\frac{1}{r}$ не содержит внутри точек множества $\mathcal{E}$. Из определения легко следует, что $\mathcal{E}_{pqr} \subset \mathcal{E}$ — замкнутое множество.

Предположим теперь, что теорема не верна. Тогда найдется множество $\tilde{\mathcal{E}} \subset \mathcal{E}$ не первой категории, такое, что в каждой точке $x \in \tilde{\mathcal{E}}$ существует прямая L_x, один луч которой (с началом x) принадлежит $\operatorname{contg}_{\mathcal{E}} x$, а другой — не принадлежит. Обозначим через $\mathcal{E}'_{pqr}$ подмножество из $\mathcal{E}_{pqr}$ со следующим дополнительным свойством: центрально-симметричный прежнему круговой конус с вершиной $x \in \mathcal{E}'_{pqr}$ (и осью$(-\theta_p(x)))$ содержит промежуточную полукасательную l множества $\mathcal{E}$, такую, что угол $(l_q \hat{-} \theta_p) \leq \frac{1}{4q}$. Очевидно, что

$$\tilde{\mathcal{E}} = \bigcup_{p,q,r} \mathcal{E}'_{pqr}.$$

Выбирая, если необходимо, порцию, можем считать, что $\tilde{\mathcal{E}}$ — всюду плотно в $\mathcal{E}$. Так как $\tilde{\mathcal{E}}$ — не первой категории на $\mathcal{E}$, тем более, в себе, то найдутся такие p, q, r, что $\mathcal{E}'_{pqr}$ будет плотно на некоторой порции множества $\tilde{\mathcal{E}}$, а значит, и на соответствующей порции $\mathcal{E}$. Так как $\mathcal{E}_{pqr} \supset \mathcal{E}'_{pqr}$ — замкнутое множество, то найдется порция $\mathcal{E}$ — обозначим ее через P, — содержащаяся в нем. Очевидно, можем предположить диаметр P меньшим $\dfrac{1}{r}$, а направление луча θ_p совпадающим с положительным направлением оси Ox_n пространства $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n)\}$.

Пусть Q — проекция P на плоскость $Ox_1 \ldots x_{n-1}$; легко видеть, что каждая точка из Q является проекцией единственной точки из P: иначе — другая точка $P \subset \mathcal{E}_{pqr}$ из нижнего полуконуса имела бы верхний полуконус, содержащий первую точку (и диаметр этих полуконусов — меньше $\dfrac{1}{r}$). В то же время на P должно быть плотным множество $\mathcal{E}'_{pqr} \cap P$, следовательно, для каждой точки x' этого множества соответствующий ей нижний полуконус обязательно должен содержать точки $\mathcal{E}$ внутри (и сколь угодно близкие к x').

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Очевидно, ее можно было бы перефразировать следующим образом: *в каждой точке совершенного множества, исключая подмножество первой категории, контингенция его состоит из промежуточных касательных.*

Легко видеть, что утверждение теоремы справедливо и для любого совершенного подмножества $\mathcal{E}'$ на $\mathcal{E}$: это так, если брать "малые" контингенции — относительно самого $\mathcal{E}'$ (это и утверждает теорема), но оказывается, что это верно и для контингенций "больших" — относительно первоначального множества $\mathcal{E}$. Доказательство — то же, основу которого мы могли бы назвать методом "пустых конусов".

Есть несколько замечаний. Первое — относительно более общего случая замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^n$. С одной стороны, подмножество его изолированных точек всегда — не первой категории, но при желании контингенцию в этих случаях (пустое множество) можно считать "центрально-симетричной" и теорему справедливой и здесь; с другой стороны, во многих случаях (и в наших в том числе) существенная часть рассмотрений относится именно к совершенному "ядру"возникающих так или иначе замкнутых множеств.

Второе замечание касается, так сказать, общей структуры совершенного множества. Ведь из метода доказательства теоремы 2 легко следует, что для любого совершенного множества $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ имеет место представление:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \bigcup \Big(\bigcup_k \mathcal{E}_k \Big) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где $\mathcal{E}_0$ есть замыкание множества тех точек $\mathcal{E}$, в которых $\mathrm{contg}_{\mathcal{E}} x$ есть полное пространство (совокупность таких точек — $\mathcal{G}_\delta$), а каждое $\mathcal{E}_k$ есть (открытая) порция из $\mathcal{E}$, являющаяся графиком некоторой функции — при подходящем выборе осей координат в $\mathbb{R}^n$, — удовлетворяющей условию Липшица. Можно было бы назвать $\mathcal{E}_0$ "существенно пространственной" частью даного множества $\mathcal{E}$. В большинстве приложений теоремы 2 наиболее интересными случаями являются те, в которых совершенное множество не исчерпывается этой "существенной" частью.

И еще. К сожалению, кроме доказанной теоремы, нет такой полной характеристики контингенций в категорном смысле, какая есть в классической теореме о контингенциях в смысле теории меры.

Вот, например, нерешенный конкретный вопрос: существует ли совершенное множество $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$, для которого в точках его резидуального подмножества контингенция принадлежит двум парам непересекающихся вертикальных углов? Ясно, что такое множество — длины нуль; а дальше?

Поэтому ниже мы будем рассматривать не произвольные множества $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}_n$, а *многообразия*, причем коразмерности 1, т.е. гиперповерхности; для них мы уже сможем привести достаточно вразумительные утверждения.

В то время, как в приведенной нами классической теореме о контингенциях ее каноническое подмножество из $\mathcal{E}$ — т.е. $\mathcal{E}$ минус "$(n-1)$-мера нуль— подавляет своим *пассивным* весом (мерой), резидуальное подмножество с лихвой компенсирует внешнюю "маломерность"своим *качеством*, своей внутренней "силой притяжения"(что это — сейчас поймем).

Рассмотрим многозначное отображение $x \to \operatorname{contg}_{\mathcal{E}} x$. Скажем, что в некоторой точке $x_0 \in \mathcal{E}$ это отображение непрерывно (точнее, — полунепрерывно сверху), если для любой последовательности $x_k \to$

x_0 имеем: $\overline{\operatorname{lt}}_{k} \operatorname{contg}_{\mathcal{E}} x_k \subset \operatorname{contg}_{\mathcal{E}} x_0$.

Обещанное нами выглядит так:

Т е о р е м а 3. *На $\mathcal{G}_\delta$-множестве $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}_n$ существует резидуальное множество точек непрерывности отображения $x \to \operatorname{contg}_{\mathcal{E}} x$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть на подмножестве $\tilde{\mathcal{E}} \subset \mathcal{E}$ не первой категории это не так.

Как и в теореме 2, рассмотрим снова множества $\mathcal{E}_{pqr}$ со свойством каждого соответствующего конуса: он не содержит точек $\mathcal{E}$, но существует последовательность $x_k \in \mathcal{E}$, сходящаяся к его вершине, такая, что некоторые полукасательные $l(x_k)$ имеют предел, расположенный внутри этого конуса.

Снова, как и в теореме 2, из представления

$$\tilde{\mathcal{E}} = \bigcup_{p,q,r} (\tilde{\mathcal{E}} \bigcap \mathcal{E}_{pqr})$$

найдется (открытая) порция $\tilde{\mathcal{E}}$, а, значит, и $\mathcal{E}$, на которой $\mathcal{E}_{pqr}$ будет плотно; в силу замкнутости $\mathcal{E}_{pqr}$ эта порция полностью ему принадлежит. Взяв диаметр порции меньшим $\dfrac{1}{r}$, мы, как и раньше, убедимся, что она представляет график липшицевой функции, в каждой точке которого все соответствующие конусы не содержат точек $\mathcal{E}$, а это значит, что и для близких точек к $\tilde{\mathcal{E}}$ никакие полукасательные для $x_k \to \tilde{\mathcal{E}}$ не могут войти в эти, но уже двуполостные конусы, что противоречит нашему предположению.

Теорема доказана.

Так вот, возвращаясь к нашим предварительным комментариям к этой теореме, мы и можем образно ее сформулировать так: *в точках резидуального подмножества из $\mathcal{E}$ контингенции поглощают все соседние, приближающиеся к ним.*

На многозначную функцию $x \to \mathrm{contg}_{\mathcal{E}} x$ можно смотреть как на функцию первого бэровского класса: ведь она получена, так сказать, в процессе дифференциирования; тогда нашу теорему естественно рассматривать как обобщение знаменитой теоремы Бэра о таких функциях. В самом деле, если, например, функция $f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируема всюду, то точки непрерывности $\mathrm{grad} f$ совпадают с нашими точками непрерывности отображения $x \to \mathrm{contg}_{\Gamma} x$, где Γ — график f.

И еще: в приведенной нами классической теореме о контингенциях мы пренебрегали некоторым подмножеством хаусдорфовой $(n-1)$ - меры нуль; но мы уже знаем, что это множество (в случае если $\mathcal{E}$ — типа $\mathcal{G}_\delta$) может оказаться множеством второй категории. Так вот, наша теорема, в определенном смысле, отвечает на естественный вопрос: а что же все-таки может быть на том множестве, которым мы ранее пренебрегли?

Пусть $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество и $x \in \mathcal{E}$ — его неизолированная точка. Будем брать произвольные пары его точек x', x'', $x' \neq x''$ и (неориентированные) прямые $\overline{x'x''}$. Предельные положения этих прямых при всевозможных выборах x', x'', когда $x', x'' \to x$, образуют некоторое замкнутое множество прямых, проходящих через точку x; это множество называется *паратингенцией* множества $\mathcal{E}$ в точке x и обозначается через $\mathrm{partg}_{\mathcal{E}} x$.

Из определения сразу следует, что $\mathrm{partg}_{\mathcal{E}} x \supset \mathrm{contg}_{\mathcal{E}} x$ и что паратингенция всегда центральносимметрична, а отображение $x \to \mathrm{partg}_{\mathcal{E}} x$ всегда непрерывно (полунепрерывно сверху) в каждой точке.

Все это имеет место для произвольных множеств $\mathcal{E}$. А теперь сформулируем такую теорему:

Т е о р е м а 4. *Если* $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ *—* $\mathcal{G}_\delta$*-множество, то на резидуальном его подмножестве имеет место равенство* $\operatorname{partg}_\mathcal{E} x = \operatorname{contg}_\mathcal{E} x$ *(а значит на этом же множестве и — непрерывность отображения* $x \to \operatorname{contg}_\mathcal{E} x$*; непрерывность же отображения* $x \to \operatorname{partg}_\mathcal{E} x$ *<u>всегда</u> имеет место).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Конечно, и здесь главную роль сыграют множества типа $\mathcal{E}_{pqr}$, как и выше.

Итак, пусть в точках $x \in \tilde{\mathcal{E}}$ — множества не первой категории на $\mathcal{E}$ $\operatorname{contg}_\mathcal{E} x \neq \operatorname{partg}_\mathcal{E} x$; в силу теоремы 3 можем считать, что в каждой точке $\tilde{\mathcal{E}}$ $\operatorname{contg}_\mathcal{E} x$ центрально-симметрична. Неравенство $\operatorname{contg}_\mathcal{E} x \neq \operatorname{partg}_\mathcal{E} x$ означает, что $\operatorname{contg}_\mathcal{E} x$ не содержит некоторых прямых, содержащихся в $\operatorname{partg}_\mathcal{E} x$.

$\mathcal{E}_{pqr}$ мы определим как множество тех $x \in \mathcal{E}$, для которых оба конуса — один с осью θ_p, другой $(-\theta_p)$, углом $\frac{1}{q}$ и каждый высотой $\frac{1}{r}$ не содержат прямой, принадлежащей $\operatorname{partg}_\mathcal{E} x$.

Из равенства

$$\tilde{\mathcal{E}} = \bigcup_{p,q,r} \mathcal{E}_{pqr}$$

мы снова найдем открытую порцию из $\mathcal{E}$, которая содержится в одном из слагаемых $\mathcal{E}_{pqr}$. Эта порция представляет собой график *липшицевой* функции, для каждой точки x которой оба указаных выше конуса находятся вне его. А это значит, что для любых пар точек x', x'', близких к x никакое предельное положение прямой $\overline{x'x''}$ при $x', x'' \to x$ не войдет внутрь этих конусов.

Конечно, можно было бы сформулировать доказанную теорему и так: *если пренебрегать подмножествами первой категории, то условие* $\operatorname{contg}_\mathcal{E} x = \operatorname{partg}_\mathcal{E} x$ *является <u>необходимым</u> <u>и достаточным</u> для непрерывности отображения* $x \to \operatorname{contg}_\mathcal{E} x$.

В общем же случае это условие только достаточно: простой пример двух пересекающихся прямых дает в точке пересечения контингенцию — эту же пару прямых, паратингенцию — полную плоскость, в остальных точках — одну из прямых.

3. Полунепрерывные функции

.

Пусть сначала ограниченная функция $f(x)$ задана в замкнутой области $\overline{D} \subset \mathbb{R}^n$. Возьмем число $\delta > 0$ и положим

$$M_\delta(x) = \sup\{f(x')\}, \quad m_\delta(x) = \inf\{f(x')\}$$

для x' из шара $V_\delta(x) = \{x' : |x' - x| \leq \delta\}$ радиуса δ.

С уменьшением δ величина $M_\delta(x)$ не возрастает, а $m_\delta(x)$ не убывает, а потому существуют пределы $M(x) = \lim\limits_{\delta\to 0} M_\delta(x)$, $m(x) = \lim\limits_{\delta\to 0} m_\delta(x)$. Эти пределы являются соответственно *наибольшим* и *наименьшим* пределами функции f в точке x:

$$M(x) = \overline{\lim_{x'\to x}} f(x'), \qquad m(x) = \underline{\lim_{x'\to x}} f(x').$$

Очевидно, что всегда $m(x) \le f(x) \le M(x)$.

Определение 1. Функция $f(x)$, заданная в области $\overline{D} \subset \mathbb{R}^n$, называется *полунепрерывной сверху* в этой области, если в каждой точке $x \in \overline{D}$

$$f(x) = \overline{\lim_{x'\to x}} f(x'),$$

и *полунепрерывной снизу*, если

$$f(x) = \underline{\lim_{x'\to x}} f(x').$$

Очевидно, что если в некоторой точке x_0 $f(x_0) = \overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) = \underline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$, то f просто непрерывна в этой точке.

Легко геометрически описать полунепрерывные функции. Именно, пусть, например, $u = f(x)$, $x \in \overline{D} \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и полунепрерывна сверху; рассмотрим график $B(f)$ этой функции в $\mathbb{R}^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ над областью $\overline{D}$ и его замыкание $\overline{B}(f)$. Это замыкание,вообще говоря, пересекается "вертикалью"$x = \mathrm{const}$ уже не в одной точке, но это пересечение компактно. Так вот, будем брать на этом пересечении самую верхнюю точку. Легко доказать, что полученная при этом однозначная функция в $\overline{D}$ совпадает с данной.

Вообще, пусть нам задан произвольный компакт $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$, проекция которого на $\mathbb{R}^n$ совпадает с некоторой (конечно, компактной) областью $\overline{D}$. Будем на каждой "вертикальной" прямой $x = \mathrm{const}$ $[x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{D}]$ брать первую (нижнюю) точку ее пересечения с K и последнюю (верхнюю). Тогда первые точки представляют график некоторой функции, полунепрерывной снизу в $\overline{D}$, а вторые — функции, полунепрерывной сверху.

Уже отсюда видно, что при исследовании полунепрерывных функций достаточно было бы рассматривать, например, только полунепрерывные сверху, так как функции, полунепрерывные снизу, возникают изменением знака у первых.

Если $f(x)$ — полунепрерывна сверху и если вспомнить ее геометрическое определение, исходя от замыкания $\overline{B}(f)$ ее графика, то сразу увидим, что пересечение $\overline{B}(f)$ с замкнутым верхним полупространством $x_n \geq A_0$ представляет собой компакт, у которого самые верхние точки пересечения с вертикалями $x = \text{const}$ совпадают со значениями f в соответствующих точках; короче, множество $\{f \geq A_0\}$ оказывается всегда замкнутым при любых $A_0 \in \mathbb{R}^1$. Отсюда, между прочим, сразу следует, что полунепрерывная сверху функция на каждом компакте достигает своего максимального значения на этом компакте.

Нетрудно показать, что замкнутость лебеговых множеств $\{f \geq A_0\}$ может быть взято, в свою очередь, за определение полунепрерывных сверху функций. Конечно, отсюда следует, что множества $\{f < A_0\}$ представляют собой открытые множества.

Возьмем, например, некоторую точку $x_0 \in \overline{D}$ со значением $f(x_0)$ функции f в ней и пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Тогда множество $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ будет открытым и будет содержать точку x_0, т.е. существует некоторая δ-окрестность $U_\delta(x_0)$, в которой выполняется неравенство

$$f(x) - f(x_0) < \varepsilon, \qquad x \in U_\delta(x_0).$$

Это еще одна ипостась определения функции, полунепрерывной сверху.

Конечно, по двойственности, для функции, полунепрерывной снизу, замкнутыми будут множества $\{f \leq A_0\}$, открытыми — $\{f > A_0\}$ и определением на "языке $\delta - \varepsilon$":

$$-\varepsilon < f(x) - f(x_0), \qquad x \in U_\delta(x_0).$$

Если сравнить эти определения с таковым для непрерывных функций, где возникает неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

т.е.

$$-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon,$$

то станет ясным и термин *полунепрерывные*. Вернемся снова к полунепрерывной сверху функции $f(x)$ и ее графику $B(f)$; мы уже знаем,что самые верхние точки пересечения $\overline{B}(f)$ с вертикалями $x = \text{const}$ совпадают с графиком $B(f)$. А самые нижние такие точки, конечно, дают график полунепрерывной снизу функции $g(x)$. Нетрудно понять, что эта функция — самая близкая к f из всех полунепрерывных снизу и что $g(x) \leq f(x)$ всюду в $\overline{D}$.

Чтобы лучше увидеть "взаимодействие"этих функций, рассмотрим сначала общий случай.

Дадим одно определение.

Определение. Континуум (т.е. связный компакт) K над областью $\overline{D}$ назовем *регулярным*, если каждая вертикаль $x = \text{const}$ пересекает его по связному множеству, т.е., в данном случае, — по замкнутому отрезку или точке.

Иначе, топологи сказали бы: если проекция K на $\overline{D}$ — монотонна.

Самые верхние точки пересечения K с этими вертикалями определяют полунепрерывную сверху функцию $f(x)$, а самые нижние — полунепрерывную снизу $g(x)$, при этом $g(x) \le f(x)$.

Оказывается, имеет место и обратное:

Теорема 5. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ полунепрерывные, соответственно, сверху и снизу в $\overline{D}$, причем $g(x) \le f(x)$ для всех $x \in \overline{D}$. Тогда множество*

$$K = \bigcup_{x\in\overline{D}} [g(x), f(x)]$$

есть регулярный континуум над $\overline{D}$.

$[g(x), f(x)]$ — это, конечно же, замкнутый отрезок на вертикали $x = \text{const}$ с концами $g(x)$, $f(x)$.

Доказательство теоремы.

Сначала докажем, что K компактно в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\xi_p \in K$, $\xi_p \to \xi_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ $p = 1, 2, \ldots$; докажем, что $\xi_0 \in K$.

Возьмем проекции $x^{(p)}$ точек ξ_p в $\overline{D}$. Очевидно, что $\lim\limits_{p\to\infty} x^{(p)} = x^{(0)} = \text{пр.}\xi_0$. Можем считать, что существуют пределы $\lim f(x^{(p)})$, $\lim g(x^{(p)})$. В силу полунепрерывности f и g, получим: $f(x^{(0)}) \ge \lim f(x^{(p)})$, $g(x^{(0)}) \le \lim g(x^{(p)})$. Следовательно, предел отрезков $[g(x_p), f(x_p)]$ принадлежит отрезку $[g(x^{(p)}), f(x^{(p)})] \subset K$. Поэтому ξ_0 есть точка этого отрезка, и, значит, $\xi_0 \in K$. Итак, K — компакт в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Докажем теперь связность K.

Предположим, что K не связен; тогда $K = K_1 \cup K_2$, где K_1, K_2 — непустые компакты, которые находятся на положительном расстоянии один от другого: $\rho(K_1, K_2) > 0$. Так как над каждым $x \in \overline{D}$ точки компакта K образуют связное множество $[g(x), f(x)]$, то каждое такое множество принадлежит либо K_1, либо K_2. Проекции компактов K_1 и K_2 на $\overline{D}$ обозначим через A и B; тогда A, B — также непустые компакты и $A \cup B = \overline{D}$. Из связности $\overline{D}$ следует, что $A \cap B \ne \varnothing$; но тогда вертикаль $x = x_0$, где $x_0 \in A \cap B$, содержит отрезок $[g(x_0), f(x_0)]$, принадлежащий как K_1, так и K_2, что противоречит тому, что они, по предположению, не пересекаются.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Итак, если взять замыкание графика $\overline{B}(f)$ произвольной полунепрерывной сверху функции $f(x)$, то самые верхние точки пересечения вертикалей $x = const$ восстанавливают график самой функции f, самые нижние — порождают "сопровождающую"ее полунепрерывную снизу функцию $g(x)$, $g(x) \leq f(x)$, а вместе с f и g возникает некоторый регулярный континуум

$$K = \bigcup_{x \in \overline{D}} [g(x), f(x)].$$

И если мы раньше говорили, что график произвольной полунепрерывной сверху функции есть множество самых верхних точек пересечения вертикалей $x = \mathrm{const}$ с *произвольным* замкнутым множеством в $\mathbb{R}^{n+1}$, проектирующимся на $\overline{D}$, то теперь можем сказать, что в качестве этого замкнутого множества всегда можно взять некоторый регулярный континуум.

Сейчас мы убедимся, что найденный нами континуум облает дополнительными свойствами.

Во-первых, он — нигде не плотен в $\mathbb{R}^{n+1}$. В самом деле, если бы он содержал некоторый $(n+1)$- куб, то все точки графика $B(f)$ над проекцией этого куба в $\overline{D}$ (а они всегда — самые верхние точки пересечения с $x = \mathrm{const}$) были бы выше и этого куба, а потому он не может принадлежать замыканию $\overline{B}(f)$.

Во-вторых, в $\overline{D}$ имеется резидуальное множество $\mathcal{E}$, такое, что для всех $x_0 \in \mathcal{E}$, вертикаль $x = x_0$ пересекает $\overline{B}(f)$ в одной единственной точке (в частности, в ней $f(x_0) = g(x_0)$). Мы докажем, что даже континуум $K \supset \overline{B}(f)$ обладает этим свойством.

В самом деле, предположим, что для множества $e \subset \overline{D}$ не первой категории вертикали $x = x' \in e$ пересекают K по невырожденным отрезкам. Обозначим через $e_{pqp'q'}$ множество таких $x' \in e$, для которых вертикали $x = x'$ пересекают K по отрезку $[\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}]$ $(p, q, p', q' = 1, 2, \ldots)$: эту вертикаль будем считать как ось $Ox_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, перенесенную паралельно в точку x'; тогда

$$e = \bigcup_{p,q,p',q'} e_{pqp'q'}.$$

Найдется n-шар $V \subset \overline{D}$, в котором одно из $e_{pqp'q'}$ будет плотно, т.е. плотны будут в шаровом цилиндре $V \times [\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}]$ его вертикали равной длины над $e_{pqp'q'}$. Так как замыкание всех этих вертикалей есть сам цилиндр $V \times [\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}]$ и K — компакт, то этот цилиндр и принадлежит K; но тогда K не был бы нигде не плотным в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Легко видеть, что данная нам вначале полунепрерывная сверху функция $f(x)$ (как и ее "сопровождающая"$g(x)$) непрерывна в точках $\mathcal{E}$ и мы фактически для полунепрерывных функций доказали чисто геометрически первую часть теоремы Бэра о функциях первого класса, не зная наперед того, что полунепрерывные функции ему пренадлежат.

А теперь восполним этот пробел в наших знаниях такой теоремой [3]:

Т е о р е м а 6. *Каждая полунепрерывная сверху (снизу) функция является пределом невозрастающей (неубывающей) последовательности непрерывных функций.*

Эта теорема позволяет теперь применять теорему Бэра не только для всей области $\overline{D}$ (как только что было у нас), но и на каждом замкнутом ее подмножестве.

Для простоты мы рассматривали здесь случай ограниченных функций. Но легко переформулировать полученные здесь результаты и для функций, принимающих и бесконечные значения (и такие нам потребуются).

4. Цилиндрические контингенции

.

При исследовании дифференциальных свойств функций одного переменного $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, выше нам потребовалось изучение таких свойств у различных множеств на плоскости $\mathbb{R}^2$. Теперь мы хотим перейти к функциям многих переменных, а для этого, в свою очередь, нам придется выйти в многомерные пространства.

У нас уже было определение контингенции $\mathrm{contg}_{\mathcal{E}} x$ множества $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в каждой его неизолированной точке $x \in \mathcal{E}$, а также сферической контингенции $\mathrm{contg}^S_{\mathcal{E}} x$, как пересечения

$$\mathrm{contg}_{\mathcal{E}} x \bigcap S^n(x)$$

контингенции $\mathrm{contg}_{\mathcal{E}} x$ с единичной сферой $S^n(x)$ с центром x.

Мы уже упоминали классическую теорему о структуре контингенции во всех точках множества, исключая его подмножество хаусдорфовой n-меры нуль.

Здесь же, во-первых, мы продолжим изучение общего понятия контингенции применительно к частному случаю множеств $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, а именно, к графикам Γ непрерывных функций $f : D \to \mathbb{R}$ (D — область $\mathbb{R}^n$), и, во-вторых, попытаемся дополнить наши прежние утверждения о структуре контингенции Γ на их резидуальных подмножествах; эпитет "наши прежние" означает, например, центральную симметрию этих контингенций.

Так вот, для случая графика Γ однозначной непрерывной функции $u = f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, удобно ввести дополнительное понятие *цилиндрической контингенции* в произвольной его точке $A_0 \in \Gamma$.

Пусть $S^{n-1}(x_0)$ — граница единичного шара $V^n(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 =$ пр.$_{\mathbb{R}^n} A_0 \in D$; точки на $S^{n-1}(x_0)$ будем обозначать через φ и иногда будем их называть *направлениями* в точке x_0. Цилиндр $\tilde{C}^n(A_0) = S^{n-1}(x_0) \times \mathbb{R}^1(u)$ с образующими $\mathbb{R}^1(u)$, параллельными Ou, компактифицируем, добавив к каждой образующей $\mathbb{R}^1(u)$ две бесконечно удаленные точки $\pm\infty$, и полученый компактный цилиндр обозначим через

$$C^n(A_0) = S^{n-1}(x_0) \times \overline{\mathbb{R}}^1(u).$$

Точка $\overline{A} = (\varphi, \overline{u})$ цилиндра $C^n(A_0)$ принадлежит цилиндрической контингенции графика Γ, если найдется последовательность точек $A_k \in \Gamma$, таких, что:

1) последовательность лучей $\overrightarrow{AA_k}$ сходится к некоторому лучу $\bar{l} \subset \mathbb{R}^n$, причем:

а) если $\bar{l}$ не параллелен оси Ou, то пересечение $\bar{l} \cap C^n$ над лучом φ обозначим через $\bar{u}$;

б) если $\bar{l}$ параллелен оси Ou, то

$$\bar{u}$$

есть одно из соответсвующих (направлению $\bar{l}$) точек $\pm\infty$ из C^n над лучом φ;

2) луч φ является полукасательной для последовательности точек $\{$пр. $A_k\}$ в области D.

Множество всех таких точек и назовем *цилиндрической контингенцией* графика Γ в точке A_0 и обозначим ее через $\mathrm{contg}^C_\Gamma A_0$.

Еще раз подчеркнем, что цилиндрическая контингенция определяется только для графика однозначной функции f.

Вот другой подход к тому же понятию, который мы фактически применим и к функциям одного переменного. Именно, рассмотрим точку $A_0(x_0, u_0)$, $x_0 \in D$, графика Γ непрерывной функции f.Точки этого графика над проколотой ε-окрестностью $U_\varepsilon(x_0)\backslash x_0 \subset D$ обозначим через Γ_ε; очевидно, Γ_ε связно ($n \geq 2$). Проекция M_ε множества Γ_ε из точки A_0 на цилиндр $C^n(A_0)$ также связна и семейство $\{M_\varepsilon\}$ —

монотонно убывающее. Легко убедиться, что

$$\operatorname{contg}_\Gamma^C A_0 = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{M}_\varepsilon.$$

Отсюда сразу следует, что цилиндрическая контингенция есть континуум в C^n. Докажем, что и пересечение этого континуума с произвольной образующей $\varphi = \varphi_0$ связно, т.е. этот континуум регулярен.

Для этого возьмем луч $\bar{l} \subset D$, выходящий из точки $x_0 \in D$ и пересекающий сферу $S^{n-1}(x_0)$ в точке φ_0; рассмотрим коническую окрестность $\Omega_\delta \subset D$ этого луча, состоящую из всех лучей, образующих с $\bar{l}$ угол, меньший $\delta > 0$. Точки графика $\Gamma \setminus A_0$ над Ω_δ, принадлежащие δ-окрестности точки A_0, обозначим через $\Gamma_\delta(\varphi_0)$; очевидно, оно связно. Проекция $M_\delta(\varphi_0)$ его из точки A_0 на цилиндр C^n также связна и семейство $\{M_\delta(\varphi_0)\}$ — убывающее. Теперь легко показать, что пересечение $\operatorname{contg}_\Gamma^C A_0$ с образующей $(\varphi_0, \overline{\mathbb{R}^1})$ цилиндра C^n совпадает с $\bigcap\limits_{\delta>0} \overline{M_\delta}(\varphi_0)$. Отсюда и следует, что это пересечение связно.

При рассмотрении функций одной переменной мы уже указывали, что взаимно однозначное соответствие между точками contg графика функции и множеством ее производных чисел возникает, если под производными числами понимать предельные значения не обычного разностного отношения $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$, а отношения $\frac{f(x')-f(x)}{|x'-x|}$. Поэтому мы сразу назовем число a (возможно, $a = \pm\infty$) *производным числом* функции f в точке B_0 в направлении φ, если существует последовательность точек $B_k \in D$ ($k = 1, 2, \ldots$), сходящаяся к B_0 таким образом, что последовательность направлений векторов $\overrightarrow{B_0B_k}$ сходится по направлению к φ, причем

$$\frac{f(B_k) - f(B_0)}{|\overrightarrow{B_0B_k}|} \to a.$$

Будем рассматривать цилиндр $C^n(A_0)$ относительно системы декартовых координат $(\mathfrak{X}, U)$, параллельно перенесенной в точку A_0 графика Γ функции f: $\mathfrak{X} = x - x_0$, $U = u - u_0$. Тогда, как мы знаем, нетрудно показать, что если a — производное число функции f в направленни φ, то точка с координатами (φ, a) принадлежит $\operatorname{contg}_\Gamma^C A_0$ и, наоборот, каждая точка этой контингенции есть производное число функции f в соответствующем направлении.

Если $K \subset C^n$ — регулярный континуум, то, как мы знаем, естественным образом возникают две функции: $P(\varphi)$ и $Q(\varphi)$, $\varphi \in S^{n-1}$.

Именно, точки $(\varphi, P(\varphi))$ и $(\varphi, Q(\varphi))$ континуума K суть, соответственно, самая верхняя и самая нижняя точки из K на образующей $\varphi = \mathrm{const}$ цилиндра C^n, т.е. функции $P(\varphi)$ и $Q(\varphi)$ (которые могут принимать и бесконечные значения) полунепрерывны, соответственно, сверху и снизу и, конечно же, всегда $P(\varphi) \geq Q(\varphi)$. Мы доказали, что цилиндрическая контингенция графика непрерывной функции $u = f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, в каждой точке $A \in \Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ есть регулярный континуум. Покажем теперь, что и, обратно, каков бы ни был регулярный континуум K на C^n, найдется непрерывная функция $u = f(x)$, график которой в некоторой точке имеет контингенцию, совпадающую с K.

Пусть сначала K — произвольный ограниченый регулярный континуум в C^n, т.е. $K \subset S^{n-1} \times [-M, M]$, где $M > 0$ — конечное число.

Для каждого $\varphi \in S^{n-1}$ берем самую верхнюю и самую нижнюю точки континуума K. Возникающие полунепрерывные функции обозначим через $P(\varphi)$ и $Q(\varphi)$.

Рассмотрим сначала полунепрерывную сверху функцию $P(\varphi)$; мы уже знаем, что существует монотонно невозрастающая последовательность непрерывных функций $\{P_m(\varphi)\}$, сходящаяся к функции $P(\varphi)$.

Пусть $U_\varepsilon(K)$ — ε-окрестность компакта K; покажем, что начиная с некоторого номера, все графики фукнций $P_m(\varphi)$ попадут в эту окрестность. Это сразу следует из известного [4] критерия компактности для континуумов: в любом компакте из каждой последовательности континуумов можно выделить сходящуюся (в метрике хаусдорфа для замкнутых множеств) подпоследовательность, причем сходимость последней к своему предельному континууму равномерна.

Так вот: во-первых, предельный континуум K' последовательности графиков $B(P_m)$ принадлежит K: если бы некоторая точка $(\varphi, u') \in K'$ не принадлежала K, то, очевидно, u' на образующей φ была бы выше точек K и, следовательно, для этого φ не было бы сходимости $P_m(\varphi)$ к $P(\varphi)$; во-вторых, ε-окрестность K содержит ε-окрестность K'. Отсюда и следует наше утверждение.

Отметим, что K' вовсе не обязан быть графиком однозначной функции — у него может быть множество вертикальных отрезков; но верхние точки K' при каждом φ совпадают с $P(\varphi)$.

Аналогично, для функции $Q(\varphi)$ найдется неубывающая последовательность $\{Q_m(\varphi)\}$ непрерывных функций, сходящаяся в $Q(\varphi)$ и, начиная с некоторого номера, все графики функций $Q_m(\varphi)$ попадают в $U_\varepsilon(K)$.

Пусть теперь K — произвольный регулярный континуум на C^n; через $P(\varphi)$, $Q(\varphi)$ снова обозначим соответствующие ему полунепрерывные функции. В общем случае функции P, Q неограничены.

Поэтому введем следующие усеченные функции:

$$u = P_m(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{m}, & P(\varphi) > \sqrt{m} \\ P(\varphi), & -\sqrt{m} \le P(\varphi) \le \sqrt{m} \\ -\sqrt{m}, & P(\varphi) < -\sqrt{m} \end{cases}$$

и

$$v = Q_m(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{m}, & Q(\varphi) > \sqrt{m} \\ Q(\varphi), & -\sqrt{m} \le Q(\varphi) \le \sqrt{m} \\ -\sqrt{m}, & Q(\varphi) < -\sqrt{m} \end{cases}$$

Легко видеть, что P_m и Q_m полунепрерывны соответственно сверху и снизу, а потому, в силу теоремы 6, им соответствует некоторый регулярний континуум K_m, принадлежащий, очевидно, континууму K; при этом $K_m \subset K_{m+1}$. Нетрудно убедиться, что $K = \overline{\bigcup_m K_m} = \mathrm{lt} K_m$ при $m \to \infty$.

Отсюда для $\frac{1}{m}$-окрестности $U_{\frac{1}{m}}(K_m)$ тоже получим:

$$\mathrm{lt} U_{\frac{1}{m}}(K_m) = K.$$

поэтому

$$\lim P_m(\varphi) = P(\varphi) \text{ и } \lim Q_m(\varphi) = Q(\varphi).$$

В той же $\frac{1}{m}$-окрестности, как и ранее, найдутся последовательности непрерывных функций, сходящихся к $P_m(\varphi)$ и $Q_m(\varphi)$. Выберем в каждой из $U_{\frac{1}{m}}$ по одной из них, соответственно, для P_m и Q_m и обозначим их через $p_m(\varphi)$ и $q_m(\varphi)$; в частности, получим, что $p_m(\varphi) \le \sqrt{m} + \frac{1}{m}$ и $q_m(\varphi) \ge -(\sqrt{m} + \frac{1}{m})$, а $\lim p_m(\varphi) = P(\varphi)$ и $\lim q_m(\varphi) = Q(\varphi)$.

Итак, построены последовательности непрерывных функций $\{p_m(\varphi)\}$, $\{q_m(\varphi)\}$ (о монотонности уже речи нет), которые сходятся, соответственно, к $P(\varphi)$ и $Q(\varphi)$.

Рассмотрим теперь функцию вида

$$f(r, \varphi) = r\left(A \sin^2 \frac{\pi}{2r} + B\right)$$

и подберем $A = A(\varphi)$ и $B = B(\varphi)$ так, чтобы максимальное значение отношения $\frac{f}{r}$ на отрезке $[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$ равнялось $p_m(\varphi)$, а минимальное —

$q_m(\varphi)$. Легко видеть, что для этого можно взять:

$$\begin{aligned} A &= p_m(\varphi) - q_m(\varphi) \\ B &= q_m(\varphi); \end{aligned}$$

тогда

$$f(r, \varphi) = r\left(p_m(\varphi) - q_m(\varphi)\right) \sin^2 \frac{\pi}{2r} + r q_m(\varphi)$$

Для отрезка $[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}]$ потребуем, чтобы $\max \frac{f}{r}$ равнялся $p_{m+1}(\varphi$, а $\min \frac{f}{r}$ — $q_m(\varphi)$; тогда

$$f(r, \varphi) = r\left(p_{m+1}(\varphi) - q_m(\varphi)\right) \sin^2 \frac{\pi}{2r} + q_m(\varphi) r.$$

Таким образом

$$f(r, \varphi) = \begin{cases} r\left(p_m(\varphi) - q_m(\varphi)\right) \sin^2 \frac{\pi}{2r} + q_m(\varphi) r, & r \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}] \\ \\ r\left(p_{m+1}(\varphi) - q_m(\varphi)\right) \sin^2 \frac{\pi}{2r} + q_m(\varphi) r, & r \in [\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}] \end{cases}$$

для каждого $n = 1, 2, \ldots$, причем полагаем $f(0, \varphi) = 0$.

Покажем, что для построенной функции контингенция ее графика в начале координат совпадает с данным регулярным континуумом K.

Выберем произвольное направление $\varphi_0 \in S^{n-1}(0)$; покажем, что максимальным и минимальным производным числом функции $f(r, \varphi_0)$ будут, соответственно $P(\varphi_0)$ и $Q(\varphi_0)$. Действительно, на отрезках вида $[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}]$ имеем:

$$\max \frac{f(r, \varphi_0)}{r} = p_m(\varphi_0), \quad \min \frac{f(r, \varphi_0)}{r} = q_m(\varphi_0),$$

поэтому

$$\varlimsup_{r \to 0} \frac{f(r, \varphi_0)}{r} = \lim p_m(\varphi_0) = P(\varphi_0), \quad \varliminf_{r \to 0} \frac{f(r, \varphi_0)}{r} = \lim q_m(\varphi_0) = Q(\varphi_0).$$

Докажем теперь, что для любой последовательности направлений $\{\varphi_k\}$, сходящейся к φ_0 и любой последовательности r_k, $r_k \to 0$, выполняются неравенства

$$\varlimsup \frac{f(r_k, \varphi_k)}{r_k} \leq P(\varphi_0), \quad \varliminf \frac{f(r_k, \varphi_k)}{r_k} \geq Q(\varphi_0),$$

из чего будет следовать, что все производные числа f в направлении φ_0 в точности совпадают с отрезком $[Q(\varphi_0), P(\varphi_0)]$. Будем доказывать первое неравенство; второе доказывается аналогично.

Обозначим через $[\frac{1}{2m_k+1}, \frac{1}{2m_k-1}]$ отрезок, содержащий r_k и предположим, что последовательности $\{p_{m_k}(\varphi_k)\}$, $\{q_{m_k}(\varphi_k)\}$ сходятся. Тогда

$$\frac{f(r_k,\varphi_k)}{r_k} =$$

$$= \begin{cases} (p_{m_k}(\varphi_k) - q_{m_k}(\varphi_k))\sin^2\frac{\pi}{2r_k} + q_{m_k}(\varphi_k), & r_k \in [\frac{1}{2m_k}, \frac{1}{2m_k-1}] \\ (p_{m_k+1}(\varphi_k) - q_{m_k}(\varphi_k))\sin^2\frac{\pi}{2r_k} + q_{m_k}(\varphi_k), & r_k \in [\frac{1}{2m_k+1}, \frac{1}{2m_k}]. \end{cases}$$

Отсюда

$$q_{m_k}(\varphi_k) \le \frac{f(r_k,\varphi_k)}{r_k} \le p_{m_k}(\varphi_k).$$

Возможны случаи: 1) $P(\varphi_0)$ и $Q(\varphi_0)$ ограничены.

Тогда (P полунепрерывна сверху) найдется окрестность $U(\varphi_0) \in S^{n-1}$, такая, что для всех $\varphi \in U$ будет: $P(\varphi) < N$, а для всех $m_k > N$

$$p_{m_k}(\varphi) = P(\varphi).$$

Отсюда следует, что

$$\varlimsup_{\varphi\to\varphi_0} p_{m_k}(\varphi) \le P(\varphi_0)$$

или

$$\varlimsup_{\varphi\to\varphi_0} \frac{f(r,\varphi)}{r} \le P(\varphi_0).$$

2) $P(\varphi_0) = +\infty$. В этом случае $p_{m_k}(\varphi_0) \nearrow \infty$ и первое неравенство выполняется, как и второе при $Q(\varphi_0) = -\infty$.

Теперь рассмотрим случай, когда $P(\varphi_0) = -\infty$. Тогда найдется окрестность $U(\varphi_0)$, такая, что для всех $\varphi \in U$ $P(\varphi) < -N$ для достаточно больших N и $p_m(\varphi) < -N + \frac{1}{m}$.

Тогда

$$\lim \frac{f(r_k,\varphi_k)}{r_k} = -\infty = P(\varphi_0).$$

Тем самым мы доказали следующую теорему:

Т е о р е м а 7. *Цилиндрическая контингенция графика Γ непрерывной функции $u = f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, в каждой точке $A \in \Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ есть регулярный континуум. Наоборот, для всякого регулярного континуума K на C^n найдется непрерывная функция $u = f(x)$, график которой в некоторой его точке имеет цилиндрическую контингенцию, совпадающую с этим континуумом K.*

Введенные здесь понятия и теорема о них требуют определенных замечаний.

Прежде всего — понятие производных чисел по направлению.

В классическом анализе рассматривается то же отношение

$$\frac{f(B_k) - f(B_0)}{|B_0 B_k|}. \tag{2}$$

Но точки B_k берутся <u>только</u> на том луче $\underline{l}$, выходящем из B_0, который и определяет нужное нам направление. Кстати, в анализе обычно рассматривают не луч, а полную, но *ориентированную* прямую, проходящую через точку B_0 и, скажем, для отрезка $B'_k B_0$ нужно было бы отношение (2) заменить на

$$\frac{f(B_0) - f(B'_k)}{|B'_k B_0|}.$$

Но в отличие от этого классического определения, у нас последовательности $\{B_k\}$ дозволено выходить за пределы луча $\underline{l}$, требуется лишь, чтобы эта последовательность стремилась к B_0 *по касательной* к $\underline{l}$.

То, что эти определения различны, показывает простой пример функции $u = \sqrt[3]{x}$, заданной на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$. "Классическая" производная ее в направлении оси Oy в начале координат равна нулю; для любого другого (прямолинейного!) луча $\underline{l}$, выходящего из начала координат производная $\frac{\partial u}{\partial l} = \pm\infty$ и на цилиндре $C^2 = S^1(0) \times \overline{\mathbb{R}}^1$ эти производные дали бы множество состоящее из двух точек $y = \pm 1$ на оси Oy $(x = 0)$ и двух открытых "бесконечных"полуокружностей; это множество даже не связно.

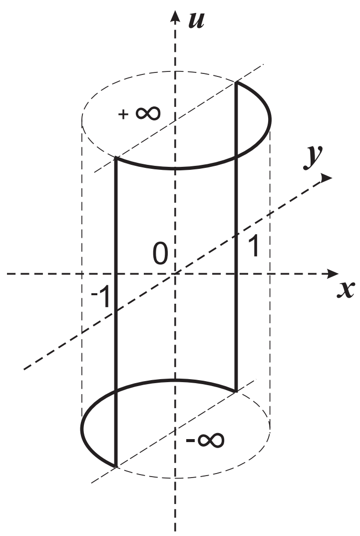

Рис. 2

В то же время, плоскость $u = Ay$ (при любом $A \in \mathbb{R}$) пересекает график данной функции по кривой над линией $x = A^3y^3$, *касающейся* оси Oy, и вдоль этой линии производные числа u равны A. Другими словами, цилиндрическая контингенция графика функции $u = \sqrt[3]{x}$ состоит из двух полных (включая $\pm\infty$) вертикальных образующих цилиндра C^2, проходящих через точки ± 1 оси Oy, дополненных теми двумя "бесконечными"полуокружностями, что и раньше (Рис 2).

И все же, для одного важного класса функций $u = f(x)$ наше определение совпадает с классическим; именно, для класса функций, удовлетворяющих условию Липшица:

$$|f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''|, \qquad x', x'' \in D \subset \mathbb{R}^n.$$

Это следует из того, что:

$$\frac{f(A_k) - f(B_0)}{|A_k B_0|} = \frac{f(B_k) - f(B_0)}{|B_k B_0|} \cdot \frac{|B_k B_0|}{|A_k B_0|} + \frac{f(A_k) - f(B_k)}{|A_k B_k|} \cdot \frac{|A_k B_k|}{|A_0 B_0|}$$

и $|A_k B_k| = \circ(|A_k B_0|)$.

Второе замечание касается различия между цилиндрической и сферической контингенциями. Сферическая контингенция — это то же, что и просто контингенция: пересечение последней со сферой. Если функция $u = f(x)$ не имеет бесконечных производных чисел в некоторой точке x, то цилиндрическая контингенция есть пересечение классической с цилиндром $C^n = S^{n-1}(x) \times \overline{\mathbb{R}}^1$.

Так вот, различие между $\operatorname{contg}^S(x)$ и $\operatorname{contg}^C(x)$ возникает тогда, когда функция $f(x)$ обладает бесконечными производными числами и в "игру"вступают "бесконечно"удаленные сферы-основания C^n.

На примере функции $u = \sqrt[3]{x}$ мы видели, что цилиндрическая ее контингенция в точке $x = 0$ есть пара противоположных образующих цилиндра C^2, дополненных двумя полуокружностями в "бесконечности".

В то время, как легко видеть, сферическая контингенция есть полный меридиан (пересечение сферы с вертикальной касательной плоскостью к $u = \sqrt[3]{x}$); другими словами, сферическая контингенция не различает бесконечные производные числа функции и "склеивает"их в своих полюсах ("северном"и "южном"). А вот цилиндрическая контингенция тонко "следит"вдоль каких последовательностей, в каком направлении от точки x эти бесконечные производные числа возникают. То, что за этим можно следить, не выходя из области D определения функции, можно именно потому, что точки ее графика Γ взаимно однозначно и взаимно непрерывно соответствуют точкам D

и наше специализированное понятие цилиндрической контингенции как раз и приспособлено к таким Γ.

И все же — не будем торопиться: сферическая контингенция позволит нам в красивом виде сформулировать далее одну из важных классификационных теорем.

5. Теорема о контингенциях гиперповерхностей евклидова пространства

Здесь мы докажем общую теорему о контингенциях n-гиперповерхности Γ евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ на резидуальном ее подмножестве.

Нам уже известно (п. 3), что на резидуальном подмножестве в Γ контингенция центрально-симметрична; а еще — на Γ имеется открытое плотное множество Γ' со следующими свойствами:

1) либо в открытой компоненте $\Gamma'_m \subset \Gamma'$ $(m = 1, 2, \ldots)$ имеется резидуальное подмножество, в точках x которого $\operatorname{contg}_\Gamma x$ есть полное пространство $\mathbb{R}^{n+1}$;

2) либо такая компонента есть график липшицевой функции относительно некоторой системы координат.

Отсюда следует, что задача о характеристике контингенции гиперповерхности Γ сводится к такой же задаче для графика липшицевой функции. Ниже мы приведем частичное решение этой задачи.

Сначала — о цилиндрической контингенции в отдельной точке.

Т е о р е м а 8. *Если функция $u = f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ липшицева с константой L, то $\operatorname{contg}^C_\Gamma A$ графика $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ этой функции ограничена липшицевыми краями $\rho = P(\varphi)$ и $\rho = Q(\varphi)$ с той же константой L.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad \text{при } x_1, x_2 \in D.$$

Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$(1) \qquad |P(\varphi_1) - P(\varphi_2)| \leq (L + \varepsilon)|\varphi_1 - \varphi_2| \text{ для любых } \varphi_1, \varphi_2 \in S^{n-1}.$$

Предположим противное и пусть при некотором $\varepsilon > 0$ найдутся направления $\varphi_0, \varphi_1 \in S^{n-1}$, такие, что $|P(\varphi_0) - P(\varphi_1)| > (L+\varepsilon)|\varphi_0 - \varphi_1|$; тогда $P(\varphi_0) \neq P(\varphi_1)$, пусть при этом, например, $P(\varphi_0) > P(\varphi_1)$ и

$$P(\varphi_0) - P(\varphi_1) > (L + \varepsilon)|\varphi_0 - \varphi_1|.$$

$P(\varphi_0)$ —наибольшее производное число функции $f(x)$ в направлении ; поэтому найдется последовательность $\{x_m\}$ расположенных вдоль φ_0 точек, сходящихся к x_0 таких, что

$$f(x_m) - f(x_0) = [P(\varphi_0) + \delta_m] \cdot |x_m - x_0|,$$

где $\delta_m \to 0$ при $m \to \infty$ (δ_m может менять знак).

Рассмотрим симметричную относительно биссектрисы угла $\alpha = [\widehat{\varphi_0, \varphi_1}]$ последовательность $\{x'_m\}$ расположенных уже вдоль φ_1 точек, конечно, сходящихся к x_0; можно предположить, что вдоль $\{x'_m\}$ существует предел $\frac{f(x'_m)-f(x_0)}{|x'_m-x_0|}$, равный p; тогда

$$f(x'_m) - f(x_0) = [p + \delta'_m] \cdot |x'_m - x_0|;$$

здесь $\delta'_m \to 0$ при $m \to \infty$; очевидно, $\rho \leq P(\varphi_1)$. Вычитаем полученые равенства:

$$\begin{aligned} f(x_m) - f(x'_m) \quad &= [P(\varphi_0) + \delta_m] \cdot |x_m - x_0| - [p + \delta'_m] \cdot |x'_m - x_0| = \\ &= [P(\varphi_0) - p] \cdot |x_m - x_0| + [\delta_m - \delta'_m] \cdot |x_m - x_0| \end{aligned}$$

и

$$\frac{f(x_m) - f(x'_m)}{|x_m - x'_m|} = [P(\varphi_0) - p] \cdot \frac{|x_m - x_0|}{|x_m - x'_m|} + [\delta_m - \delta'_m] \cdot \frac{|x_m - x_0|}{|x_m - x'_m|}$$

Из равнобедренного треугольника $x_0 x_m x'_m$ с точностью до величин η_m, стремлящихся к нулю, получим:

$$\tfrac{f(x_m)-f(x'_m)}{|x_m-x'_m|} = [P(\varphi_0) - p]\tfrac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + (\delta_m - \delta'_m)\tfrac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \eta_m \geq$$

$$\geq [P(\varphi_0) - P(\varphi_1)] \cdot \tfrac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + (\delta_m - \delta'_m)\tfrac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \eta_m.$$

Но $|P(\varphi_0) - P(\varphi_1)| \geq (L+\varepsilon)|\varphi_0 - \varphi_1| = (L+\varepsilon)\cdot\alpha$, по предположению, и первое слагаемое последнего неравенства запишем так: $(L+\varepsilon) + (L+\varepsilon)\left[\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - 1\right] > L + \varepsilon$. Начиная с некоторого m, мы и получим:

$$\frac{f(x_m) - f(x'_m)}{|x_m - x'_m|} > L + \varepsilon,$$

что противоречит условию Липшица для f с константой L.

Итак, действительно, в наших условиях для каждого $\varepsilon > 0$ должно выполняться неравенство (1) для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in S^{n-1}$; устремляя ε к нулю, завершим доказательство нашего утверждения для $P(\varphi)$.

Аналогично проводя рассуждения для $Q(\varphi)$, мы и завершим доказательство теоремы.

После теоремы даже при таком сильном ограничении на функцию f как условие Липшица кажется неожиданной такая гладкая связь между крайними производными числами в различных направлениях;

и это — в каждой (!) точке, без исключения (которые мы привыкли раньше делать).

Теперь естественно частично обратить эту теорему. Именно, покажем, что любой регулярный континуум $K \subset C^n$ с липшицевыми краями $\rho = P(\varphi)$, $\rho = Q(\varphi)$, является цилиндрической контингенцией некоторой липшицевой функции.

Рассмотрим полярную систему координат $(r, (\varphi))$ в окрестности $(0,1) \times S^{n-1}$ начала координат. Возьмем функцию $r \sin(\ln r)$, и нуль при $r = 0$; эта функция липшицева на $[0, +\infty)$, так как для всех $r \in (0, +\infty)$ ее производная $|\sin(\ln r) + \cos(\ln r)| \leq 2$.

Нетрудно проверить теперь, что липшицева функция

$$f(r, \varphi) = \frac{P(\varphi) - Q(\varphi)}{2} r \sin(\ln r) + \frac{P(\varphi) + Q(\varphi)}{2} r$$

решает нашу задачу; лишь условие Липшица может возникнуть с измененной константой.

Итак, для липшицевой функции в каждой точке ее графика Γ цилиндрическая контингенция есть регулярный континуум K (цилиндрический "пояс"), ограниченный двумя липшицевыми краями $u = P(\varphi)$, $u = Q(\varphi)$. В точках дифференцируемости f классическая контингенция есть (касательная) гиперплоскость к Γ, а цилиндрическая — пересечение этой гиперплоскости с цилиндром $C^n = S^{n-1}(x) \times \overline{\mathbb{R}}^1$, т.е. некоторый эллипсоид с центром x. Оказывается, что в точке непрерывности отображения $A \to \operatorname{contg}_\Gamma^C A$ *к каждой* точке края этой контингенции можем коснуться таким эллипсоидом, который сам ей полностью принадлежит, т.е. каждая граничная точка цилиндрического пояса достижима изнутри некоторым эллипсоидом.

Докажем сначала одну простую лемму.

Л е м м а 1. *Пусть $q = I^2 = [0,1]^2$ — единичный квадрат и $e \subset q$ — произвольное его множество полной меры. Тогда найдется дуга L параболы, касающаяся оси Ox в точке $x = 0$ и пересекающая множество e по множеству полной линейной меры (относительно этой дуги).*

Д о к а з а т е л ь с т в о 1. Рассмотрим гладкий внутри q гомеоморфизм этого квадрата — тоже на единичный квадрат в плоскости (u, v):

$$\begin{cases} u = x \\ v = \sqrt{y} \end{cases} \qquad (\text{т. е. } F = x + i\sqrt{y}).$$

При этом семейство парабол $y = kx^2$ $(0 \leq k \leq 1)$ перейдет в семейство прямых $v = \sqrt{k}$ и образ d_1 криволинейного треугольника

$d = \{(x, y) : 0 \le y \le x^2\}$ будет треугольником $d_1 = \{(u, v) : 0 \le v \le u\}$. Так как F — гладкое отображение внутри d_1 с отличным от нуля якобианом, то образ e' множество $e \cap d$ будет также полной меры в d_1. Выбирая произвольную прямую из семейства $\{v = \sqrt{k}u\}$, пересекающую e' по множеству полной линейной меры, получим, что соответствующая ей парабола в d также пересекает e по такому же множеству.

Лемма доказана.

Из нее легко следует то, что нам потребуется далее, а именно: если в области $D \subset \mathbb{R}^n$ заданы множество $\mathcal{E}$ полной меры и произвольный прямолинейный отрезок $l \subset D$, то существует гладкая дуга $\lambda \subset D$ (например, дуга параболы), касающаяся l в его конце и пересекающая $\mathcal{E}$ по множеству полной линейной меры относительно λ.

Т е о р е м а 9. *Пусть $u = f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, липшицева функция и пусть точка A_0 ее графика Γ есть точка непрерывности отображения $A \to \operatorname{contg}^C_\Gamma A$. Тогда граничная точка контингенции $\operatorname{contg}^C_\Gamma A_0$ является предельной для точек $\operatorname{contg}^C_\Gamma A'$, где $A' \in D$ есть множество B' точек дифференцируемости функции f.*

Д о к а з а т е л ь с т в о 1. Мы уже знаем, что $\operatorname{contg}^C_\Gamma A_0$ есть цилиндрический пояс, ограниченный сверху и снизу липшицевыми краями $u = P(\varphi)$ и $u = Q(\varphi)$. Для доказательства теоремы нужно показать, что для любого направления φ верхний (нижний) предел производных чисел функции f в точках множества B' полной меры ее дифференциируемости, взятых в направлении, параллельном φ, совпадает с $u = P(\varphi)$ (с $u = Q(\varphi)$). Из непрерывности (полунепрерывности сверху) отображения $A \to \operatorname{contg}^C_\Gamma A$ легко следует, что

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} \frac{\partial f(x)}{\partial \varphi} \le P(\varphi),$$

где $x \to x_0 = \text{пр} A_0$ и $x \in B'$.

Если теорема неверна для некоторого φ_0, то это означает, что

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} \frac{\partial f}{\partial \varphi} < P(\varphi_0),$$

Пусть в окрестности $U(x_0)$ при некотором $\varepsilon > 0$ будет

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} \le P(\varphi_0) - \varepsilon, \quad \forall x \in B' \cap U.$$

Если L — дуга параболы, пересекающая B' по множеству полной меры, а φ_0 — касательное направление к дуге в точке x_0, то

$$\int\limits_{L:[x_0,x']} \frac{\partial f}{\partial s} ds = f(x') - f(x_0).$$

Но $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = (\mathrm{grad} f, \overline{\varphi^0})$, где φ — направление, касательное к L в соответствкющей точке $x \in L$, а $\overline{S}^0$ — единичный вектор в направлении φ. Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_0} = (\mathrm{grad} f, \overline{\varphi}_0^0)$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\partial f}{\partial \varphi_0} = (\mathrm{grad} f, \overline{\varphi}^0 - \overline{\varphi}_0^0) = |\mathrm{grad} f| \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2},$$

где $\alpha = [\widehat{\overline{\varphi}^0, \overline{\varphi}_0^0}]$. Так как $\alpha \to 0$ при $x' \to x_0$, $x' \in L$, то можем считать, что по дуге L имеем:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\partial f}{\partial \varphi_0}\right] < \frac{\varepsilon}{2}$$

Отсюда, с учетом неравенства

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_0} \leq P(\varphi_0) - \varepsilon,$$

получим:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} \leq P(\varphi_0) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Используя интеграл, получим:

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{|x' - x_0|} \leq P(\varphi_0) - \frac{\varepsilon}{2},$$

но это противоречит тому, что верхний предел справа вточности равен $P(\varphi_0)$.

Теорема доказана.

Полученный нами в целом результат можно красиво переформулировать в терминах сферических контингенций. В то время, как в точке дифференциируемости f цилиндрическая контингенция может быть одним из большого многообразия эллипсоидов — пересечений гиперплоскостей с цилиндром, — то сферическая контингенция всегда в этом случае является большой сферой S^{n-2}, которая для сферической геометрии играет роль гиперплоскости.

То, что мы получили выше, можно теперь сформулировать так:

Теорема 10. *Для произвольного многообразия* $\Gamma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *на резидуальном его подмножестве сферическая контингенция будет лишь двух типов:*

1) полная сфера S^n*;*

2) центрально-симметричный сферический пояс, с двумя сферически выпуклыми краями.

Понятно, что выпуклыми с точки зрения сферической геометрии при этом будут обе (центрально-симетрические) компоненты дополнения $S^{n-1} \setminus \mathrm{contg}_\Gamma^S x$.

В терминах цилиндрической контингенции можно высказать и такое следствие из доказанного нами:

Следствие. *Если в каждой точке* x *множества* $\mathcal{E} \subset D$ *не первой категории существует направление* φ_x*, для которого* $P(\varphi_x) = Q(\varphi_x)$*, то на множестве* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$*, где* $\mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}$ *— первой категории, имеем и равенство* $P(\varphi_x + \pi) = Q(\varphi_x + \pi)$*, причем в направлении* φ_x *функция* f *дифференцируема. При этом производные* f *в точках дифференцируемости* x' *в направлении* φ_x *непрерывны в точке* x.

Конечно, легко видеть, что сферическая контингенция $\mathrm{contg}_\Gamma^S x$ в этом случае является связкой гиперплоскостей с общей (одномерной) прямой, а в случае $n = 3$ сферическая контингенция $\mathrm{contg}_\Gamma^S x$ — двуугольник.

Наконец, стоит отметить, что же аналитически означает для самой функции $f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, центральная симметрия контингенций ее графика. Так как проекция центрально симетричной фигуры на любое линейное подпространство из $\mathbb{R}^{n+1}$ также центрально симетрична, то вывод возникает такой:

Для любой непрерывной функции $f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, на резидуальном множестве $\mathcal{E} \subset D$ имеет место следующее свойство: если a — производное число функции f в точке $x \in \mathcal{E}$, соответствующее последовательности $\{x_k\}$, $x_k \to x$, с полукасательной l в точке x, то найдется другая последовательность $\{x'_k\}$, $x'_k \to x$, с полукасательной $(-l)$, "дающая"то же произвольное число a.

Другими словами, для таких точек, производные числа функции в любой "половине"шаровой окрестности их совпадают (ср. правые и левые производные числа функций одного переменного).

Глава 3

Дифференциальные свойства действительных функций

.

1. Функции одного переменного.

Изучая дифференциальные свойства функций многих переменных, мы пришли к необходимости ввести понятие цилиндрической контингенции, как определенной компактификации пересечения *классической* контингенции графика Γ этой функции с определенным цилиндром. Убедились, что эта контингенция напрямую связана с предельными значениями отношений вида

$$\frac{f(x') - f(x)}{|x' - x|} \tag{1}$$

при $x' \to x$.

Рассмотрение отношений (1) оказалось оправданным сначала геометрически, а затем и аналитически: для липшицевой функции, например, верхние их пределы для каждой точки x представляют собой непрерывные (даже липшицевы) функции. Это само по себе кажется удивительным.

Мы привели несколько полезных утверждений и фактов, касающихся цилиндрических и сферических контингенций и связанных с ними соответствующих дифференциальных свойств функций $f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$.

Конечно, все эти понятия и факты переносятся и на случай $n = 1$ т. е. для функций одного переменного. Но именно в этом простейшем случае и для целей анализа оказывается возможным и нужным рассматривать не отношение (1), а "классические" разностные отношения

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (h = x' - x), \tag{2}$$

т. е. с точным учетом знака приращения h.

Легко перефразировать для этих измененных условий все прежние утверждения и факты.

Прежде всего, производным числом функции $f(x)$, $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^1$, в точке x мы назовем любое предельное значение уже отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h \to 0$; при этом производное число — левое, если оно получено при $h < 0$ и правое — при $h > 0$.

Нас будет интересовать множество всех производных чисел f в точке x. Поэтому рассмотрим множество $m_\varepsilon(x)$ всех значений отношения (2) при условии $0 < |h| < \varepsilon$ для $\varepsilon > 0$; $m_\varepsilon(x)$ будем рассматривать как подмножество числовой оси $O\xi$, дополненной бесконечно удаленными точками $\pm\infty$. Введем следующее множество

$$\mathfrak{m}_x = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{m_\varepsilon(x)}.$$

Легко показать, что множество $\mathfrak{m}_x$ совпадает с совокупностью всех производных чисел функции f в точке x.

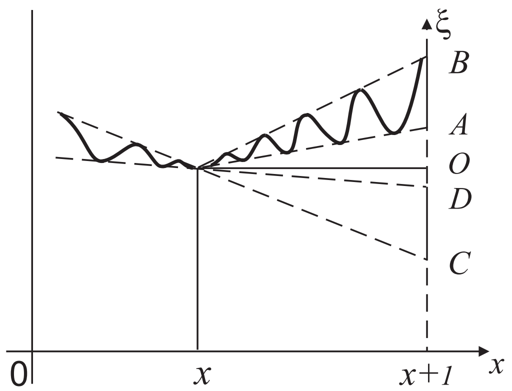

Рис. 3

Возьмем отдельно точку $x_0 \in (a,b)$. Так как $m_\varepsilon(x_0)$ есть непрерывный образ двух интервалов $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и $(x, x+\varepsilon)$, то это множество состоит, вообще говоря, из двух компонент; то же верно и для $\overline{m_\varepsilon(x_0)}$, а потому и для $\mathfrak{m}_{x_0}$. Другими словами, $\mathfrak{m}_{x_0}$ есть в общем случае объединение двух замкнутых отрезков $[A,B]$, $[C,D]$ "расширенной"оси $O\xi$: это —множество $\mathfrak{m}^+_{x_0} = [A,B]$ правых производных чисел и множество $\mathfrak{m}^-_{x_0} = [C,D]$ левых производных чисел функции f в точке x.

Цилиндр $C^1(x_0) = S^0(x_0) \times \overline{\mathbb{R}^1}$ представляет собой всего две образующие — пару вертикальных прямых $x = x_0 \pm 1$; нам будет удобно вместо двух этих прямых рассматривать только одну — правую (которою мы снова обозначим $O\xi$) и тогда $\mathfrak{m}_{x_0}$ возникает из $\operatorname{contg}^\Gamma_C x_0$

следующим образом: часть этой контингенции справа (на прямой $x = x_0 + 1$) просто совпадает с правыми производными числами $\mathfrak{m}^+_{x_0}$; для получения левых нужно взять множество на оси $O\xi$,центрально симметричное с $\mathrm{contg}^{\Gamma}_{C} x_0 \cap \{x = x_0 - 1\}$ это и будет $\mathfrak{m}^-_{x_0}$.

Итак, $\mathfrak{m}_x$ в общем случае есть объединение двух замкнутых отрезков оси $O\xi$. Наоборот, для любых замкнутых (конечных или бесконечных) отрезков оси $O\xi$ легко построить функцию, для которой множество производных чисел $\mathfrak{m}$ в некоторой точке совпадает с объединением этих отрезков. (черт. !!!)

Это говорит о том, что если рассматривать все точки области определения функции f, то для ее дифференциального поведения имеется огромное множество возможностей.

Но мы уже знаем, что если пренебрегать теми или иными подмножествами, то для остальной части ("подавляющей") отрезка возникает два-три куда более обозримых варианта.

Сформулируем следующую теорему:

Т е о р е м а 1. *Пусть $f(x)$, $x \in [a, b]$ — непрерывна. Тогда:*

1) исключая счетное множество точек из $[a, b]$, множество $\mathfrak{m}_x$ — связно;

2) исключая множество меры нуль, имеем два варианта:

$$\mathfrak{m}_x = \begin{cases} \overline{\mathbb{R}} \\ *(\textit{единственная точка}); \end{cases}$$

3) исключая множество первой категории, имеем варианты:

$$\mathfrak{m}_x = \begin{cases} \overline{\mathbb{R}} \\ [A, B]\,, -\infty \le A, B \le +\infty, \\ * \end{cases}$$

причем в этом случае множество правых производных чисел совпадает с множеством левых: $\mathfrak{m}^+_x = \mathfrak{m}^-_x$.

Первое утверждение теоремы следует из того, что $\mathfrak{m}^+_x = [\underline{f}^+, \bar{f}_+]$ и $\mathfrak{m}^-_x = [\underline{f}^-, \bar{f}_-]$ и из такого легко доказываемого факта [1]: для любой конечной функции $f(x)$ множество точек x, в которых

$$\bar{f}^+(x) < \underline{f}^-(x) \quad \text{или} \quad \bar{f}^-(x) > \underline{f}^+(x),$$

не более чем счетно.

Второе утверждение следует из классической теоремы о контингенциях применительно к графику функции $y = f(x)$.

Утверждение 3) есть следствие теоремы 7. гл. II.

В этой нашей теореме, как видно, появляются (для *различных* утверждений) все три ипостаси *доминирующих* множеств на $[a, b]$ о которых мы говорили выше.

Т е о р е м а 2. *Для каждой точки* $x_0 \in (a, b)$ *имеем:* $\bar{f}^+(x_0) \leq \overline{\lim\limits_{x\to x_0+0}} \bar{f}^+(x)$, $\underline{f}^+(x_0) \geq \underline{\lim\limits_{x\to x_0+0}})\underline{f}^+(x)$; *аналогичные неравенства для левых крайних производных чисел.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать первое неравенство.

Предположим, что $\bar{f}^+(x_0) > \overline{\lim\limits_{x\to x_0+0}} \bar{f}^+(x) = L$; для некоторого положительного δ будет: $\bar{f}^+(x_0) > L + 2\delta$. Найдется такое $\eta > 0$, что в точках интервала $(x_0, x_0 + \eta)$ имеем: $\bar{f}^+(x) < L + \delta$. Но тогда, в силу теоремы 3 (гл. I),

$$f(x_2) - f(x_1) \leq (L + \delta)(x_2 - x_1), x_1 < x_2; x_1, x_2 \in (x_0, x_0 + \eta)$$

В частности,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq L + \delta \quad \text{при} \quad x_0 < x < x_0 + \eta,$$

поэтому

$$\overline{\lim_{x\to x_0+0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq L + \delta,$$

чего нет по предположению. То же рассуждение для левой половины окрестности точки x_0 завершает доказательство теоремы.

Ясно, как изменить здесь детали для случая, когда $L = \pm\infty$.

Фактически, следствием доказанного является следующее утверждение:

Т е о р е м а 3. *Пусть* $f(x)$ — *ACG-функция на* $[a, b]$ *и* M — *множество точек существования асимптотической производной* $f'(x)$. *Тогда в каждой точке* $x_0 \in [a, b]$ *будут:* $\bar{f}^+(x_0) \leq \overline{lim_{M\ni x\to x_0}} f'(x)$ *и т. д.*

Действительно, в том месте доказательства предыдущей теоремы, где $\bar{f}^+(x) < L + \delta$, получим:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} (D) \int\limits_{x_0}^{x} \bar{f}^+(t) dt = \frac{1}{x - x_0} (D) \int\limits_{x_0}^{x} f'(t) \leq L + \delta,$$

а далее — как и раньше ((D) — символ интеграла Данжуа).

В дальнейшем эту теорему мы будем применять лишь для случая функций, удовлетворяющих условию Липшица. Легко показать, что в этом последнем случае неравенства теоремы 3 верны уже, если $x \to x_0$ лишь по множеству $Q(x_0)$, для которого x_0 есть точка плотности.

Выясним теперь вопрос о достижении равенства в приведенных выше неравенствах.

Рассматривая многозначное отображение $x \to \mathfrak{m}_x$, $x \in [a, b]$, мы из теорем 2, 3 §1 гл. II заключаем, что на резидуальном множестве в $[a, b]$ оно обладает свойством непрерывности (т.е., по-нашему, полунепрерывностью сверху и совпадения множеств правых и левых производных чисел). Легко видеть, что на этом же множестве достигаются и равенства в теоремах 2, 3 — это мы получаем, просто копируя их доказательства.

Например — в условиях теоремы 3, — если x_0 — точка непрерывности отображения $x \to \mathfrak{m}_{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{m}_x \equiv [\underline{f}^+(x_0), \bar{f}^+(x_0)] = [A, B]$, но при этом в точках дифференцируемости $\bar{M}$ вблизи x_0 будет $f'(x) < B - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, то и

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}(D)\int\limits_{x_0}^{x} f'(t) \leq L + \delta < B - \varepsilon,$$

и, значит, $\bar{f}^+(x_0) \leq B - \varepsilon$ — противоречие.

Другими словами, на некотором резидуальном множестве в $[a, b]$ отрезки $\mathfrak{m}_x$, "поглощая"все "соседние"производные числа, обладают тем свойством, что их концы "достижимы", так сказать, изнутри $\mathfrak{m}_x$ по точкам дифференцируемости функции f. Можно сказать еще иначе: в точках этого множества числа Дини являются полунепрерывными функциями (одни — сверху, другие — снизу). Что касается внутренних точек $\mathfrak{m}_x$, то можно привести следующий результат:

Т е о р е м а 4. *На некотором резидуальном множестве $\mathcal{E} \subset [a, b]$ имеет место следующее свойство: для каждого $x \in \mathcal{E}$ и каждой внутренней точки $\xi \in \mathfrak{m}_x$ найдется последовательность $\{x_k\}$, $x_k \to x$, такая, что $\xi \in \mathfrak{m}_{x_k}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Производные числа Дини $\bar{f}^+$,$\underline{f}^+$,$\bar{f}^-$,$\underline{f}^-$ являются B-измеримыми функциями на $[a, b]$, а потому существует резидуальное множество $\mathcal{E} \subset [a, b]$, для которого все ограничения этих функций непрерывны на $\mathcal{E}$ [2]. Можем, конечно, считать дополнительно, что на этом же множестве отображение $x \to \mathfrak{m}_x$ непрерывно и $\mathfrak{m}_x^+ = \mathfrak{m}_x^-$. Непрерывность семейства отрезков $\mathfrak{m}_x \equiv [\underline{f}^+(x), \bar{f}^+(x)]$ и завершает доказательство теоремы.

Прежде чем переходить к построению примеров, докажем еще одно предложение.

Т е о р е м а 5. *Если для некоторого множества $\mathcal{E}$ не первой категории в $[a,b]$ множества производных чисел $\mathfrak{m}_x$, $x \in \mathcal{E}$, не являются полными прямыми, то найдется отрезок $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, на котором функция $f(x)$ имеет ограниченую вариацию (и, следовательно, дифференцируема почти всюду на этом отрезке).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Занумеруем все рациональеые числа:

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

и обозначим через $\mathcal{E}_{mn}$ множество точек $x \in (a,b)$, для которых имеем:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - r_n\right| \geq \frac{1}{m}$$

для всех h,$0 < |h| < \frac{1}{m}$. Мы уже знаем, что каждое $\mathcal{E}_{mn} \in (a,b)$ замкнуто, а так как

$$\mathcal{E} = \bigcap_{m,n} \left(\mathcal{E}_{mn} \bigcap \mathcal{E}\right),$$

то, во-первых, можем считать, что $\mathcal{E}$ всюду плотно на некотором отрезке из (a,b) (ведь оно — не первой категории); во-вторых, найдется пара чисел m,n, для которых $\mathcal{E}_{mn} \cap \mathcal{E}$ будет плотно на некоторой порции (α,β) множества $\mathcal{E}$, а потому $\mathcal{E}_{mn}$ явится плотным на $[\alpha,\beta]$; в силу замкнутости этого множества $[\alpha,\beta] \subset \mathcal{E}_{mn}$. Взяв отрезок $[\alpha,\beta]$ длины, меньшей $\dfrac{1}{m}$, получим, что функция $y = \varphi(x) = f(x) - r_n \cdot x$ осуществляет взаимнооднозначное отображение отрезка $[\alpha,\beta]$ в ось y-ов; в самом деле, по определению $\mathcal{E}_{mn}$ для любых $x', x'' \in [\alpha,\beta]$ получим:

$$\left|\frac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'}\right| = \left|\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} - r_n\right| \geq \frac{1}{m} > 0.$$

Но это означает, что $\varphi(x)$ — строго монотонна, а $f(x) = \varphi(x) + r_n x$ — ограниченной вариации на $[\alpha,\beta]$, и т. д.

Приведем сейчас одно утверждение, которое мы назовем обобщенной теоремой Лагранжа:

Т е о р е м а 6. *Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и в каждой точке $x \in [a,b]$ множество производных чисел $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_x^+ \subset \mathfrak{m}_x^-$ — связно, тогда существует c, такое, что $a < c < b$ и*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \delta(c) \in \mathfrak{m}_c;$$

при этом мы можем считать $\delta(c)$ как правым, так и левым производным числом f в точке c.

Доказательство простое — от противного. Пусть, например, значение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = c$ не принадлежит ни одному из $\mathfrak{m}_x$, $x \in [a,b)$. Но тогда вспомогательная функция $\varphi(x) = f(x) - f(a) - c(x-a)$ не имеет производных чисел равных нулю, и, следовательно, осуществляет открытое отображение в каждой точке, а потому просто строго монотонна на $[a,b]$, чего нет: $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Приведем теперь несколько примеров.

Пример 1. Возьмем на отрезке $[0,1]$ множество $\mathcal{E}_0$ такое, что оно само и его дополнение имеют положительную меру в каждом интервале из $[0,1]$. Известно, что такие множества образуют в пространстве измеримых множеств из $[0,1]$ резидуальное подмножество (т. е. таких множеств среди других — подавляющее большинство в смысле категории). Полагаем $g(x) = 1$ на $\mathcal{E}_0$ и $g = 0$ на $C\mathcal{E}_0$; рассмотрим функцию $f(x) = \int\limits_0^x g(t)dt$.

По предыдущему, в силу теорем 3, 4 на некотором резидуальном множестве $\mathcal{E}$ имеем:

$$\bar{f}^+(x) = 1, \underline{f}^+ = 0$$

и для $x \in \mathcal{E}$ множество $\mathfrak{m}_x \equiv [0,1]$.

Так как, очевидно, функция $f(x)$ строго возрастает, то для обратной функции на резидуальном множестве $f(\mathcal{E})$ на $[0, f(1)]$ получим в качестве множеств $\mathfrak{m}$ бесконечные отрезки $[1, \infty]$.

Отметим еще, что паратингенция графика $B(f)$ в этом случае в каждой точке есть пара вертикальных углов со сторонами $y = \pm x + \text{const}$.

Еще замечание к построенному примеру.

Если взять график непрерывной неубывающей функции на отрезке, то в каждой его точке второй и четвертой квадранты (при перенесении системы координат xOy) не содержат внутри его точек. Это означает, что тот же график представляет собой график липшицевой функции с константой Липшица $L = 1$ относительно новой системы координат $x'Oy'$, полученной поворотом старой на угол $\frac{\pi}{4}$. Так вот, нетрудно доказать, что график строго возрастающей сингулярной функции (т.е. производная которой почти всюду равнв нулю) является в точности графиком функции относительно $x'Oy'$ как в предыдущем примере.

Нетрудно показать, что это соответствие между функциями взаимно однозначно; это могло бы быть сформулировано следующим образом: каждой строго возрастающей сингулярной функции соответствует множество на некотором отрезке, которое само и его дополнение — положительной меры в каждом подинтервале этого отрезка и, наоборот, каждому такому множеству соответствует строго возрастающая сингулярная функция.

Пример 2. Известно [3], что какое бы ни было множество $\mathcal{E} \subset [0,1]$ меры нуль, существует строго возрастающая функция $f(x)$, $x \in [0,1]$, для которой $f'(x) = +\infty$, $x \in \mathcal{E}$. Взяв множество $\mathcal{E}$ резидуальным на $[0,1]$, мы осуществим еще одну возможность теоремы 1.

Пример 3. Наконец, любая нигде не дифференцируемая функция $f(x)$, $x \in (a,b)$, в силу теоремы 5, обладает в качестве множеств $\mathfrak{m}_x$ на резидуальном множестве — полными прямыми.

Приведенные примеры и показывают, что все возможности, указанные в теореме 1, действительно, реализуются.

Еще один пример.

Возьмем на отрезке $[a,b]$ совершенное нигде не плотное множество P положительной меры в каждой своей порции и рассмотрим его функцию меры:

$$P(x) = \int\limits_a^x c_P(t)dt = \operatorname{mes}\{P \cap [a,x]\},$$

где $c_P(x)$ — характеристическая функция множества P.

Возьмем резидуальное подмножество $\mathcal{E} \subset P$ точек непрерывности вдоль P "больших"$\mathfrak{m}_x$, а не относительно множества P. Так как вблизи каждой точки $x \in \mathcal{E}$ есть точки, где $f' = 0; 1$, то больше чем 1 и меньше чем 0 производных чисел у $P(x)$ быть не может, $\mathfrak{m}_x \equiv [0,1]$ для всех $x \in \mathcal{E}$.

Другими словами, в точках резидуального подмножества нигде не плотного совершенного множества положительной меры плотность абсолютно неопределенная: для любого $\lambda \in [0,1]$ найдется система отрезков $[x, x+h_n]$, $h_n \searrow 0$, для которых

$$\frac{\operatorname{mes}\{P \cap [x, x+h_n]\}}{h_n} \to \lambda.$$

Остановимся еще несколько на понятии паратингенции в нашем случае. Так как она всегда является центрально-симметричным множеством прямых, то иследование ее для графика $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, можно свести к изучению функции двух переменных $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ в квадрате $[a,b]\times[a,b]$. Но ее значения в точках, симметричных относительно диагонали $y=x$, совпадают, поэтому достаточно ее рассматривать в треугольнике $\triangle$ с $\{y<x\}$.

Из определения паратингенции следует, что если она не является полной плоскостью в некоторой точке дуги $y=f(x)$, то целая окрестность этой точки представляет график липшицевой функции при, возможно, другой системе координат. Легко видеть, что для выяснения структуры паратингенции достаточно предположить, что уже сама функция f — липшицева.

Замыкание связного графика функции $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ над треугольником $\triangle$ есть ограниченый континуум над $\overline{\triangle}$; из выпуклости $\triangle$ следует, что каждая вертикаль $x=y=\mathrm{const}$ пересекает его по связному (и ограниченному) отрезку, который есть пересечение паратингенции с осью $O\xi$, проведенной правее данной точки на $+1$. А это означает, что паратингенция всегда представляет собой пару вертикальных углов.

Нетрудно показать, что и, наоборот, любая пара вертикальных углов может служить паратингенцией в некоторой точке графика липшицевой функции. В самом деле, уже для функции $y=|x|$ паратингенция ее графика в точке $x=0$ есть пара вертикальных углов, ограниченных прямыми $y=\pm x$, общая биссектриса которых — ось Ox. Теперь, подбирая соответственно константы для функции $y=k|x|+lx$, можно достичь того, что паратингенция в точке $x=0$ будет любой парой вертикальных углов с ограниченными угловыми коэффициентами граничных прямых. Для случая же неограниченых производных чисел вместо первоначальной функции $|x|$ можно воспользоваться, например, такой:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{при} \quad x\geq 0\\ kx & \text{при} \quad x\leq 0.\end{cases}$$

В этих примерах контингенция каждого графика в точке $x=0$ состоит всего из двух лучей, в то время как паратингенция занимает целую область. Но можно построить пример, когда эти множества лучей совпадают: например, графиком первоначальной функции $f(x)$ можно взять бесконечно-звенную ломаную с вершинами попеременно на прямых $y=\pm x$, такую, что угловые коэффициенты ее звеньев стремятся к ± 1 при стремлении к $x=0$.

2. Теорема Ярника

Возникает вопрос: может ли быть так, что для определенной непрерывной функции $f(x)$ у нее в каждой точке были бы всевозможные производные числа? Т. е., может ли быть так, что $\mathfrak{m}_x = \overline{\mathbb{R}}$ всюду на отрезке $[a, b]$?

Мы и приведем сейчас доказательство одной поучительной теоремы.

Обозначим через C пространство непрерывных функций на отрезке $y = [0, 1]$.

Т е о р е м а 7. *Подмножество $A \subset C$ функций, для которых в каждой точке $x \in (0, 1)$ множество производных чисел $\mathfrak{m}_x$ совпадает со всей прямой $\overline{\mathbb{R}}$, является резидуальным в C.*

Другими словами, таких функций — подавляющее большинство среди всех остальных, более или менее "приличных".

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим сначала некоторые вспомогательные функции.

Пусть $r > 0$ и $0 < s < \frac{1}{2}$; обозначим целую часть $\left[\frac{1}{2s}\right]$ через N и определим на $[0, 1]$ "пилообразную"функцию $\varphi_{r,s}(x)$ следующим образом:

$\varphi_{r,s}(x) = 0$ при $x = 2ls$ $(l = 0, 1, \ldots, N)$
$\varphi_{r,s}(x) = r$ при $x = (2l + 1)s$ $(l = 0, 1, \ldots, N - 1)$
$\varphi_{r,s}(x)$ линейна при $ls \le x \le (l + 1)s$ $(l = 0, 1, 2, \ldots, 2N - 1)$
$\varphi_{r,s}(x) = 0$ при $2Ns \le x \le 1$.

Приступим к доказательству нашей теоремы.

Итак, обозначим через S множество функций $f(x)$ из C со следующим свойством: существует хотя бы одно $x \in (0, 1)$ и одно значение a такие, что a не есть производное число f в точке x: $a \notin \mathfrak{m}_x$; нам нужно показать, что S — первой категории в C.

Для целого n и рациональных $\alpha, \beta, \alpha < \beta$, обозначим через S^n множество тех $f(x)$, для которых при некотором $x, \frac{1}{n} \le x \le 1 - \frac{1}{n}$, и всех $h, 0 < |h| < \frac{1}{n}$, имеет место какое-либо из неравенств (а, значит, в точности одно)

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \le \alpha, \quad \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \ge \beta.$$

Легко видеть, что $S^n_\alpha\beta$ замкнуто и, что

$$S = \bigcup_{n,\alpha,\beta} S^n_\alpha\beta.$$

Нам достаточно доказать, что каждое слагаемое в этом объединении — нигде не плотно в C. А для этого нужно показать, что в произвольном шаре $K \subset C$ и при фиксированных n, α, β найдется элемент $f(x)$, не принадлежащий $S_\alpha^n\beta$.

Возьмем в K некоторый полином $p(x)$: при некотором $r > 0$ каждая функция $p(x) + \varphi(x)$ при $\|\varphi\| \le r$ принадлежит K. Пусть, далее, $\|p'(x)\| = q$. Выберем теперь r таким, чтобы:

1) $0 < s < \frac{1}{2}$, $4s < \frac{1}{n}$, $\frac{r}{2s} > q + \left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|$;

2) для каждого $x \in [0,1]$ и $h, 0 < |h| \le 2s$, было:

$$\left|\frac{p(x+h) - p(x)}{h} - p'(x)\right| < \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Вот для этих полученных r,s возьмем функцию $\varphi_{rs}(x)$.

Пусть $\frac{1}{n} \le x \le 1 - \frac{1}{n}$. Когда h изменяется в отрезке $0 < h \le 2s$, то $\varphi_{rs}(x+h) - \varphi_{rs}(x)$ пробегает в точности интервал $(-\varphi_{rs}(x), r - \varphi_{rs}(x))$; поэтому отношение

$$\frac{\varphi_{rs}(x+h) - \varphi_{rs}(x)}{h}$$

принимает по меньшей мере все значения из интервала

$$\left(-\frac{\varphi_{rs}(x)}{2s}, \frac{r - \varphi_{rs}(x)}{2s}\right).$$

Иначе: если h пробегает отрезок $0 > h \ge -2s$, то это отношение принимает все значения из интервала

$$\left(-\frac{r - \varphi_{rs}(x)}{2s}, \frac{\varphi_{rs}(x)}{2s}\right).$$

Отметим, что $\max(\varphi_{rs}(x), r - \varphi_{rs}(x)) \ge \frac{r}{2}$, поэтому при $0 < |h| \le 2s$ наше отношение принимает по крайней мере все значения из интервала $\left(-\frac{r}{4s}, \frac{r}{4s}\right)$, а потому и интервала

$$\left(-q - \frac{|\alpha+\beta|}{2}, q + \frac{|\alpha+\beta|}{2}\right).$$

Найдется поэтому такое $h, 0 < |h| \le 2s$ (а, значит, и $h, 0 < |h| \le \frac{1}{n}$), для которого

$$\frac{\varphi_{rs}(x+h) - \varphi_{rs}(x)}{h} = -p'(x) + \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Но для этого h имеем:

$$\left|\frac{p(x+h) + \varphi_{rs}(x+h) - p(x) - \varphi_{rs}(x)}{h} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right| < \frac{\beta - \alpha}{2}$$

и

$$\alpha < \frac{p(x+h) + \varphi_{rs}(x+h) - p(x) - \varphi_{rs}(x)}{h} < \beta.$$

А это и означает, что функция $p(t) + \varphi_{rs}(t)$ принадлежит шару K, но не принадлежит множеству $S^n_{\alpha\beta}$.

Теорема доказана.

Оказывается [4], можно предположить, что все функции из класса A этой теоремы обладают следующими дополнительными свойствами:

1) для почти всех точек отрезка $[0,1]$ контингенция графика функции есть полная плоскость;

2) для каждого $x \in [0,1)$ $\max(|\bar{f}^+|, |\underline{f}^+|) = +\infty$;

3) имеются четыре несчетных в каждом интервале из $[0,1]$ множеств, в каждом из которых существует правая или левая производные, равные $+\infty$, или $-\infty$.

На чертеже приведены некоторые типичные точки подобной функции.

Мы приведем пример функции, о которых речь в теореме Ярника, принадлежащий А.Д. Мышкису [5] и, насколько известно автору, явившийся первым таким примером.

Пример А.Д. Мышкиса. Воспользовавшись образцом классической функции Вейерштрасса, будем искать упомянутую только что функцию $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2\pi x}{\alpha_n}}{2^n} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

где $\alpha_1 = 1$, $\frac{\alpha_n}{4\alpha_{n+1}} = \beta_n$ — натуральное нечетное $(n = 1, 2, \ldots)$; дальнейшие условия на β_n будут наложены позже.

Тогда при любом натуральном p целом нечетном k

(3)
$$\frac{\varphi(x + k\alpha_{p+1}) - \varphi(x)}{k\alpha_{p+1}} = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{\cos[2\pi(x + k\alpha_{p+1})/\alpha_n] - \cos(2\pi x/\alpha_n)}{2^n k\alpha_{p+1}} +$$
$$+ \frac{\cos[2\pi(x + k\alpha_{p+1})/\alpha_p] - \cos(2\pi x/\alpha_p)}{2^p k\alpha_{p+1}} = A_1 - A_2.$$

Применяя формулу для разности косинусов, имеем

$$|A_1| \leq \sum_{n=1}^{p-1} \frac{2\pi|k|\alpha_{p+1}}{\alpha_n 2^n |k|\alpha_{p+1}} \leq \frac{\pi(p-1)}{\alpha_{p-1}2^{p-2}} \tag{4}$$

($p \geq 2$, $A_1 = 0$ при $p = 1$). Полагая $k = l\beta_p$ ($l = -3, -1, 1, 3$), получаем для A_2

$$A_2 = \frac{\cos(2\pi x/\alpha_p + \pi l/2) - \cos(2\pi x/\alpha_p)}{2^{p-2} l\alpha_p}.$$

Однако непрерывная периодическая с периодом 2π и положительна» (в чем легко убедиться, рассматривая отрезки $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$, $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ и полагая соответственно l, равным -3, 3, 1, -1) функция

$$\psi(x) = \max_l \left\{\frac{\cos(x + \pi l/2) - \cos x}{l}\right\} \quad (l = -3, -1, 1, 3)$$

имеет положительный минимум μ. Если же определить

$$\chi(x) = \min_l \left\{\frac{\cos(x + \pi l/2) - \cos x}{l}\right\} \quad (l = -3, -1, 1, 3),$$

то $\chi(x) = -\psi(x + \pi)$, т. е. $\chi(x)$ имеет отрицательный максимум $-\mu$. Значит, при любом x из четырех значений A_2 найдется по крайней мере одно, $\leq -\mu/2^{p-2}\alpha_p$, и по крайней мере одно, $\geq \mu/2^{p-2}\alpha_p$, а, потому, если принять

$$\beta_p \geq \frac{\pi p}{8\mu} \quad (p = 1, 2, \ldots), \text{ т. е. } \frac{\pi(p-1)}{\alpha_{p-1}2^{p-2}} \leq \frac{\mu}{2^{p-3}\alpha_p} \ (p \geq 2), \tag{5}$$

то из (3) и (4) следует, что при $k = l\beta_p$ четырех значений левой части (3) (при $l = -3, -1, 1, 3$) найдется по крайней мере одно, меньшее $-\mu/2^{p-3}\alpha_p$, и по крайней мере одно, большее $\mu/2^{p-3}\alpha_p$. Заметим, что при таких k

$$\frac{\varphi(x + k\alpha_{p+1}) - \varphi(x)}{k\alpha_{p+1}} = \frac{\varphi(x + l\alpha_p/4) - \varphi(x)}{l\alpha_p/4} \quad (l = -3, -1, 1, 3). \tag{6}$$

С другой стороны, разность значений (3) для двух соседних нечетных k по абсолютной величине не превосходит

$$\sum_{n=1}^{p} \left| \frac{\cos[2\pi(x + (k+2)\alpha_{p+1})/\alpha_n] - \cos(2\pi x/\alpha_n)}{2^n(k+2)\alpha_{p+1}} - \right.$$
$$\left. - \frac{\cos[2\pi(x + k\alpha_{p+1})/\alpha_n] - \cos(2\pi x/\alpha_n)}{2^n k\alpha_{p+1}} \right|. \tag{7}$$

Однако функция

$$\frac{\cos[2\pi(x+y)/\alpha_n] - \cos(2\pi x/\alpha_n)}{2^n y} = 2^{(1-n)} \sin[\pi(2x+y)/\alpha_n] \times \\ \times \frac{\sin(\pi y/\alpha_n)}{y}$$

при фиксированных натуральных n и $1/\alpha_n$ удовлетворяет на всей плоскости x, y с вырезанной прямой $y = 0$ условию Липшица с единой константой. Значит, если число p и числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ уже выбраны, то за счет уменьшения α_{p+1} (т. е. увеличения β_n) можно сделать сумму (7) равномерно по x, k как угодно малой, например меньшей $2/p$. Выбирая β_p так, чтобы кроме этого условия имело место и неравенство (5), и пользуясь оценкой отношения (6), мы получаем, что при любом x отношение

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \quad (0 < |h| \leq 3\alpha_p/4)$$

во всяком случае содержит $\frac{1}{p}$-сеть для отрезка $t_p = [-\mu/2^{p-3}\alpha_p]$. Но $\alpha_p \leq 1/4^{p-1}$, потому отрезок t_p при $p \to \infty$ обоими концами уходит в бесконечность. Отсюда и следует наше утверждение о свойстве функции $\varphi(x)$.

Отметим, что из доказанного свойства функции $\varphi(x)$ вытекает и такое свойство: в любой окрестности любой точки x отношение $\Delta\varphi/\Delta x$ принимает все значения, за исключением, быть может, одного (зависимого от x).

Как мы уже говорили выше, для $\varphi(x)$ с такими свойствами функция комплексного переменного $f(z) = \varphi(x)$ также обладает всеми производными числами в каждой точке z-плоскости, т. е. $\mathfrak{M}_z$ для каждого z есть расширенная плоскость Z. Функция $F(z) = x + i[y - \varphi(x)] = z - i\varphi(x)$ однолистна на всей плоскости и обладает этим же свойством.

3. Об одной задаче Н.Н. Лузина.

Задача нахождения примитивных функций формулируется следующим образом: "Найти функцию $\Phi(x)$, имеющую данную функцию $f(x)$ своей производной."

Впервые Коши решил эту задачу для непрерывных функций f на отрезке. Но его метод не подходил для случая разрывных f. Возник ряд работ, позволяющих определить примитивную для более широкого класса задаваемых функций f.

Более общую задачу Н.Н. Лузин поставил следующим образом:

1. Найти необходимые и достаточные условия для f, чтобы существовала непрерывная функция Φ, для которой $\Phi'(x) = f(x)$ почти всюду.

2. Зная, что эти условия удовлетворены для f, найти Φ.

Н.Н. Лузин сам же и нашел решение этой задачи. Именно, в случае 1. такими условиями явились для f измеримость и конечность почти всюду. Приводится конструкция одной из функций Φ, дающей в этом случае решение и 2.

Тем самым 1. и 2. были решены для случая множества полной меры. Но это множество оказывается, в общем случае, множеством первой категории. Н.Н. Лузиным был поставлен вопрос: "При каких условиях f может служить производной некоторой непрерывной функции Φ в точках множества второй категории, а точнее — резидуального множества?"Решение этого вопроса принадлежит Е.М. Ландису, которое он сформулировал в виде следующей теоремы [6]:

Для того, чтобы функция $f(x)$, $x \in [a, b]$, являлась производной непрерывной функции $\Phi(x)$ на резидуальном множестве, необходимо и достаточно чтобы она была измерима по отношению к свойству Бэра.

Мы приведем решение этой задачи в более простых терминах, одновременно дополнив и саму формулировку. Именно, мы докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а 8. *Для того, чтобы $f(x)$ была производной некоторой непрерывной функции $\Phi(x)$ на резидуальном множестве, необходимо и достаточно, чтобы на некотором резидуальном же множестве $\mathcal{E}$ ограничение $f\big|_{\mathcal{E}}$ было непрерывным. При этом, если такая f задана, то функцию Φ можно предположить AC-функцией (т.е. абсолютно непрерывной).*

Заметим сразу, что мы допускаем для f и бесконечные значения, так, что непрерывность мы понимаем в обобщенном смысле.

В упомянутой теореме Лузина функция $f(x)$ задана на всем отрезке $[a, b]$, но значение ее на множестве меры нуль нас не интерисуют — теорема справедлива при любых таких значениях. То же относится и к нашей теореме: нас интересуют лишь значения $f(x)$ на резидуальном множестве $\mathcal{E} \subset [a, b]$ и "поведение"f на $\mathcal{E}$ — при любых значениях ее вне $\mathcal{E}$ теорема будет справедлива.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства необходимости условия предположим, что $\Phi'(x) = f(x)$ на резидуальном множестве $\mathcal{E}_1 \subset [a, b]$. По теоремам гл. II существует резидуальное множество $\mathcal{E}_2 \subset [a, b]$ точек непрерывности отображения $x \to \mathfrak{m}_x(\Phi)$. Так как на множестве $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$, также резидуальном, функция Φ обладает производной $\Phi'(x) = f(x)$ ($\equiv \mathfrak{m}_x$), то отсюда и следует, что $f\big|_{\mathcal{E}}$ непрерывна.

Доказательство достаточности мы сведем к нескольким леммам; некоторые из них аналогичны леммам Лузина.

Л е м м а 1. *Пусть $f(x) = +\infty$ на некотором резидуальном множестве в $[a, b]$. Тогда существует $AC\mathcal{G}$-функция $\Phi(x)$, для которой $\Phi'(x) = f(x)$ также на резидуальном множестве.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество M типа $\mathcal{G}_\delta$, плотно на $[a, b]$ и меры нуль (ср. с примером к теореме 7). Тогда можем положить $M = \bigcap\limits_n \mathcal{G}_n$, где $\mathcal{G}_n$ — открытое множество, $\mathcal{G}_{n+1} \subset \mathcal{G}_n$, и $\mathrm{mes}\mathcal{G}_n < \frac{1}{2^n}$. Введем функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} n & \text{для} \quad x \in \mathcal{G}_n \setminus \mathcal{G}_{n-1} \\ 0 & \text{для} \quad x \in [a, b] \setminus \mathcal{G}_1 \\ +\infty & \text{на} \quad M = \bigcap\limits_n \mathcal{G}_n \end{cases}$$

Эта функция суммируема; в нашем случае это равносильно сходимости ряда $\sum\limits_n n\mathrm{mes}\{\varphi \geq n\}$. Имеем: $\mathrm{mes}\{\varphi \geq n\} = \mathrm{mes} \sum\limits_{m>n} \{\varphi \geq m\} < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots < \frac{1}{2^{n-1}}$; отсюда и из сходимости ряда $\sum\limits_n \frac{n}{2^{n-1}}$ следует суммируемость $\varphi(x)$. Положим, далее,

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x \varphi(t)dt.$$

Каждая точка $x \in M$ является внутренней точкой для множества $\{\varphi(x)n\}$ при любом n и, следовательно, для этих точек существует $\Phi'(x)$, равная $+\infty$.

Конечно, ограничение $\Phi'\big|_M$ есть константа, равная $+\infty$, а потому в обобщенном смысле — непрерывно. Нетрудно показать (хотя это и не обязательно: достаточно напрямую пользоваться теоремой 7), что в точках M имеет место непрерывность отображения $x \to \mathfrak{m}_x$ относительно <u>всего</u> отрезка $[a, b]$. Очевидно, что в точках резидуального множества $M \cap \{f = +\infty\}$ также $\Phi'(x) = +\infty = f(x)$.

Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Пусть $f(x)$ измеримая и ограниченная функция на $[a, b]$, непрерывная в точках множества $\mathcal{E} \subset [a, b]$. Тогда существует AC-функция $\Phi(x)$, такая, что $\Phi'(x) = f(x)$ на множестве $\mathcal{E}$.*

Доказательство сразу дает рассмотрение интеграла

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

который, как известно, в точках непрерывности подинтегральной функции удовлетворяет нужному равенству $\Phi'(x) = f(x)$.

В дальнейшем мы будем строить первообразную на частичных отрезках из $[a, b]$. Следующие две леммы обезпечивают возможность "склейки"ее "частей"с сохранением непрерывности.

Лемма 3. *Какова бы ни была AC-функция $\Phi(x)$, данная на отрезке $[a, b]$, существует на этом отрезке другая AC-функция $\Phi_0(x)$, обладающая следующими свойствами:*

1) $\Phi_0(x) = 0$ на плотном открытом множестве $M \subset [a, b]$;

2) $\Phi_0(a) = \Phi(a)$,$\Phi_0(b) = \Phi(b)$;

3) $|\Phi(x) - \Phi_0(x)| < \varepsilon$ на $[a, b]$, где $\varepsilon > 0$ — произвольно мало.

Доказательство. Возьмем сначала на отрезке $[0, 1]$ функцию меры $m(x)$ некоторого нигде не плотного на $[0, 1]$ совершенного множества p положительной меры в каждой своей порции:

$$m(x) = \int_0^x c_p(t)dt = \mathrm{mes}\{p \cap [0, x]\},$$

где $c_p(x)$ — характеристическая функция множества p. Неубывающая функция $m(x)$ удовлетворяет условию Липшица и $m'(x) = 0$ во всех точках всюду плотного открытого множества $[0, 1] \setminus p$.

Разделим отрезок $[a, b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

так, чтобы на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ колебание функции $\Phi(x)$ было меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

Далее, определим теперь на $[a, b]$ AC-функцию $\Phi_0(x)$, задав ее на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ следующим образом:

$$\Phi_0(x) = \frac{[\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})]}{\mathrm{mes} p} \cdot m\left(\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right) + \Phi(x_{k-1}).$$

Из того, что $m'(x) = 0$ на плотном открытом множестве $[0, 1] \setminus p$, следует, что и $\Phi_0'(x) = 0$ на том же множестве и условие 1) теоремы выполнено.

Из определения $\Phi_0(x)$ следует, что $\Phi_0(x_{k-1}) = \Phi(x_{k-1})$, $\Phi_0(x_k = \Phi(x_k$, а также условие 2) леммы

Наконец, пусть $x \in [a, b]$ — произвольная точка и пусть при этом $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Учитывая монотонность функции $\Phi_0(x)$ на этом отрезке, получим, получим:

$$|\Phi(x) - \Phi_0(x)| = |\Phi(x) - \Phi(x_k) - \Phi_0(x) + \Phi_0(x_k) + \Phi(x_k) - \Phi_0(x_k)| \leq$$

$$\leq |\Phi(x) - \Phi(x_k)| + |\Phi_0(x) - \Phi_0(x_k)| + |\Phi(x_k) - \Phi_0(x_k)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + < \tfrac{\varepsilon}{2} + 0 = \varepsilon.$$

Лемма доказана. Ее можно было бы назвать леммой о кусочно-монотонной апроксимации.

Л е м м а 4. Пусть $\Psi(x)$ — AC-функция на $[a, b]$ и $\Psi'(x) = f(x)$ на резидуальном множестве. Тогда существует другая AC-функция $\Phi(x)$ на $[a, b]$ со следующими свойствами:
1) $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$;
2) $|\Phi(x)| \leq b - a$;
3) $\Phi'(x) = f(x)$ на резидуальном множестве.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем функцию $\Phi(x) = \Psi(x) - \Phi_0(x)$, где $\Phi_0(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям предыдущей леммы относительно функции $\Psi(x)$.

Тогда $\Phi_0(a) = \Psi(a)$, $\Phi_0(b) = \Psi(b)$ и $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$.

Так как число $\varepsilon > 0$ в этой лемме было произвольно, то возьмем его равным $b - a$; тем самым выполнив условие 2) нашей леммы.

Наконец, по условию леммы равенство $\Phi'(x) = f(x)$ выполняется на некотором резидуальном множестве $M_0 \subset [a, b]$, функция же $\Phi_0(x)$ имеет нулевую производную на плотном открытом множестве $\mathcal{G} \subset [a, b]$. Но тогда на резидуальном множестве $M = M_0 \cap \mathcal{G}$ будем иметь: $\Phi'(x) = \Psi'(x) - = \Phi_0'(x) = \Psi'(x) = f(x)$.

Лемма 4 доказана.

Вспомним теперь, что по условию теоремы $f\Big|_{\mathcal{E}}$ — непрерывна (в обобщенном смысле). Это означает, что каждое из множеств $\mathcal{E}_{+\infty} = \mathcal{E}_x\{f = +\infty\}$, $\mathcal{E}_{-\infty} = \mathcal{E}_x\{f = -\infty\}$ замкнуто в $\mathcal{E}$. Поэтому существует система $\mathcal{G}_1$ пересекающихся интервалов, образующих всюду плотное на $[a, b]$ открытое множество, на каждом из которых множество $\mathcal{E}_{+\infty}$ либо совпадает с некоторой порцией множества $\mathcal{E}$, либо нигде не плотно (на $\mathcal{E}$, а, значит, и в интервале).

Аналогично определяем систему $\mathcal{G}_2$ для $\mathcal{E}_{-\infty}$.

Рассмотрим открытое (и плотное на $[a, b]$) множество $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$. Соберем все составляющие интервалы из $\mathcal{G}$, в которых либо $\mathcal{E}_{+\infty}$, либо $\mathcal{E}_{-\infty}$ совпадают с $\mathcal{E}$. Тогда по лемме 1 в каждом из этих интервалов мы можем построить AC-функцию $\Phi(x)$, которая на резидуальном множестве в нем имеет производную $\Phi'(x) = \pm\infty$ $(= f(x))$, а по лемме 4 можем считать, что в концах интервалла она обращается в нуль и колебание ее на нем не больше его длины.

Возьмем теперь произвольный из оставшихся интервалов из $\mathcal{G}$; обозначим его через (α, β). По построению множества $\mathcal{E}_{\pm}\infty \cap (\alpha, \beta)$ нигде неплотны на (α, β). По нашему условию $f\Big|_{\mathcal{E}\cap(\alpha,\beta)}$ — непрерывна и $\mathcal{E} \cap (\alpha, \beta)$ — резидуально на (α, β). Поэтому и множество

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta} = \left[\mathcal{E} \bigcap (\alpha, \beta)\right] \setminus \mathcal{E}_{\pm}\infty$$

также резидуально на (α, β) (открытая порция из $\mathcal{E}$), а $f\Big|_{\mathcal{E}_{\alpha\beta}}$ — непрерывна и конечна.

Мы введем сейчас одну вспомагательную функцию, определенную на всем отрезке $[\alpha, \beta]$.

Обозначим $\varphi = f\Big|_{\mathcal{E}_{\alpha\beta}}$; рассмотрим график $B = B(\varphi; \mathcal{E}_{\alpha\beta}$ и его замыкание $\underline{B}$ относительно произведения $[\alpha, \beta] \times \underline{\mathbb{R}}$, где $\underline{\mathbb{R}} \equiv [-\infty, +\infty]$. Очевидно, что пр$_x = [\alpha, \beta]$. Определим функцию $\psi(x')$, $x \in [\alpha, \beta]$ как самую верхнюю точку пересечения $\underline{B}$ с вертикалью $\underline{\mathbb{R}} = \{(x, y) : x = x', -\infty \le y \le +\infty\}$.

Из определения следует, что $\psi(x)$ — полунепрерывна сверху.

Л е м м а 5. Функция $\psi(x)$ непрерывна в точках множества $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$, причем

$$\psi\Big|_{\mathcal{E}_{\alpha\beta}} = O\left(= f\Big|_{\mathcal{E}_{\alpha\beta}}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_0 \in \mathcal{E}_{\alpha\beta}$; зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности ϕ в точке $x_0 \in \mathcal{E}$ и того, что $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ — открытая порция $\mathcal{E}$ найдется окрестность $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, такая, что для всех $x' \in U(x_0) \bigcap \mathcal{E}_{\alpha\beta}$ имеем:

$$|\varphi(x') - \varphi(x_0)| < \varepsilon.$$

Это означает, что часть графика функции $\varphi = f\Big|_{\mathcal{E}_{\alpha\beta}}$ над окрестностью $U(x_0)$ лежит в прямоугольнике $U(x_0) \times [\varphi(x_0) - \varepsilon, \varphi(x_0) + \varepsilon]$; ясно, что замыкание этой части графика также принадлежит этому прямоугольнику. А это и значит, что $\psi(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathcal{E}_{\alpha\beta}$ и что $\psi(x_0) = \phi(x_0)$ $(= f(x_0))$.

Лемма доказана.

Теперь мы полностью воспользуемся вспомогательной функцией.

Введем множества $\mathcal{E}_n \equiv \{n \leq \psi(x) < n+1\}$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); так как $\psi(x)$ полунепрерывна сверху, то $\mathcal{E}_n$ есть пересечение замкнутого множества $\{n \leq \psi\}$ с открытым $\{\psi < n+1\}$, т.е. оно — типа $F \cap \mathcal{G}$, следовательно, и $\mathcal{G}_\delta$. Так как $\psi\Big|_{\mathcal{E}_{\alpha\beta}}$ — конечная функция, то

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta} = \bigcup_n (\mathcal{E}_n \cap \mathcal{E}_{\alpha\beta})\,.$$

Из этого равенства следует существование плотной на (α, β) системы непересекающихся интервалов $\{(\alpha_m, \beta_m)\}$, в каждом из которых одно из $\mathcal{E}_n$ плотно; так как оно — типа $\mathcal{G}_\delta$, то пересечение $e_n = \mathcal{E}_n \cap \mathcal{E}_{\alpha\beta}$ — резидуально на "своем"(α_m, β_m). По лемме 2 строим AC-функцию $\Phi(x)$ на $[\alpha_m, \beta_m]$, для которой $\Phi'(x) = f(x)$ на e_n; а по лемме 4 мы можем считать, что $\Phi(\alpha_m) = \Phi(\beta_m) = 0$ и $|\Phi(x)| \leq \beta_m - \alpha_m$.

Благодаря этим оценкам и строя каждую из Φ на всех интервалах системы $\{(\alpha_m, \beta_m)\}$, можем "склеить" их в одну непрерывную функцию $\Phi(x)$ на всем отрезке $[\alpha, \beta]$, если принять ее равной нулю на нигде не плотном замкнутом дополнении ко всем $\{(\alpha_m, \beta_m)\}$. А так возникшая функция оказывается той самой $AC\mathcal{G}$-функцией на $[\alpha, \beta]$, для которой существует ее производная Φ' на некотором его резидуальном подмножестве, причем $\Phi'(x) = f(x)$; конечно, и здесь мы можем считать, что $\Phi(\alpha_m) = \Phi(\beta_m) = 0$.

Мы начинали со всюду плотного открытого множества $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ и для каждого составляющего его интервала строили либо AC-функцию, либо $AC\mathcal{G}$-функцию, которая на резидуальном его подмножестве оказывалась первообразной для $f(x)$.

В результате на отрезке $[a, b]$ мы построим всюду плотное открытое множество $\mathcal{G}$ — это все (α_m, β_m) для каждого (α, β) — и непрерывную функцию $\Phi(x)$, которая явилась AC-функцией на каждом составляющем его интервале и на некотором резидуальном множестве в $\mathcal{G}$ имело место: $\Phi'(x) = f(x)$. Так как по построению она равнялась нулю на нигде не плотном к нему замкнутом дополнению, то Φ оказалась $AC\mathcal{G}$-функцией (и даже $AC\mathcal{G}$ в узком смысле, так как ряд из колебаний функции Φ на интервалах (α_m, β_m) абсолютно сходится; но это нам все же не потребуется).

Известно [1] — а это легко и доказать, — что если $AC\mathcal{G}$-функция на отрезке имеет ограниченную вариацию, то она оказывается уже AC-функцией. Поэтому если мы сумеем построенную нами функцию $\Phi(x)$ заменить — с сохранением "первообразности— на функцию с ограниченной вариацией, то этим мы завершим доказательство теоремы.

С этой целью докажем еще одну лемму.

Л е м м а 6. Пусть $\varphi(x)$,$x \in [a,b]$, — непрерывная, ограниченной вариации функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется открытое всюду плотное на $[a,b]$ множество $\mathcal{G} = \{(a_k, b_k)\}$, такое, что сумма вариаций на всех интервалах (a_k, b_k) меньше ε:

$$\sum_k \mathrm{V}_{a_k}^{b_k} < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проще всего получим, используя известную теорему Банаха [7]. Именно, для произвольной непрерывной функции $\varphi(x)$ $x \in [a,b]$, $m \le \varphi(x) \le M$, в силу этой теоремы, имеем:

$$\mathrm{V}_a^b \varphi = \int\limits_m^M N(y)dy,$$

где $N(y) = \mathrm{card}\{\varphi^{-1}(y)\}$ — индикатриса Банаха, число точек уровня y у функции $\varphi(x)$.

В нашем случае φ — ограниченной вариации, поэтому индикатриса суммируема и наша лемма просто следует из абсолютной непрерывности интеграла: для любого всюду плотного открытого множества $\mathcal{G}_0 \subset [a,b]$ достаточно малой меры сумму вариаций на его интервалах можно зделать произвольно малой.

Возвращаемся к доказательству нашей теоремы.

Мы уже доказали, что на отрезке $[a,b]$ существует непрерывная $AC\mathcal{G}$-функция $\Phi(x)$, для которой $\Phi'(x) = f(x)$ на резидуальном множестве. При этом имеется открытое всюду плотное на $[a,b]$ множество $\mathcal{G} = \{(a_k, b_k)\}$, на каждом интервале которого $\Phi(x)$ есть AC-функция, а на дополнительном к нему нигде не плотном замкнутом множестве Φ равно нулю. Построим теперь новую $AC\mathcal{G}$-функцию $\tilde{\Phi}(x)$, которая на всем отрезке $[a,b]$ имеет ограниченную вариацию — т.е. будет уже AC-функцией — и для которой также $\Phi\tilde{(x)}' = f(x)$ на резидуальном множестве.

Возьмем произвольный интервал $(a_k, b_k) \subset \mathcal{G}$. По лемме 6 найдем всюду плотную на (a_k, b_k) систему интервалов $\left\{(\alpha_m^{(k)}, \beta_m^{(k)})\right\}$, таких, что

$$\sum_m \mathrm{V}_{\alpha_m^{(k)}}^{\beta_m^{(k)}} \Phi = \sum_m \mathrm{v}_m \le b_k - a_k$$

Как и в лемме 3 о кусочно-монотонной апроксимации рассмотрим на отрезке $[\alpha_m^{(k)}, \beta_m^{(k)}]$ монотонную функцию

$$\Phi_0(x) = \frac{\Phi(\beta_m^{(k)}) - \Phi(\alpha_m^{(k)})}{\mathrm{mes} p} \cdot m\left(\frac{x - \alpha_m^{(k)}}{\beta_m^{(k)} - \alpha_m^{(k)}}\right) + \Phi\left(\alpha_m^{(k)}\right);$$

здесь, конечно, так же совпадение в концах:

$$\Phi_0(\alpha_m^{(k)}) = \Phi(\alpha_m^{(k)}) \quad \text{и} \quad \Phi_0(\beta_m^{(k)}) = \Phi(\beta_m^{(k)}).$$

Так как колебания функций Φ и Φ_0 на $[\alpha_m^{(k)}, \beta_m^{(k)}]$ не превышают v_m и $\mathrm{V}(\Phi - \Phi_0) \leq \mathrm{V}(\Phi) - \mathrm{V}(\Phi_0)$, то

$$\sum_m \mathrm{V}_{\alpha_m^{(k)}}^{\beta_m^{(k)}} (\Phi - \Phi_0) \leq b_k - a_k$$

Определив точно таким же образом функцию Φ_0 на всех интервалах (a_k, b_k) из $\mathcal{G}$ — и, конечно, нулевым значением вне $\mathcal{G}$, получим оценку

$$\sum_k \sum_m \mathrm{V}_{\alpha_m^{(k)}}^{\beta_m^{(k)}} [\Phi - \Phi_0] \leq 2\sum_k (b_k - a_k) \leq 2(b - a).$$

Тогда обозначая $\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x) - \Phi_0(x)$, получим:

$$\mathrm{V}_a^b \tilde{\Phi}(x) \leq 2(a - b),$$

то, как мы и указывали выше, доказывает абсолютную непрерывность $\tilde{\Phi}(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Теорема доказана.

4. Теорема о постоянстве функции

Нам сейчас потребуется определенная геометрия.

Именно, рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n(x_1, \ldots, x_n)$ декартову прямоугольную систему координат и симплекс $T : x_k \geq 0, \sum\limits_k x_k \leq a$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Возьмем точку $x_1 = a$ на оси Ox_1 и возьмем неограниченный конус с вершиной в этой точке, ось которого совпадает с осью Ox_1, но направленный в сторону начала координат и с углом между образующими и осью, равным σ. Если мы хотим, чтобы этот конус содержал шар V_r с центром в начале и касался его своими образующими, нужно взять $a = \frac{r}{\sin\sigma}$, что мы и сделаем.

Возьмем часть конуса, содержащую все отрезки лучей из его вершины до пересечения с V_r и присоединим к ней и шар V_r; полученную фигуру будем продолжать называть конусом, отрезок a — его высотой и обозначать его через Q^1. Шар V_r назовем соответствующим конусу Q^1 с высотой a.

Аналогично построим конусы Q^i для всех осей Ox_i $(i = 2, \ldots, n)$. Назовем эти конусы первоначальными; в дальнейшем будут возникать подобные им конусы — с определенным коэфициентом подобия.

Для каждой точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ симплекса T обозначим через $Q^i(x) = Q^i(x_1, \ldots, x_n)$ конус Q^i,перенесенный параллельно в точку x — свою новую вершину.

Одно свойство конусов $\{Q^i(x)\}$ нам следует подчеркнуть.

Возьмем, например, конус $Q^1(x_1, \ldots, x_n)$ при $x_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; его ось пересекает плоскость $x_1 = 0$ в точке $(0, x_2, \ldots, x_n)$. Обозначим через $\tilde{Q}^1(x_1, \ldots, x_n) \supset Q^1$ конус с той же осью, но с вершиной на грани $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = a$ симплекса T; легко видеть, что

$$\tilde{Q}^1 = Q^1(a - \sum_{k>1} x_k, x_2, \ldots, x_n).$$

Высота конуса $Q^1(x_1, \ldots, x_n)$ равна x_1, а радиус соответствующего ему шара $V^1(0, x_2, \ldots, x_n)$ с центром в точке $(0, x_2, \ldots, x_n)$ равен $\frac{r}{a}x_1$. Для обьемлющего, накрывающего его конуса $\tilde{Q}^1$ высота равна $a - \sum\limits_{k>1} x_k \geq x_1$, а радиус соответствующего шара $\tilde{V}^1(0, x_2, \ldots, x_n)$ равен $\frac{r}{a}(a - \sum\limits_{k>1} x_k) \geq \frac{r}{a}x_1$.

Рассмотрим конус $Q^2(0, x_2, \ldots, x_n)$ высоты x_2 и радиуса его шара $\frac{r}{a}x_2$ и для него накрывающий конус $\tilde{Q}^2(0, x_2, \ldots, x_n) = Q^2$ $(0, a - \sum\limits_{k>2} x_k, x_3, \ldots, x_n)$. Расстояние от его вершины до точки $(0, x_2, \ldots, x_n)$ равно $a - \sum\limits_{k>2} x_k - x_2 = a - \sum\limits_{k>2} x_k$ и радиус его шара $\tilde{V}^2(0, 0, x_3, \ldots)$ равен $\frac{r}{a}(a - \sum\limits_{k>1} x_k)$; другими словами шар, соответствующий первому накрывающему конусу $\tilde{Q}^{(1)}$, оказывается вписанным в следующий накрывающий шар $\tilde{Q}^{(2)}$.

Очевидно, это — общее свойство накрывающих конусов, возникающих указанной конструкцией из произвольно данного $Q^{(i)}(x_1, \ldots, x_n)$. Мы выше предположили для простоты, что все $x_k > 0$; но если некоторые $x_k = 0$, то наши рассмотрения даже упрощаются и переносятся на грани симплекса T.

Пусть теперь в области $D \subset \mathbb{R}^n$ задана непрерывная действительная функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Введем следующее понятие.

О п р е д е л е н и е 1. Функция $f(x)$ обладает свойством K_0 в точке $x \in D$, если в этой точке определен $n-$репер $\tau(x) = \{\tau_1(x), \ldots, \tau_n(x)\}$, такой, что производные функции f в точке x вдоль всех (линейно независимых) направлений $\tau_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ равны нулю.

Нашей ближайшей целью является доказательство следующей теоремы.

Т е о р е м а 9. *Если непрерывная в области $D \subset \mathbb{R}^n$ функция $f(x)$ обладает свойством K_0 в каждой ее точке, исключая не более чем счетное их множество, то она постоянна всюду в D.*

Присмотримся к этой теореме внимательней. Переформулируем ее вначале для самого простого случая прямой $\mathbb{R}^1$, где вообще для одномерных реперов имеются лишь две возможности для направлений: прямое и обратное на ориентированной прямой $\mathbb{R}^1$.

Так вот теорема здесь звучит следующим образом: Пусть на отрезке $[a, b]$ непрерывная функция $f(x)$ в каждой точке обладает либо правой, либо левой производной, равной нулю; тогда $f \equiv \text{const}$ на $[a, b]$.

Сходство этой теоремы с известной теоремой классического анализа, а также с теоремой из §1 гл. I несомненно. Но в первой из них требуется существование сквозной производной, а во второй, хотя и говорим об отдельных производных числах, но обязательно с одной и той же стороны; мы знаем уже, что существование нулевых производных чисел в каждой точке (которые — то справа, то слева) недостаточно для справедливости теоремы.

В нашей только что сформулированной теореме допускаются как правые, так и левые, но не отдельные производные числа, а сплошные производные

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

или $\lim\limits_{h \to -0}$.

Это означает, что если теорема и верна, то для ее доказательства не пригодны ни методы классического анализа, ни метод гл. I.

Другими словами, наша терема оказывается нетривиальной даже для случая, когда направления реперов $t(x)$ одинаковы, тем более это касается общего случая, о котором и говорит теорема. Ясно, что нельзя ожидать здесь и совсем элементарного доказательства; подскажем лишь, что положение спасает метод категорий.

Эту теорему мы докажем на основании ряда лемм.

Введем сначала еще одно понятие.

О п р е д е л е н и е. Пусть $O\xi_1\xi_2\ldots\xi_n$ — некоторая декартова (вообще, косоугольная) система координат в пространстве $\mathbb{R}^n$ и пусть в каждой точке $\xi \in \mathbb{R}^n$ определен $n-$репер $t(\xi) = \{t_1(\xi), \ldots, t_n(\xi)\}$, такой, что угол между $t_k(\xi)$ и отрицательной полуосью $O\xi_k$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ меньше σ, где $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$. Скажем, что шар V_r радиуса $r > 0$ с центром в начале координат достижим из точки $\xi^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, если существует ломаная $(\xi^{(0)}\xi^{(1)}\ldots\xi^{(p_0)})$, где $\xi^{(p_0)} \in V_r$, для которой каждое ее звено $\xi^{(p-1)}\xi^{(p)}$ $(p = 1, \ldots, p_0)$ лежит на одном из лучей репера $t(\xi^{(p-1)})$.

Л е м м а 7. *Пусть $Ox_1x_2\ldots x_n$ — декартова прямоугольная система координат в $\mathbb{R}^n$ и $\sin\sigma < \frac{1}{2(n+\sqrt{n})}$. Тогда при любом $r > 0$ шар V_r достижим из каждой точки шарового конуса Q с вершиной в начале, расположенного в первом "октанте"$(x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0)$, ось которого совпадает с биссектрисой $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$; при этом угол α между осью и образующими конуса Q такой, что $\sin\alpha > \frac{1}{4n}$.*

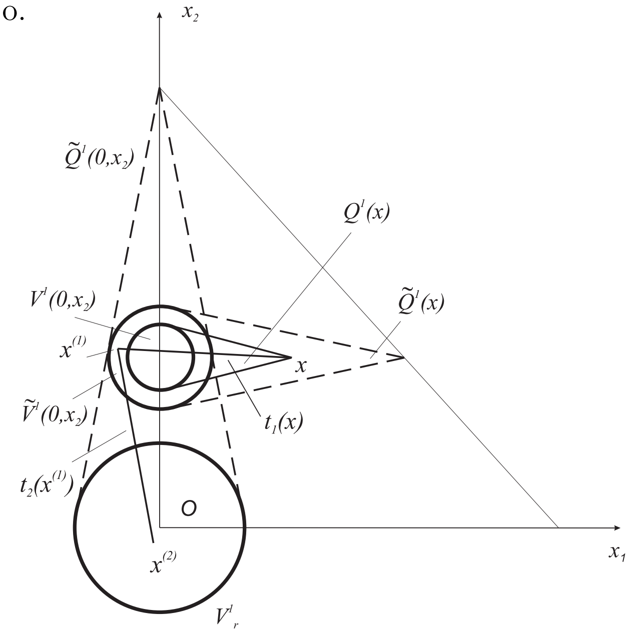

Рис. 4

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $a = \frac{r}{\sin\sigma}$ и возьмем симплекс T: $x_k \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \leq a$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Пусть $x \in T$ — произвольная точка и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; покажем, что шар V_r достижим из нее.

Конус $Q^1(x_1, \ldots, x_n)$, в силу построения, содержит вместе с точкой x и луч $t_1(x)$, который пересекает соответствующий ему шар $V^1(0, x_2, \ldots, x_n)$. Он пересекает, конечно, и шар $\tilde{V}^1(0, x_2, \ldots, x_n)$ накрывающего конуса $\tilde{Q}^1 = Q^1\left(a - \sum\limits_{k>1} x_k, x_2, \ldots, x_n\right)$ дволь некоторого отрезка; возьмем произвольную точку $x^{(1)}$ этого отрезка.

Конус $\tilde{Q}^2 = Q^2\left(0, a - \sum\limits_{k>2} x_k, x_3, \ldots, x_n\right)$, накрывающий $Q^2(0, x_2, \ldots, x_n)$, как мы знаем, содержит вписанный в него предыдущий шар $\tilde{V}^1(0, x_2, \ldots, x_n)$, а значит, и некоторую точку $x^{(1)}$ вместе с лучом $t_2(x^{(1)})$, который пересекает соответствующий ему шар $\tilde{V}^2(0, 0, x_3, \ldots, x_n)$ вдоль отрезка на котором выбираем точку $x^{(2)}$ и т. д.

Продолжая это построение, мы, очевидно, достигнем шара $\tilde{V}^n(0, 0, \ldots, 0) = V_0$ (возможно, раньше чем через n шагов).

Итак, шар V_r достижим из T. Построение, указанное нами, приводит к ломаным, которые будем называть каноническими и записывать в виде $L = (xx^{(1)} \ldots x^{(n_0)})$.

Подчеркнем лишь, что эти ломаные не обязаны принадлежать полностью T: они начинаются в T, а дальше могут выходить и за его пределы, главное — это, что шар V_r (сам полностью не принадлежащий) достижим из T.

З а м е ч а н и е 1. Укажем сразу же на другое построение ломаной, достигающей V_r. Эту ломаную назовем (допустимым образом) деформированной относительно канонической ломаной $L = (xx^{(1)} \ldots x^{(n_0)})$.

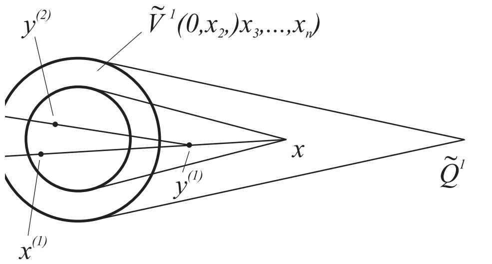

Рис. 5

Для простоты положим, что все $x_k > 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Возьем на первом звене $xx^{(1)} \subset t_1(x)$ ломаной L произвольную точку $y^{(1)}$ и вместо отрезка $y^{(1)}x^{(1)} \subset xx^{(1)}$ — некоторый отрезок луча $t_1(y^{(1)})$, пересекающего шар $\tilde{V}^1(0, x_2, \ldots, x_n)$: пересечение имеет место, так как конус $Q^1(y^{(1)})$, полученный параллельным переносом Q^1 в точку $y^{(1)}$, очевидно, лежит внутри $\tilde{Q}^1$.

Все точки пересечения луча $t_1(y^{(1)})$ с $\tilde{V}^1$ назовем опорными для этого луча. Теперь вместо точки $x^{(1)} \in \tilde{V}^1(0, x_2, \ldots, x_n)$ ломаной L берем произвольную опорную точку $y^{(2)}$ луча $t_1(y^{(1)})$.

Далее, на луче $t_2(y^{(2)}) \subset Q^2(0, x_3, \ldots, x_n)$ снова берем произвольную точку $y^{(3)}$, а также отрезок луча $t_2(y^{(3)})$ до некоторой опорной точки $y^{(4)} \in \tilde{V}(0, 0, x_3, \ldots, x_n)$ и т. д., каждый раз заменяя одно звено канонической ломаной внутри соответствующего конуса $\tilde{Q}^i$ на (на более чем) двузвенную ломаную внутри того же конуса. По построению ясно, что для вновь полученной ломаной $L' = (xy^{(1)}y^{(2)} \ldots y^{(m_0)})$ шар V_r также достижима.

Такую "ломаную"звеньев первоначальной L нам придется совершить уже в конце доказательства основной теоремы.

Итак, нами доказано, что шар $V \equiv V_r \equiv V(0, 0, \ldots, 0)$ радиуса r достижим из любой точки симплекса T: $x_k \geq 0$, $\sum\limits_k \leq a = \frac{r}{\sin \sigma}$.

Пусть V_1 — шар, вписанный в T; перенесем параллельно в центр V_1 систему координат $Ox_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим радиус V_1 через r_1; известно, что $r_1 = \frac{a}{n+\sqrt{n}} > \frac{a \sin \sigma}{(n+\sqrt{n}) \sin \sigma}$ (в силу выбора σ). По доказанному выше шар V_1 достижим из точек симплекса T_1, подобного и подобного расположенного относительно новых осей с симплексом T; при этом коэффициент подобия равен $\frac{r_1}{r} = \frac{1}{(n+\sqrt{n}) \sin \sigma} > 2$. Аналогично, если V_2 — шар радиуса r_2, вписаный в T_1, то он достижим из точек симплекса T_2, подобного T_1, причем $\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1}{r} > 2$ является коэффициентом подобия и между T_2 и T_1 и т.д.; продолжаем это построение неограниченно. В результате получим, что первоначальный шар V_r достижим из любой точки объединения всех полученных симплексов $T_s : \bigcup\limits_{s=0}^{\infty} T_s$ $(T_0 \equiv T)$.

При этом получающиеся ломаные состоят, очевидно из канонических ломаных в соответствующих симплексах T_s.

Пусть $c_s (s = 0, 1, 2, \ldots)$ — расстояние между центрами шаров V_s и V_{s+1} $(V_0 \equiv V_r)$, а r_1 — радиус V_s $(r_0 = r)$; в силу указанного выше подобия имеем:

$$\frac{c_0}{c_1} = \frac{c_1}{c_2} = \ldots = \frac{c_s}{c_{s+1}} = \ldots = \frac{r_0}{r_1} = \frac{r_1}{r_2} = \ldots = \frac{r_s}{r_{s+1}} = \ldots$$

$$= q = (n + \sqrt{n}) \sin \tau < \tfrac{1}{2}.$$

Из построения следует, что совокупность симплексов T_s $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ имеет центр подобия S, находящийся, очевидно, на биссектрисе $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ в противоположном "октанте" в $\mathbb{R}^n$: $(x_1 < 0, x_2 < 0, \ldots, x_n < 0)$ и отстоящий от центра V_0 (т.е. от начала координат первоначальной системы $Ox_1x_2 \ldots x_n$) на расстоянии, равном $b = \sum\limits_{j=1}^{\infty} c_0 q^i = c_0 \frac{q}{1-q}$; при этом $c_0 = r_1 \sqrt{n} = \frac{a}{\sqrt{n}+1}$ $a = \frac{r}{\sin \sigma}$.

Грань симплекса T_s, параллельная плоскости $\sum\limits_k x_k = a$, пересекается новыми осями, перенесенными в ценср шара V_{s+1}, вписанного в T_s, соответственно в точках $x_k^{(s)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Снова в силу подобия, при фиксированном k, $1 \le k \le n$, все точки $x_k^{(s)}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ лежат на одном луче $S\xi_k$ вместе с центром подобия S (при этом $x_k^{(0)} = (0, \ldots, 0, \underset{(k)}{r}, 0, \ldots 0)$). Лучи $S\xi_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ определяют (косоугольный) октант U пространства $\mathbb{R}^n$. Снова в силу указанного выше подобия, пересечение U с октантом $\{x_k \ge 0\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ первоначпльной системы принадлежит объединению $\bigcup\limits_{s=0}^{\infty} T_s$. В самом деле, пересечение $U \bigcap T_0$, очевидно, проинадлежит этому объединению; а подвергая U растяжению в $\frac{1}{q^s}$ раз $(s = 1, 2, \ldots)$ с центром подобия S, мы убедимся в этом утверждении.

Если октант U перенести паралельно в начало координат системы $Ox_1x_2 \ldots x_n$, то, очевидно, получим октант U', также принадлежащий объединению $\bigcup\limits_{s=0}^{\infty} T_s$. Впишем теперь в U' максимальный шаровой конус Q с вершиной в начале и осью на биссектрисе $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ и оценим для него угол между его осью и образующими.

Для этого нужно в правильный $(n-1)$-симплекс, определенный вершинами $x_k^{(s)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ на плоскости, параллельной $\sum\limits_k x_k = a$, вписать $(n-1)$-мерный шар, подсчитать его радиус и расстояние до центра S подобия.

Так как мы видели, что в систему подобия входит и первоначальный шар $V_r \equiv V_0$, то достатлчно это проделать с ним. А для него радиус вписанного шара равен $\frac{r}{\sqrt{n-1}}$ и расстояние от его центра до S равно $b + r = c_0 \frac{q}{1-q} + r = \frac{r\sqrt{n}}{1-(n+\sqrt{n})\sin\sigma} + r$.

Угол между осью и образующей конуса Q равен α, где

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{\sqrt{n-1}(b+r)}.$$

Элементарные вычисления показывают, что при $\sin\sigma < \frac{1}{2(n+\sqrt{n})}$ имеем: $\operatorname{tg}\alpha > \frac{1}{3n}$, а значит, $\sin\alpha > \frac{1}{4n}$ при $n \ge 2$.

Лема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Отметим еще, что допустимые деформации (см. замечание 1) применимы по отношению к любой точке $x \in Q$. В самом деле, пусть $x \in T_s$ и $L_0 = (xx^{(1)} \dots x^{(n_0)})$ — каноническая ломаная для T_s с концом $x^{(n_0)} \in V_s \subset T_{s-1}$.

Как и в замечании 1, при замене L_0 деформированной ломаной $(xy^{(1)} \dots y^{(n_1)})$ также получим, что конец $y^{(n_1)} \in V_s \subset T_{s-1}$.

Берем, далее, каноническую ломаную $L_1 = (x^{(n_1)} \dots x^{(n_2)})$, $x^{(n_1)} \equiv y^{(n_1)}$, соединяющую $x^{(n_1)}$ с $x^{(n_2)} \in V_{s-1} \subset T_{s-2}$ и заменяем ее деформированной $(y^{(n_1)}y^{(n_1+1)} \dots y^{(n_3)})$, где $y^{(n_3)} \in V_{s-1}$ и т.д. до тех пор, пока не достигнем $V_0 \equiv V_r$.

Из наших построений следует, что канонические ломаные и их деформации состоят из звеньев, "почти"параллельных (при малых σ) соответствующим ося координат Ox_k $(k = 1, 2, \dots, n)$, только "смотрящих"в противоположную сторону; поэтому и углы между ними и, скажем, биссектрисой $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ — (намного) меньше прямых углов, и можно ожидать, что на нее эти ломаные проектируются взаимнооднозначно, а если область $D \subset \mathbb{R}^n$ ограничена, то и длины их равномерно ограничены.

Вот следующая лемма и утверждает, что это действительно так.

Введем обозначения: $\bar{i}_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ — орты на осях Ox_k, $|x|$ — длина вектора $\overrightarrow{Ox}$; ломаные и их длины будем обозначать одинаково.

Л е м м а 9. *Пусть в условиях леммы 1 шар V достижим из точки x октанта $x_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ некоторой ломаной L. Тогда $L \leq 2\sqrt{n}|x| + r$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что прекция каждого звена $x^{(p-1)}x^{(p)} \subset L$ $(p = 1, 2, \dots, p_0; x^{(0)} \equiv x)$ на биссектрису $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ есть невырожденый отрезок и конец этого отрезка, соответствующий концу $x^{(p)}$ звена, лежит ближе к началу координат, или, что то же, что скалярное произведение единичного вектора $\overrightarrow{Ox'}$ направления $\overrightarrow{x^{(p-1)}x^p}$ на единичный вектор $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{i}_k$ отрицательно.

Но $\overrightarrow{Ox'} = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos\alpha_k \cdot \bar{i}_k$ и если, например, $x^{(p-1)}x^{(p)}$ — отрезок луча $t_1(x^{(p-1)})$, то $\cos\alpha_1 < -\cos\sigma$, и нужное скалярное произведение будет

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \cos\alpha_k < \frac{1}{\sqrt{n}} \left(-\cos\sigma + \sum_{k=2}^{n} |\cos\alpha_k| \right).$$

Так как $\sum\limits_{k=2}^{n} |\cos^2\alpha_k| = 1 - \cos^2\alpha_1 < 1 - \cos^2\sigma = \sin^2\sigma$, то в силу неравенства Коши - Буняковского

$$\left(\sum_m a_m^2\right)\left(\sum_m b_m^2\right) \geq \left(\sum_m a_m b_m\right)^2 \quad \text{при} \quad b_m = 1 (m = 1, 2, \ldots, n{-}1)$$

получим

$$\tfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \cos\alpha_k < \tfrac{1}{\sqrt{n}} \left(-\cos\sigma + \sqrt{n-1}\sin\sigma\right) <$$

$$< \tfrac{1}{\sqrt{n}} \left(-\cos\sigma + \tfrac{1}{2(\sqrt{n}+1)}\right) < 0,$$

так как $\sin\sigma < \frac{1}{2(n+\sqrt{n})}$ и $\cos\sigma > \sqrt{1 - \frac{1}{4n(\sqrt{n}+1)^2}} > 1 - \frac{1}{3n(\sqrt{n}+1)^2} > \frac{1}{\sqrt{n}+1}$; а это и нужно.

Итак, ломаная $L = \left(xx^{(1)} \ldots x^{(p_0)}\right)$ взаимно однозначно проектируется на некоторый отрезок $AA^{(1)} \ldots A^{(p_0)}$ биссектрисы. Используя приведенные оценки, получим для острого угла $\alpha^{(p)}$ между звеном $x^{(p-1)}x^{(p)}$ и его проекцией $A^{(p-1)}A^{(p)}$ $(p = 1, \ldots x, p_0)$

$$\cos\alpha^{(p)} > \tfrac{1}{\sqrt{n}} \left(\cos\sigma - \sum_{k=2}^{n} |\cos\alpha_k|\right) > \tfrac{1}{\sqrt{n}} \left(\cos\sigma - \tfrac{1}{2(\sqrt{n}+1)}\right) >$$

$$> \tfrac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Следовательно,

$$L = \sum_p \frac{|A^{(p-1)}A^{(p)}|}{\cos\alpha^{(p)}} \leq 2\sqrt{n}(\text{пр.}L) \leq 2\sqrt{n}|x| + r,$$

так как точка $A^{(p_0)}$ принадлежит шару V_r.

Лемма 9 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Из доказательства видно, что ее утверждение верно и для ломаных L', полученных из обычных L допустимой деформацией.

Нетрудно теперь распространить доказательство леммы на случай косоугольной системы координат $O\xi_1\xi_2 \ldots \xi_n$. Обозначим через Δ n-мерный объем единичного параллелепипеда, построенного на осях такой системы.

Л е м м а 10. *Пусть $O\xi_1\xi_2 \ldots \xi_n$ — произвольная декартова система координат в $\mathbb{R}^n$ и $\sin\sigma < \frac{\Delta}{2\sqrt{n^n}(n+\sqrt{n})}$. Тогда при любом $r >$*

0 *шар* V_r *с центром в начале достижим из каждой точки шарового конуса* Q *с вершиной в начале, расположенного в первом "октанте"*$(\xi_1 \geq 0, \ldots, \xi_n \geq 0)$*, ось которого совпадает с биссектрисой* $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n$*; при этом угол* α *между осью и образующими конуса* Q *такой, что* $\sin\alpha > \frac{\Delta}{4n\sqrt{n^n}}$.

Доказательство сведем к лемме 1 подходящим аффинным преобразованием.

Именно, пусть $\bar{\xi} = A\bar{x}$ — такое преобразование векторов пространства $\mathbb{R}^n$, при котором оси прямоугольной системы $Ox_1x_2\ldots x_n$ переходят в оси данной системы $O\xi_1\xi_2\ldots\xi_n$, причем с сохранением масштаба на этих осях. Это означает, что матрица $A = \|a_{lk}\|_{l,k=1,2,\ldots,n}$ невыроджена и столбцы ее $\{a_{lk}; l = 1,2,\ldots,n\}$ состоят из направляющих косинусов новых осей $O\xi_k$ относительно системы $Ox_1x_2\ldots x_n$. Предположим еще, что $\det\|a_{lk}\| > 0$ (это всегда можно достичь изменением нумерации осей Ox_k $(k = 1,2,\ldots,n)$); тогда $\det\|a_{lk}\| = \Delta$.

Шар $\sum\limits_k x_k^2 \leq 1$ при нашем преобразовании A переходит в некоторый эллипсоид с полуосями λ_k: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$; известно, что $\Delta = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$.

Оценим λ_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ сверху. Имеем:

$$\bar{\xi}^2 = \bar{x}^2 + 2\sum_{k<l} a_{1k}a_{1l}x_kx_l + \ldots + 2\sum_{k<l} a_{nk}a_{nl}x_kx_l =$$

$$= \bar{x}^2 + 2\sum_{k<l}\cos\alpha_{kl}x_kx_l,$$

где $\bar{\xi}^2 = \sum\limits_k x_k\bar{i}_k$, а α_{kl} — угол между осями $O\xi_k, O\xi_l$. Отсюда

$$\bar{\xi}^2 = \bar{x}^2 + 2\sum_{k<l}|x_kx_l| = \left(\sum_k |x_k|\right)^2 \leq$$

$$\leq n\sum_k x_k^2 \leq n$$

(согласно неравенству Коши-Буняковского), т.е. $|\bar{\xi}| \leq \sqrt{n}$ или, что то же, $\lambda_k \leq \sqrt{n}$ $(k = 1,2,\ldots,n)$. Но тогда для минимального "растяжения"λ_n при отображении A получим:

$$\lambda_n \geq \frac{\Delta}{\sqrt{n^{n-1}}}.$$

Поэтому, если длина прямолинейного отрезка равна a (система Ox), а его образа — a' (система $O\xi$), то $\frac{\Delta}{\sqrt{n^{n-1}}}a \leq a' \leq \sqrt{n}a$; для отношений длин пары таких отрезков получим

$$\frac{\Delta}{\sqrt{n^n}}\frac{a}{b} \le \frac{a'}{b'} \le \frac{\sqrt{n^n}}{\Delta}\frac{a}{b}, \quad \frac{\Delta}{\sqrt{n^n}}\frac{a'}{b'} \le \frac{a}{b} \le \frac{\sqrt{n^n}}{\Delta}\frac{a'}{b'}. \tag{8}$$

Отсюда и из теоремы синусов для треугольников следует, что если острый угол β' между отрезками такой, что $\sin\beta' < \frac{\Delta}{\sqrt{n^n}}$, то соответствующий ему угол β также острый, причем для их синусов имеют место неравевства (8), в частности, если

$$\sin\sigma' < \frac{\Delta}{2\sqrt{n^n}(n+\sqrt{n})}$$

то

$$\sin\sigma < \frac{1}{2(n+\sqrt{n})}.$$

Другими словами, каждому реперу $t'(\xi)$, соотвеиствующему числу σ', отвечает репер $t(x)$, соотвеиствующий числу σ (см. определение 2); при этом отображение A устанавливает, очевидно, взаимно однозначное соответствие между всеми этими реперами. Отсюда и следует первое утверждение лемы, так как ломаной L, составленной из отрезков лучей реперов t, отвечает ломаная $L' = A(L)$, также составленная из отрезков лучей соответствующих реперов t'.

Системе симплексов $\bigcup\limits_s T_s$ леммы 1, содержащей шаровой конус Q, здесь соответствует также система симплексов $\bigcup\limits_s T'_s$, содержащая "эллиптический" конус $Q' = A(Q)$, очевидно, с осью на биссектрисе $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n$ (в силу выбора A). Канонической ломаной, отвечающей симплексу T_s, здесь соответствует ломаная, которую также назовем канонической; также легко переносятся понятия деформированных ломаных и опорных точек.

Вписывая в Q' некоторый ("максимальный") шаровой конус и оценивая его угол на основе неравенств (8), мы и завершим доказательство леммы 3.

Из наших оценок растяжений легко следует

Л е м м а 11. *В условиях леммы 3 для ломаной L имеем оценку:*

$$L \le \frac{2\sqrt{n^n}}{\Delta}|\xi| + r,$$

причем это неравенство остается верным и при допустимых деформациях.

Мы уже знаем, что самыми удобными при исследовании действительных функций, являются производные числа или производные с одной и той же стороны; рассмотрение их, как мы видели в §1 гл. I, привело к довольно содержательным утверждениям.

Так вот следующая лемма, восходящая к Д. Е. Меньшову [7] позволяет из всей беспорядочной толпы реперов в области находить массивные ее подмножества, в точках которых все реперы — почти одинаковых направлений ("смотрят" в одну сторону ...).

Будем обозначать через $[\widehat{t_1, t_2}]$ угол между лучами t_1, t_2 взятый между 0 и π.

Л е м м а 12. *Пусть $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная непрерывная функция в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и $P \subset D$ — некоторое совершенное множество точек. Предположим, что существует множество $N \subset P$ не первой категории на P, такое, что в каждой точке $x \in N$ имеется n-репер $\tau(x) = \{\tau_1(x) \ldots \tau_n(x)\} = \{\tau_k(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, причем*

$$\varliminf_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{|h|} \right| < \infty$$

для $x + h \in \tau_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Тогда найдутся порция $P' \subset P$, расположенная внутри области D, и числа $\sigma, \delta > 0$, такие, что в каждой точке $x \in P'$ имеется n-репер $t(x) = \{t_p(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, которые обладают следующими свойствами:

1) $[\widehat{t_k(x'), t_k(x'')}] < \sigma (k = 1, 2, \ldots, n)$ для любых точек $x', x'' \in P'$;

2) для объема $\Delta(x)$ единичного параллелепипеда по $t(x)$ имеем: $\Delta(x) > 900\tau \cdot n^{n+2}$ (при этом $\sigma < \frac{\pi}{1000}$);

3) расстояние от множества P' до границы области D больше δ;

4) $|f(x') - f(x)| < \frac{1}{\delta}|x' - x|$ для каждой точки $x \in P'$ и всех $x' \in t_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющих условиям $0 < |x' - x| \leq \delta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого натурального p построим конечное замкнутое покрытие $H_p = \left\{ H_p^{(m)} \right\}$ $(m = 1, 2, \ldots, m_p)$ сферическими шарами единичной сферы S^{n-1}: $\sum\limits_k x_x^2 = 1$, такое, что две произвольные точки $H_p^{(m)}$ видны из ее центра под углом $< \frac{1}{1800p}$. О луче τ будем говорить, что он принадлежит множеству $H_p^{(m)}$, если параллельный ему радиус сферы S^{n-1} пересекает это $H_p^{(m)}$.

Обозначим теперь через

$$N(m_1, m_2, \ldots, m_n, p, q) = N(m_\nu, p, q)$$

множество точек $x \in N$, удовлетворяющих условиям:

А) $\tau_k(x) \in H_p^{(m_k)}$ $(k = 1, 2 \ldots, n)$;

Б) $\Delta^2(x) > n^{n+2} \cdot \frac{2}{p}$;

В) $|f(x') - f(x)| < \frac{q}{2}|x' - x|$ для всех x' лучей $\tau_k(x)$ $(k = 1, 2 \ldots, n)$, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - x'| \leq \frac{1}{q}$, причем расстояние от x до граници области D больше $\frac{2}{q}$.

Из определения множества N следует, что

$$\bigcup N(m_\nu, p, q) = N,$$

где суммирование распространено на всевозможные целые положительные значения чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n, p, q$.

Так как N — не первой категории на P, то найдуться определенные значения m_ν, p, q, такие, что соответствующее им множество $N(m_\nu, p, q)$ будет всюду плотно на некоторой порции $P' \subset P$, причем $P' = P \cap D'$, где $D' \subset D$ — некоторый шар. Очевидно, можно предположить, что расстояние от P' до граници области D больше $\frac{1}{q}$.

Для указанных значений m_ν, p, q положим

$$N(m_\nu, p, q) = N', \quad \frac{1}{900p} = \sigma, \quad \frac{1}{q} = \delta.$$

Докажем, что для множества P' и так определенных чисел $\tau, \delta > 0$ имеют место все свойства, указанные в лемме.

Для этого определим в точках $x \in P'$ лучи $t_k(x)$ $(k = 1, 2 \ldots, n)$ следующим образом: полагаем $t_k(x) = \tau_k(x)$ для точек $x \in P' \cap N'$, а для точек $x \in P' \setminus N'$ в качестве $t_k(x)$ возьмем одно из предельных положений лучей $\tau_k(x')$, когда точки $x' \in N'$ сходятся к x; такое определение возможно в силу плотности N' на P'.

Из условия А) следует теперь, что

$$[t_k(x')\widehat{,t_k}(x'')] \leq \frac{1}{1800p} < \tau (k = 1, 2, \ldots, n)$$

для всех точек $x', x'' \in P'$, а из условия Б) получим

$$\Delta^2(x) > 900\tau \cdot n^{n+2}.$$

Тем самым свойсва 1), 2), 3) леммы имеют место; докажем свойство 4).

Пусть $\varepsilon > o$ — фиксированное число, для которого $\varepsilon \leq \frac{1}{q}$ и $x \in P' \setminus N'$ — произвольная точка (для точек N' свойство 4) очевидно). Обозначим через ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ точку луча $t_k(x)$, для которой $|\xi_k - x| = \varepsilon$. Если $x' \in N'$, то через ξ'_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ обозначим точку луча $\tau_k(x')$, для которой $|\xi'_k - x'| = \varepsilon$ и, следовательно, в силу выбора ε, $|\xi'_k - x'| \le \frac{1}{q}$. Из неравенства B) следует тогда, что

$$(9) \qquad |f(\xi'_k) - f(x')| \le \frac{2}{q}|\xi'_k - x'| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Луч $t_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — одно из предельных положений лучей $\tau_k(x')$, когда x' стремится к x. Из нашего построения следует, что точки ξ'_k стремятся при этом к ξ_k; в силу непрерывности $f(x)$ и определения δ из (3) получим:

$$|f(\xi_k) - f(x)| \le \frac{1}{\delta}|\xi_k - x| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как ε, $0 < \varepsilon \le \delta$, было взято произвольно, то это и доказывает свойство 4) леммы.

Лемма 5 доказана полностью.

А теперь докажем в каком-то смысле самую важную лемму.

Л е м м а 13. *Если в условиях леммы 5 множество $P \equiv D$, то найдется шар D', $D' \subset D$, в котором функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 5 шар P', $\overline{P}' \subset D$, в каждой точке x которого имеется $n-$репер $t(x)$ со всеми свойствами, указанными в ней; очевидно, можно предположить диаметр P' меньшим δ.

Наконец, возьмем внутри P' концентрический ему шар P'', радиус r'' которого в $\frac{2\sqrt{n^n}}{\Delta}$ раз меньше радиуса P'; здесь $\Delta^2 = 900\sigma \cdot n^{n+2} < \Delta^2(x)$.

Пусть $x \in P''$ — произвольная точка и $t(x) = \{t_1(x), t_2(x), \ldots, t_n(x)\}$ соответствующий ей репер. Возьмем центрально-симметричный ему — относительно x — репер $t'(x) = \{-t_1(x), \ldots, -t_n(x)\}$ в качестве положительных полуосей системы координат с началом x.

Мы находимся в условиях применимости лемм 3 и 4. Пусть $x^{(0)} \in Q(x) \cap P''$, где $Q(x)$ — шаровой крнус с вершиной x, из каждой точки которого достижим любой шар $V_r(x)$.

Для достаточно малого $r > 0$ (например, $r < \frac{\sqrt{n^n}}{\Delta} r''$) строим ломаную $L = (x^{(0)} x^{(1)} \ldots x^{(p_0)})$, каждое звено которой $x^{(p-1)} x^{(p)}$ принадлежит реперу $t(x^{(p-1)})$ и $x^{(p_0)} \in V_r(x)$. Так как по лемме 4 длины L равномерно ограничены числом $\frac{2\sqrt{n^n}}{\Delta} r''$, что в силу выбора шара P''

все такие ломаные расположены внутри P'. Но тогда

(10)
$$|f(x^{(0)}) - f(x^{(p_0)})| \leq \sum_{p=1}^{p_0} |f(x^{(p-1)}) - f(x^{(p_0)})| \leq \tfrac{1}{\delta} \sum_{p=1}^{p_0} |x^{(p-1)} - x^{(p)}| =$$
$$= \tfrac{1}{\delta} L \leq \tfrac{2\sqrt{n^n}}{\delta \cdot \Delta} |x^{(0)} - x^{(p_0)}|.$$

Взяв последовательность $r = r_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, стремящуюся к нулю, построим последовательность точек $x^{(p_0)}$, стремащуюся к точке x, для которых каждый раз удовлетворяется неравенство (4). Переходя в нем к пределу, получим:

$$|f(x^{(0)}) - f(x)| \leq K|x^{(0)} - x|, \tag{11}$$

где $K = \frac{2\sqrt{n^n}}{\delta \cdot \Delta}$.

Итак, показано, что (11) имеет место для каждой точки $x \in P''$ и любой точки $x^{(0)} \in Q(x) \cap P''$.

Покажем теперь, что все конусы $Q(x)$, $x \in P''$, содержат конусы $Q_0(x)$, полученные параллельным переносом одного фиксированного шарового конуса Q_0 в точку x.

Прежде всего, для угла α_x между осью и образующей конуса $Q(x)$ удовлетворяется неравенство

$$\sin \alpha_x > \frac{\Delta(x)}{2n\sqrt{n^n}} > \frac{30\sqrt{\sigma} n \sqrt{n^n}}{2n\sqrt{n^n}} = 15\sqrt{\sigma},$$

т. е.

$$\alpha_x > 15\sqrt{\sigma}.$$

Покажем теперь, что угол между осями различных конусов $Q(x)$ и $Q(x')$ меньше $\sqrt{\sigma}$, отсюда и будет следовать наше утверждение.

Перенесем репер $t(x)$ и $t(x')$ в начале координат и пусть, как и в лемме 3, полученным системам координат $O\xi$ и $O\xi'$ соответствуют афинные преобразования

$$A = \|a_{lk}\| \quad \text{и} \quad A' = \|a'_{lk}\| \quad (l, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Рассмотрим в этих системах векторы $\overline{B}$ и $\overline{B}'$, лежащие на их биссектрисах, например, соответствующие вектору $\overline{x} = \sum_{k=1}^{n} \overline{i_k}$ на биссектрисе $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ (с компонентами, равными 1), и оценим угол между ними. Имеем:

$$\overline{B} = \sum_{l,k=1}^{n} a_{lk} \overline{i_l} \qquad \text{и} \qquad \overline{B}' = \sum_{l,k=1}^{n} a'_{lk} \overline{i_l},$$

где $a_{lk}a'_{lk}$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ — направляющие косинусы осей $O\xi$, $O\xi'$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

В определениях $\det \|a_{lk}\|$ и $\det \|a'_{lk}\|$ прибавим к первому столбцу все остальные, тогда по неравенству Адамара получим:

$$\Delta(x) = \det \|a_{lk}\| \leq |\overline{B}| = B$$

$$\Delta'(x) = \det \|a'_{lk}\| \leq |\overline{B'}| = B'.$$

Оценим длину l вектора $\bar{l} = \overline{B'} - \overline{B}$:

$$l^2 = \sum_l \left[\sum_k (a'_{lk} - a_{lk})\right]^2 \leq \sum_l [n \sum (a'_{lk} - a_{lk})^2] = n \sum_k \left(2 - 2\cos[\widehat{O\xi_k, O}\xi'_k]\right)$$

$\leq 4n^2 \sin^2 \frac{\sigma}{2}$,

т.е.

$$l \leq 2n \sin \frac{\sigma}{2}.$$

Здесь непользованы неравенство Коши - Буняковского и условие $[\widehat{O\xi_k, O}\xi'_k] < \sigma$ (см. свойство 1) леммы 5).

Далее

$$\frac{l}{B} \leq \frac{l}{\Delta} \leq \frac{2n \sin \frac{\sigma}{2}}{30\sqrt{\sigma} n \sqrt{n^n}} < \frac{\sqrt{\sigma}}{30\sqrt{n^n}},$$

и такая же оценка для $\frac{l}{B'}$. Из теоремы синусов легко следует, что $[\widehat{\overline{B}, \overline{B'}}] < \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{n^n}}$, что требовалось.

Итак, мы показали, что для каждой точки x шара P'' имеется конус $Q_0(x)$ с вершиной x, полученный параллельным переносом фиксированного шарового конуса Q_0 и такой, что для любой точки $x' \in Q_0(x) \cap P''$ имеем:

$$|f(x') - f(x)| \leq K|x' - x|,$$

где K — единая для всех $x \in P''$ постоянная.

Выбрав в конусе Q_0 произвольный $n-$репер и перенося его в $Q_0(x)$, $x \in P''$, легко убедимся в условии Липшица для $f(x)$: ведь она по каждому переменному в отдельности (в новой системе) будет липшицево, так как все равные производные числа у нас ограничены одним и тем же числом K (см. гл. I).

З а м е ч а н и е 4. Из доказательства леммы 6 легко заключить, что шар D' можно выбрать с центром в любой точке шара P''.

Теперь мы в состоянии доказать нашу основную здесь теорему.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы.

Возьмем произвольный шар $d, \bar{d} \subset D$. На основании лемм 5 и 6 найдется другой шар $d' \subset d$, в котором функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Следовательно, почти в каждой точке шара d' функция $f(x)$ имеет полный дифференциал; но если в такой точке $f(x)$ обладает еще и свойством K_0, то легко видеть, что дифференциал равен нулю почти всюду в d', а так как $f(x)$ удовлетворяет и условию Липшица, то она является постоянной всюду в d'.

В силу произвольности $d, \overline{d} \subset D$, заключаем, что в условиях нашей теоремы существует открытое всюду плотное множество $O \subset D$, в каждой компоненте которого f постоянна.

Предположим теперь, что утверждение теоремы неверно, и наша функция $f(x)$ не является постоянной всюду в D. Это означает, что найденное нами открытое множество O имеет непустое дополнение $P = D\emptyset$: $P \neq \emptyset$; при этом O распадается на компакты: $O = \bigcap_i O_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, в каждой из которых f постоянна. Будем считать, что каждая компонента O_i является максимальной по этому свойству: любая открытая область, содержащая O_i, в которой f является постоянной, совпадает с O_i.

Иначе это означает, что в любой окрестности каждой точки непустого замкнутого множестыва $P = D \setminus O$ функция f не является постоянной. Легко видеть, что P — совершенно (и нигде не плотно в D). На основании леммы 5 выделим порцию $P' = P \cap D'$ $(\overline{D}' \subset D$ — шар с центром в точке из $P')$, обладающую всеми указанными в ней свойствами; очевидно, можно считать диаметр D' меньшим D.

Возьмем репер $t(x') = \{t_k(x')\}$ какой-либо точки $x' \in P'$ и перенесем его палаллельно во все точки дополнения $D' \setminus P'$; очевидно, что полученные для точек шара D' реперы обладают свойствами 1) и 2) леммы 5.

Внутри D' возьмем концентрический шар d, радиус которого в $\frac{2\sqrt{n^n}}{\Delta}$ раз меньше радиуса D' $(\Delta^2 = 900\sigma \cdot n^{n+2} < \Delta^2(x)\ x \in P')$. Из леммы 3 и доказательства леммы 6 следует, что для каждой точки $x \in D$ существует конус $Q_0(x)$, полученный параллельным пе реносом фиксированного шарового конуса Q_0 в точку x, такой, что любой шар $V_r(x)$ достижим из каждой его точки, причем все соответствующие ломаные и их деформации расположены внутри D': что это верно для деформированных ломаных, следует из той же оценки их длины в лемме 4, что и для обычных ломаных (составленных из канонических).

Рассмотрим систему симплексов $\bigcap\limits_{s=0}^{\infty} T'_s$, содержащую конус $Q_0(x)$ (см. лемму 3). Пусть $x^{(0)} \in Q_0(x) \cap d$ и пусть $x^{(0)} \in T'_s$. Возьмем каноническую ломаную $L = (x^{(0)}x^{(1)} \dots x^{(n_0)})$, соответствующую T'_s с концом $x^{(n_0)} \in T'_{s-1}$ (см. замечание 2 к лемме 1) и продеформируем ее следующим образом: если $x^{(0)} \in P'$, то звено $x^{(0)}x^{(1)} \subset t(x^{(0)})$ оставляем без изменения; если $x^{(0)} \in D' \setminus P'$ и все звено $x^{(0)}x^{(1)}$ (без концов) лежит вне P', то его также оставляем без изменения; если же $x^{(0)} \in D' \setminus P'$ и звено $x^{(0)}x^{(1)}$ пересекает P', то отрезок его $x^{(0)}y^{(1)}$ до первой точки $y^{(1)}$ пересечения его с P' оставляем в L без изменения, а отрезок $y^{(1)}x^{(1)}$ заменяем отрезком $y^{(1)}y^{(2)}$ от $y^{(1)}$ до какой-либо опорной его точки $y^{(2)} \in t(y^{(1)})$ (см. леммы 1, 3). Короче, "ломку"звеньев производим в местах столкновения лучей t_k с множеством P'.

Двигаясь подобным образом от точки $y^{(2)}$ вдоль луча $t_k(y^{(2)})$, соответствующего лучу $t_k(x^{(1)}) \subset x^{(1)}x^{(2)}$, применяем предыдущее построение. Таким образом, шаг за шагом получим другую ломаную $L' = (y^{(0)} \dots y^{(m_0)})$, $y^{(0)} \equiv x^{(0)}$, с концом $y^{(m_0)}T'_{s-1}$. Берем теперь каноническую ломаную $L_1 = (x_1^{(0)}x_1^{(1)} \dots x_1^{(n_1)})$, $x_1^{(0)} \equiv y^{(m_0)}$, с конусом $x_1^{(n_1)} \in T'_{s-2}$ и повторяем наше построение. Мы уже знаем, что в результате получим ломаную $L_0 = (y^{(0)} \dots y^{(s_0)})$, $y^{(0)} \equiv x^{(0)}$, $y^{(s_0)} \in V_r(x)$, которая достигает шара $V_r(x)$ (см. леммы 1, 3).

Но тогда

$$\left|f\left(x^{(0)}\right) - f\left(y^{(s_0)}\right)\right| \le \sum_{s=1}^{s_0} \left|f\left(y^{(s-1)}\right) - f\left(y^{(s)}\right)\right| < \frac{1}{\delta}\sum_{s=1}^{s_0} |y^{(s-1)} - y^{(s)}| =$$

$$= \frac{1}{\delta}L' \le \frac{2\sqrt{n^n}}{\delta \cdot \Delta}|x^{(0)} - y^{(s_0)}|,$$

так как: для звена $y^{(s-1)}y^{(s)}$, лежащего в $D' \setminus P'$ (кроме $y^{(s)}$) соответствующее слагаемое в первой сумме равно нулю, а если $y^{(s-1)} \in P'$, то применяем свойство 4) леммы 5.

Уменьшая r до нуля и переходя в полученном неравенстве к пределу, получим:

$$\left|f\left(x^{(0)}\right) - f\left(x\right)\right| \le K|x^{(0)} - x|,$$

где $K = \frac{2\sqrt{n^n}}{\delta \cdot \Delta}$.

Проводя теперь все рассуждения леммы 6 и пользуясь замечанием к ней, найдем шар d' с центром в некоторой точке $x' \in P'$, в котором функция f удовлетворяет условию Липшица. Но отсюда, как и прежде, следует, что f постоянна всюду в d', что противоречит определению множества P'.

Тем самым теорема доказана полностью.

Отметим, что нами доказано несколько большее, чем утверждает эта теорема. Сформулируем это в виде самостоятельного предложения:

Т е о р е м а 10. *Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ задана непрерывная функция $f(x)$ и пусть в каждой точке x области, исключая не более чем счетное их множество, определен $n-$репер $\tau(x) = \{\tau_k(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, такой, что*

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| < \infty$$

для $x + h \in \tau_k(x)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Тогда, если почти во всех $x \in D$ функция $f(x)$ обладает свойством K_0 (возможно, относительно другого $n-$репера $\tau'(x) = \{\tau'_k(x)\}$), то она постоянна всюду в D.

Покажем, как отсюда вывести другое аналогичное утверждение.

Назовем систему $n+1$ лучей $T(x) = \{T_i(x)\}$ общей, если $n+1$ точек на этих лучах, равноудаленных от общего начала x, не лежат в одной $n-1$-плоскости. Скажем, далее, что функция $f(x)$ обладает свойством K'_0 в точке x, если для некоторой общей системы лучей $T(x)$ найдется число $a = a(x)$, $0 \leq a(x) < \infty$, такое, что

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = a(x),$$

для $x + h \in T_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, (n+1)$.

Т е о р е м а 11. *Если в условиях теоремы 2 почти во всех точках $x \in D$ функция $f(x)$ обладает свойством K'_0, то она постоянна всюду в D.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 6 в каждом шаре $d, \overline{d} \subset D$, найдется шар d', в котором $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица. В точке x_0, где $f(x)$ имеет полный дифференциал и обладает свойством K'_0, соответствующее число $a = a(x)$ равно нулю: в противном случае, вектор $\mathrm{grad} f(x_0) \neq 0$ проектируется на все направления системы $T(x_0) = \{T_i(x_0)\}$, $i = 1, 2, \ldots, (n+1)$, в отрезки одинаковой длины, концы которых лежат, следовательно, на одном плоском ($n-1$-мерном) сечении шара диаметра $|\mathrm{grad} f(x_0)|$, что не возможно.

Итак, как и в основной теореме, найдется открытое всюду плотное множество $O \in D$, в каждой компоненте которого f постоянна. Проводя здесь в точности те же рассуждения, что и в этой теореме, с использованием теоремы 2, также покажем, что f постоянна всюду в D.

Из доказательства теоремы 1 следует также такое утверждение:

Т е о р е м а 12. *Если непрерывная функция $f(x)$ имеет неограниченные производные числа на всюду плотном множестве точек в области $D \subset \mathbb{R}^n$, то это множество резидуально в D и для каждой его точки x имеет место следующее свойство: для любого луча $t(x)$, не принадлежащего, быть может, некоторой (зависящей от x) $n-1$-плоскости, проходящей через x, выполнено равенство*

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| = \infty$$

при $x+h \in t(x)$.

Т е о р е м а 13. *Для того, чтобы f была дифференцируема почти всюду на $\mathcal{E} \subset D \subset \mathbb{R}^n$ в категорном смысле, необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на $\mathcal{E}$ (в категорном же смысле) существовали производные функции f вдоль n линейно независимых направлений (т. е. вдоль некоторого n-репера).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из доказательства теоремы легко следует, что если $\mathcal{E}$ не первой категории в D (а это естественно и предположить), то найдется открытое множество $O \subset D$, в каждой компоненте которого f удовлетворяет условию Липшица; при этом $\mathcal{E}$ всюду плотно в O, а разность $\mathcal{E} \setminus O$ — первой категории (в D).

Отсюда следует, что почти всюду (уже в смысле меры) в O функция f дифференцируема. Но нам нужно доказать, что она дифференцируема и в подавляющем большинстве точек первоначального множества $\mathcal{E}$, т. е. исключая подмножество первой категории.

Такими точками являются, например, точки непрерывности отображения $A \to \operatorname{contg}^C_\Gamma A$ для цилиндрических контингенций графика $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ функции f. Пусть A_0 — одна из них; контингенция $\operatorname{contg}^C_\Gamma A_0$ ограничена липшицевыми поверхностями на цилиндре $C^n = S^{n-1} \times \mathbb{R}^1$ $u = P(\varphi)$, $u = Q(\varphi)$. Так как для $x_0 =$пр.$A_0 \in O$ вдоль n-репера $\tau(x_0) = \{\tau_k(x_0)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ функция f имеет производные, то в соответствующих точках φ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ цилиндра $C^n(A_0) = C^n_0$ функции $P(\varphi)$ и $Q(\varphi)$ совпадают:

$$P(\varphi_k) = Q(\varphi_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. граничные поверхности $u = P(\varphi)$, $u = Q(\varphi)$ цилиндрического "пояса" $\operatorname{contg}^C_\Gamma A_0$ в этих точках "склеиваются".

Теперь нам будет удобнее перейти к сферической контингенции: $\mathrm{contg}_\Gamma^S A_0 \subset S^n(A_0)$. Пусть $\sigma \subset S^n$ — большая $(n-1)$-сфера, проходящая через точки φ_k; в силу линейной независимости направлений репера $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ сфера σ определена однозначно. Покажем, что сферическая контингенция $\mathrm{contg}_\Gamma^S A_0$ совпадает с σ.

В точке $A' \in \Gamma$, соот ветствующей точке $x' =$пр.A' дифференцируемости f, $\mathrm{contg}_\Gamma^S A'$ является большой сферой. А так как каждая граничная точка "пояса"$\mathrm{contg}_\Gamma^S A_0$ является предельной для этих сфер при $A' \to A_0$, а предельное положение больших сфер и притом принадлежащая $\mathrm{contg}_\Gamma^S A_0$, то отсюда и следует, что эта контингенция совпадает с σ.

Это же равносильно дифференцируемости f.

Теорема доказана.

Вспомним снова теорему о постоянстве функции $f(x)$. В процессе ее доказательства у нас возникал некоторый шар $V, \overline{V} \subset D$, в каждой точке которого был определенный n-репер $t(x) = \{t_1(x), \ldots, t_n(x)\}$, причем:

1) направления реперов $t(x'), t(x'')$ для различных точек $x', x'' \in V$ "почти "одинаковы (с точностью до σ);

2) вдоль каждого из направлений этих реперов $t(x)$ отношения $\frac{|f(x')-f(x)|}{|x'-x|}$ при $x' \in t(x)$, $x' \neq x$, — равномерно ограничены.

Тогда существует такой шаровой конус $Q_0 \subset D$, что для конуса $Q_0(x)$, полученного параллельным сдвигом Q_0 в точку x, имеем: отношения

$$\frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|} \tag{12}$$

равномерно ограничены при любых $x' \in Q_0(x)$.

Если рассматривать направления репера $t(x) = \{t_1(x), \ldots, t_n(x)\}$ как оси координат возникающей декартовой системы, то первым важным наблюдением будет то, что конусы $Q_0(x)$ принадлежат "отрицательному"октанту этой системы, определенному репером $-t(x) = \{-t_1(x), \ldots, -t_n(x)\}$, с осью, близкой (с точностью до τ) к биссектрисе этого октанта.

Это относилось к отношениям вида (12); если же интересоваться "почти" настоящими разностными отношениями

$$\frac{f(x') - f(x)}{|x' - x|},$$

то здесь приходится следить и за знаками этих отношений. Например, пусть вместо условия 2) выше вдоль каждого направления из

$t(x)$ эти отношения больше $\frac{q}{2}$, так сказать, одного знака (см. лемму 5).

Возьмем тогда каноническую ломаную $L = (x', x^{(1)} \dots x^{(p_0)})$, составленную из звеньев реперов д ля ее вершин, а $x^{(p_0)}$ — сколь угодно близкая к x; тогда

$$f(x') - f\left(x^{(p_0)}\right) = \left[f\left(x^{(1)}\right) - f(x')\right] + \left[f\left(x^{(2)}\right) - f\left(x^{(1)}\right)\right] + \dots +$$

$$+ \left[f\left(x^{(p_0-1)}\right) - f\left(x^{(p_0)}\right)\right] < -\frac{q}{2}\sum\left|x^{(p_0-1)} - x^{(1)}\right| = -\frac{q}{2}\cdot L <$$

$$< -K\left|x' - x^{(p_0)}\right|;$$

как и в лемме 5, переходя к пределу, получим

$$\frac{f(x') - f(x)}{|x' - x|} \leq -K \quad \text{при} \quad x' \in Q_0(x),$$

что означает, что к графику функции f над $Q_0(x)$ можно коснуться "пустым" шаровым конусом, проектирующимся на $Q_0(x)$. Здесь также, если то же имеет место для точек шара $V \subset D$, то и этот конус для них можно предположить полученным из фиксированного конуса в $\mathbb{R}^{n+1}$ параллельным сдвигом, а функция f оказывается дифференцируемой почти всюду в V.

Аналогично со случаем, если указанные отношения меньше $-\frac{q}{2}$.

Но когда у репера $t(x)$ имеются направления "разнородные", т. е. для одних $t_k \in t$ наши отношения больше $\frac{q}{2}$, а для других — меньше $-\frac{q}{2}$, для других — больше $\frac{q}{2}$, то в этом случае нам придется дополнить каждый репер ему симметричным, т. е. вместо репера лучей будем брать репер прямых.

При этом условии, оказывается, все снова становится на свои места, и мы можем сформулировать следующую теорему:

Т е о р е м а 14. *Пусть $f(x)$,$x \in D \subset \mathbb{R}^n$, непрерывная функция и пусть $\mathcal{E} \subset D$ множество точек x, в каждой из которых имеется n-репер прямых $\lambda(x) = \{\lambda_1(x) \dots \lambda_n(x)\}$, таких, что вдоль прямой $\lambda_k(x)$, $(k = 1, 2, \dots, n)$ имеем:*

либо

$$\overline{\lim_{x' \to x}} \frac{f(x') - f(x)}{|x' - x|} < +\infty$$

либо

$$\underline{\lim_{x' \to x}} \frac{f(x') - f(x)}{|x' - x|} > -\infty$$

при $x' \in \lambda_k(x)$.

Тогда множество $\mathcal{E}$ — типа F_σ и если Int$\mathcal{E} \neq \emptyset$ *(т. е. $\mathcal{E}$ — не первой категории), то на открытом множестве O, плотном на* Int$\mathcal{E}$*, функция f дифференцируема почти всюду.*

Мы уже знаем, что на отношение можно смотреть двояко: можно прямую $\lambda_0(x)$ рассматривать как составленную из двух противоположно направленых лучей $[x, +\infty)$, $(-\infty, x]$, либо как прямую с единой ориентацией. Оказывается, теорема справедлива и в том, и в другом случае.

Мы приведем сейчас лемму, аналогичную лемме 5 в п...., и на ее основании покажем, как сформулированная теорема сводится к известным нам построением.

Ориентируем каждый из реперов прямых $\lambda(x)$ произвольно.

Обозначим через $\mathcal{E}(m_k, p, q)$ множество точек $x \in \mathcal{E}$, удовлетворяющих условиям:

А) $\lambda_k(x) \in H_p^{(m_k)}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$;

Б) $\Delta^2(x) \geq n^{n+2} \cdot \frac{2}{p}$;

В) $f(x') - f(x) \leq \frac{q}{2}|x' - x|$ для всех x' прямых $\lambda_{k_1}(x), \dots, \lambda_{k_l}(x)$ удовлетворяющих неравенствам $0 < |x' - x| < \frac{1}{q}$ и $f(x') - f(x) \geq -\frac{q}{2}|x' - x|$ для остальных прямых репера $\lambda(x)$, причем расстояние от x до границы области D больше $\frac{2}{q}$.

Как мы видели и в лемме 5, эти множества можно считать замкнутыми, а так как, очевидно,

$$\bigcup \mathcal{E}(m_k, p, q) = \mathcal{E}$$

то отсюда и следует, что $\mathcal{E}$ — типа F_σ.

Если Int$\mathcal{E} \neq \emptyset$, как и в лемме 6 берем шар, принадлежащий некоторому $\mathcal{E}(m_k, p, q)$, а "пустые" конусы к графику Γ функции f находим над конусом $Q_0(x)$ следующим образом: заменяем каждое из направлений $\lambda_{k_1}(x), \dots, \lambda_{k_l}(x)$ на противоположное $\left\{-\lambda_{k_i}, \lambda_{l_j}\right\}$, а затем искомый конус найдется, как и обычно, в противоположном октанте $\left\{\lambda_{k_i}, -\lambda_{l_j}\right\}$.

Этим и завершается доказательство теоремы.

Глава 4

Связность

1. Основные свойства связных множеств

Здесь нас будут интересовать определенные подмножества некоторого евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Одна из простых, но важных теорем анализа утверждает, что каждая вещественная непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ обладает свойством Дарбу, т. е. между любыми двумя своими значениями принимает все промежуточные. Можно описать весь класс множеств $Z \subset \mathbb{R}^n$, для которых имеет место это же свойство.

Определение. Множество $Z \subset \mathbb{R}^n$ называется связным, если каждая вещественная непрерывная на нем функция обладает свойством Дарбу.

Ниже мы сумеем привести внутреннее определение связности, а пока из элементарных теорем анализа и приведенного нами следует, что единственными непустыми связными подмножествами прямой являются одноточечные множества, сегменты, полусегменты (конечные и бесконечные) и интервалы (конечные или бесконечные).

Установим сначала некоторые общие свойства связных множеств.

Теорема 1.*Пусть в $\mathbb{R}^n$ дана система связных множеств Z_α, причем пересечение всех этих множеств непусто. Тогда объединение $Z = \bigcup_\alpha Z_\alpha$ связно.*

Доказательство. Пусть непрерывная функция $f : Z \to \mathbb{R}$ принимает значения $a, b, a < b$ и $a < c < b$. Далее, пусть точка $z_0 \in \bigcap\limits_\alpha Z_\alpha$ и $f(z_0) = c'$. Наконец, предположим, что $f(z_1) = a$ при $z_1 \in Z_{\alpha_1}$, и $f(z_2) = b$ при $z_2 \in Z_{\alpha_2}$. Если $c' > c$, то в силу связности Z_{α_1}, значение c функция f принимает на этом множестве, если же $c' < c$, то это значение она принимает на Z_{α_2}. Другими словами, на объединении $Z = \bigcup\limits_\alpha Z_\alpha$ f обладает свойством Дарбу.

Т е о р е м а 2.*Пусть для любых двух точек* z_1 *и* z_2 *множества* $Z \subset \mathbb{R}^n$ *можно найти содержащее эти точки связное множество* C_{12}. *Тогда все* Z *связно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f непрерывная функция, $z_1, z_2 \in Z$, причем $f(z_1) = a$ и $f(z_2) = b$. На связном множестве C_{12}, содержащем z_1, z_2 функция f принимает все промежуточные значения между a и b.

С л е д с т в и е. Всякое выпуклое множество связно. В частности, все $\mathbb{R}^n$ связно.

В следующей теореме мы рассматриваем непрерывные отображения из одного пространства в другое.

Т е о р е м а 3. *Непрерывный образ связного множества связен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Z \subset \mathbb{R}^n_z$ связно, $\varphi : Z \to \mathbb{R}^m_w$ непрерывно и $Y = \varphi(Z) \subset \mathbb{R}^n_w$ — образ. Непрерывная вещественная функция $f : Y \to \mathbb{R}$ приводит к функции $f_1 = f \cdot \varphi : Z \to \mathbb{R}^1$, которая обладает свойством Дарбу в силу связности Z; это же означает свойство Дарбу и для f.

Пусть $l_1, l_2, \dots, l_n$ — система прямолинейных отрезков на $\mathbb{R}^n$ таких, что $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset, \dots, l_{n-1} \cap l_n \neq \emptyset$. Последовательным применением теоремы 1 докажем, что объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{n} l_k$ есть связное множество. Это объединение называется ломаной, если в каждом звене l_k отметить начальную и конечную точки, причем начальная точка каждого следующего звена l_{k+1} совпадает с конечной точкой l_k. Итак, ломаная есть связное множество; она, конечно, может иметь точки самопересечения. Ломаную без точек самопересечения назовем простой.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $Z \subset \mathbb{R}^n$ *— связное множество. Всякое множество* Z_0*, содержащее* Z *и содержащееся в* $\overline{Z}$*, связно.*

Обычно эту теорему формулируют так: присоединяя к связному множеству Z любое множество его предельных точек, получаем связное множество.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f : Z_0 \to \mathbb{R}$ непрерывна, $f(z_1) = a < b = f(z_2)$, $z_1, z_2 \in Z_0$, но некоторого значения c, $a < c < b$, она не принимает на Z_0. Из непрерывности f следует, что найдутся настолько близкие к z_1, z_2 точки $z_1', z_2' \in Z$, в которых $f(z_1') = a'$, $f(z_2') = b'$, и такие, что все еще $a' < c < b'$, что противоречит свойству Дарбу на (связном) Z.

Пусть $Z \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое множество, а $z \in Z$ — произвольная точка. Назовем компонентой точки z в Z объединение $C(z)$ всех связных множеств, лежащих в Z и содержащих точку z. Множество $C(z)$ содержит точку z, так как множество, состоящее из одной точки, связно. Поэтому $C(z)$ непусто. По теореме 1 множество $C(z)$ связно. Таким образом, $C(z)$ есть наибольшее лежащее в Z связное множество, содержащее точку z ("наибольшее"в том смысле, что всякое лежащее в Z связное множество, содержащее точку z, содержится в $C(z)$). Наконец, в силу теоремы 4 $C(z)$ замкнуто: в противном случае, присоединяя к $C(z)$ какую-либо не содержащуюся в нем предельную точку z', мы получили бы "большее"связное множество $C(z) \cup \{z'\}$.

Из теоремы 2 легко следует также, что каждая компонента $C(z)$ какой-либо точки z есть в то же время и компонента любой другой точки $z' \in C(z)$, так что все множество Z (однозначно) распадается на свои компоненты, т.е. на компоненты различных точек $z \in Z$. Из предыдущего следует, что компоненты множества Z суть наибольшие его связные подмножества.

2. Внутреннее определение связности

Приведем, наконец, определение связности множества Z (конечно, эквивалентное прежнему), которое непосредственно выражается через топологию самого Z, а не опосредованного множества (как у нас — множества вещественных непрерывных функций на Z).

Т е о р е м а 5.*Множество $Z \subset \mathbb{R}^n$ связно тогда и только тогда, когда его нельзя представить в виде $Z = Z_1 \cup Z_2$, где Z_1 и Z_2 непусты, замкнуты (в Z) и $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если представление $Z = Z_1 \cup Z_2$ возможно, то функция f, равная нулю на Z_1 и единице на Z_2, непрерывна и, очевидно, не обладает свойством Дарбу, т.е. Z несвязно. Обратно, пусть Z несвязно и непрерывная функция $f : Z \to \mathbb{R}^1$ не обладает свойством Дарбу, т.е. $f(z_1) = a < f(z_2) = b$, а значения c, $a < c < b$, f не принимает. Но тогда $Z_1 = \{f \leq c\}$ и $Z_2 = \{f \geq c\}$ замкнуты и непусты, так как $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$ и, конечно, $Z = Z_1 \cup Z_2$. Теорема доказана.

Если множество Z несвязно, то в представлении

$$Z = Z_1 \cup Z_2 \tag{1}$$

множества Z_1 и Z_2 взаимнодополнительны, поэтому каждое из них, как дополнение к замкнутому, одновременно и открыто (в Z). Поэтому в определении несвязного множества слагаемые Z_1, Z_2 открыто-замкнуты.

Каждое множество $Z \subset \mathbb{R}^n$ в относительной топологии содержит два "тривиальных"открыто-замкнутых множества: все Z и пустое множество. Если Z несвязно , то в нем имеются нетривиальные открыто-замкнутые множества, т.е. непустые и в то же время не совпадающие со всем Z: таковы каждое из множеств Z_1 и Z_2 в (1). Обратно, если в Z имеется хотя бы одно нетривиальное замкнутое множество Z_1, то его дополнение $Z_2 = Z \setminus Z_1$ также является нетривиальным открыто-замкнутым множеством, так что имеем разбиение (1). Итак, множество тогда и только тогда несвязно, когда в нем имеется нетривиальное открыто-замкнутое подмножество.

Найденная (внутренняя) характеристика связности позволяет теперь доказать важную теорему.

Т е о р е м а 6.*Для того, чтобы открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ было связно, необходимо и достаточно, чтобы любые две точки множества G можно было соединить простой ломаной, т.е. без точек самопересечения, лежащей в G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.Достаточность следует из связности ломаной и теоремы 2. Докажем необходимость; другими словами, нужно доказать, что если в открытом G имеются две точки z_1 и z_2, которые не могут быть соединены лежащей в G ломаной, то G несвязно.

Обозначим через $G_1 \subset G$ множество, содержащее z_1 и все точки G, которые можно соединить с z_1 лежащими в G простыми ломаными; G_1 непусто и не совпадает с G, так как по предположению точка z_2 не принадлежит G_1. Покажем, что G_1 открыто-замкнуто в G.

Докажем, что G_1 открыто. Пусть $z_1 \in G_1$. Тогда существует $U(z,\varepsilon) \subset G$. Какова бы ни была точка $z' \in U(z,\varepsilon)$, отрезок zz' лежит в $U(z,\varepsilon) \subset G$. Возьмем какую-либо простую ломаную z_1z, соединяющую z_1 с z. Если она не имеет с $\overline{zz'}$ ни одной общей точки, кроме z, то, присоединяя отрезок zz', получаем простую ломаную $\overline{z_1z'} \subset G$, соединяющую z_1 с z'. Если же ломаная $\overline{z_1z'}$ имеет хотя бы одну отличную от z точку пересечения с отрезком $\overline{zz'}$, то обозначим через z'' ту из этих точек, которая ближе всего расположена к z'. Тогда ломаная $\overline{z_1z'}$ не имеет с отрезком $\overline{z''z'}$ никакой общей точки, кроме z'', и, присоединяя к ломаной $\overline{z_1z''}$ отрезок $\overline{z''z'}$, получаем лежащую в G простую ломаную $\overline{z_1z'}$, соединяющую z_1 с z'. Итак, каждую точку $z' \in U(z,\varepsilon)$ можно соединить с z_1 простой ломаной, лежащей в G, так что $U(z,\varepsilon) \subset G_1$ и, следовательно, произвольная точка $z \in G_1$ есть внутренняя точка множества G_1 (по отношению к $\mathbb{R}^n$, тем более по отношению к G), т.е. G_1 открыто в G.

Докажем, что G_1 замкнуто в G. Пусть $z' \in G$ — предельная точка множества G_1. Так как G открыто, то существует $U(z',\varepsilon) \subset G$. В $U(z',\varepsilon)$ найдется точка $z \in G_1$ и ее можно соединить с z_1 простой ломаной $\overline{z_1 z} \in G$. Так как отрезок $\overline{zz'}$ лежит в G, то, повторяя дословно только что выполненное построение, снова получаем простую ломаную $\overline{z_1 z'} \subset G$, так что $z' \in G_1$. Теорема доказана.

3. Квазикомпоненты

О п р е д е л е н и е. Скажем, что множество $Z \subset \mathbb{R}^n$ связно между своими точками z_1, z_2, если любая вещественная непрерывная функция $f(z)$, $z \in Z$, принимает все промежуточные значения между $f(z_1)$ и $f(z_2)$.

В силу этого определения обычную связность множества можно определить как его связность между любыми его точками.

Пусть $Z \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое множество, $z \in Z$ — произвольная точка.

Назовем квазикомпонентой точки z в Z объединение $Q(z)$ всех точек z' таких, что Z связно между z и z'.

Легко доказать следующую теорему.

Т е о р е м а. *Квазикомпонента $Q(z)$ есть пересечение всех открыто-замкнутых множеств в Z, содержащих точку z.*

Из этой теоремы сразу следует, что компонента $C(z)$ точки $z \in Z$ содержится в квазикомпоненте $Q(z)$, а квазикомпоненты представляют собой непересекающиеся замкнутые множества (как и компоненты). Рассмотрим пример (Рис. 6). Пусть

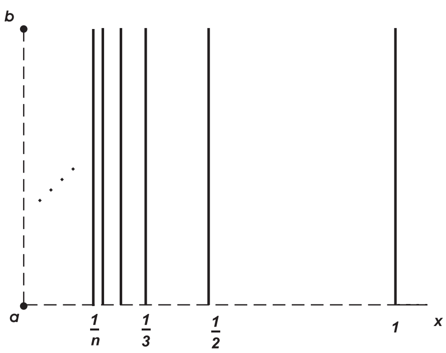

Рис. 6

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\left(x = \tfrac{1}{n}\right)(0 \le y \le 1)\right] \cap$$

$$\cap \{a = (0,0)\} \cup \{b = 0,1\}.$$

Множество Z связно между a и b (и $\{a\} \cup \{b\}$ есть квазикомпонента), хотя a и b принадлежит двум различным компонентам множества Z.

Нетривиальный пример мы построим ниже и свяжем его со всюду дифференцируемой функцией с особенностями.

4. Связность графика многозначного отображения

Нетривиальными примерами связных множеств, например, на плоскости, являются графики точных производных — в случае, если они не являются непрерывными [1]. Мы приведем доказательство этого утверждения, а также его обобщения.

Сначала напомним определение границы FrA произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^n$; именно,

$$\mathrm{Fr}A = \bar{A} \cap (\overline{\mathbb{R}^n \setminus A}) = \bar{A} \cap \overline{cA},$$

т.е. FrA есть множество всех точек, в любой окрестности каждой из которых находятся как точки, принадлежащие множеству A, так и точки, ему не принадлежащие.

Мы уже упоминали выше о функциях первого класса и о теореме Бэра для этих функций о наличии у них точек непрерывности.

Докажем сначала следующую теорему, схема доказательства которой будет применяться и в дальнейшем.

Т е о р е м а 7. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^p$, и $f : D \to \mathbb{R}^q$ — функция первого класса Бэра такая, что $f(\partial U) \subset \overline{f(U)}$), для любого открытого шара $U \subset D$, где $\overline{U} \subset D$. Пусть $Y = f(D)$. Тогда Y — связно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что F — открыто-замкнутое подмножество Y и $\emptyset \neq F \neq Y$. Положим $A = f^{-1}(F)$. Из связности D следует, что $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{D \setminus A} \neq \emptyset$. Так как f — функция первого класса, то сужение $f|\mathrm{Fr}(A)$ имеет точку непрерывности a. Поскольку F и $Y \setminus F$, а, следовательно, A и $D \setminus A$ удовлетворяют тем же предположениям, можно считать, что $a \in A$, и потому $a \in A \cap \overline{D \setminus A}$.

Множество $A = f^{-1}(F)$ содержит окрестность точки a относительно множества fr(A), так как функция $f|\mathrm{Fr}(A)$ непрерывна в точке a, и F — окрестность $f(a)$; поэтому существует число $\varepsilon > 0$ такое, что из условий $x \in \mathrm{Fr}(A)$ и $\rho(x, a) < \varepsilon$ следует, что $x \in A$. Пусть b — точка множества $D \setminus A$ такая, что $\rho(a, b) < \varepsilon$ (в соответствии с условием $a \in \overline{D \setminus A}$). Следовательно, $b \notin \mathrm{Fr}(A)$, откуда $b \in D \setminus \bar{A}$. Соединим точки a и b отрезком $[a, b]$ и возьмем открытый шар U с центром в точке b принадлежащий $D \setminus \bar{A}$. Перемещаем U вдоль отрезка $[a, b]$ до первой точки его касания с границей ∂U к множеству $\mathrm{Fr}(A)$. Точку касания обозначим через c. Ясно, что $c \in \mathrm{Fr}(A)$, а из этого следует, что $c \in A$, поэтому $f(c) \in F$. Но это противоречит формуле

$$f(c) \in \overline{f(U)} \subset \overline{f(D \setminus A)} = \overline{ff^{-1}(Y \setminus F)} = Y \setminus F.$$

Пусть снова D — область в $\mathbb{R}^p$. Для непрерывной вещественной функции $f : D \to \mathbb{R}^1$ перенесем наше прежнее построение. Обозначим точку $x \in D$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = (x_i, y_i)$; рассмотрим множества

$$\mathfrak{m}_x^{(i)} = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{m_\varepsilon(f; x_i)},$$

где

$$m_\varepsilon(f; x_i) = \left\{ \frac{f(x_i + \Delta x_i, y) - f(x_i, y)}{\Delta x_i}, 0 < |\Delta x_i| \leq \varepsilon \right\}.$$

О п р е д е л е н и е. Число d называется частным производным числом по x_i непрерывной функции f в точке x если существует последовательность вещественных чисел $\{h_n\}$, $h_n \to 0$, для которой

$$\frac{f(x_i + h_n, y) - f(x_i, y)}{h_n} \to d.$$

Легко показать, что $\mathfrak{m}_x^{(i)}(f)$ совпадает с совокупностью всех частных производных чисел по x_i функции f в данной точке x, и состоит, вообще говоря, из двух компонент: множества $\mathfrak{m}_x^{(i)+}$ правых (т. е. для $h_n > 0$) и множества $\mathfrak{m}_x^{(i)-}$ левых частных производных чисел.

Докажем следующую теорему, обобщающую результат [1] для случая, когда $D = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$, и функция f непрерывна на интервале (α, β).

Т е о р е м а 8 *Пусть f — непрерывная функция в области $D \subset \mathbb{R}^p$ и пусть в каждой точке $x \in D$ $\mathfrak{m}_x^{(i)}(f) = \mathfrak{m}_x^{(i)+} \cup \mathfrak{m}_x^{(i)-}$ — связно. Тогда график многозначного отображения*

$$\Phi : x \to \mathfrak{m}_x^{(i)}(f)$$

связен, т. е.

$$W_\Phi = \left\{(x, \mathcal{E}) : x \in D, \quad \mathcal{E} \in \mathfrak{m}_x^{(i)}(f)\right\}$$

— связное подмножество $\mathbb{R})^{p+1} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы проведем доказательство для случая $p = 2$, т. е. когда f — функция двух вещественных переменных $z = (x, y) \in D$. Нетрудно убедиться в том, что доказательство общего случая незначительно отличается от приводимого ниже.

Пусть F — открыто-замкнутое подмножество W и $\emptyset \neq F \neq W$; отметим, что оно состоит из целых множеств $\mathfrak{m}_z^{(x)}(f)$. Положим $A = \Phi_f^{-1}(F)$. Из связности D следует, что $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{D \setminus A} \neq \emptyset$, и сужение $\Phi_f|\mathrm{Fr}(A)$ имеет точку полунепрерывности сверху z_0 [2]. Поскольку F и $W|F$, а, следоватеяьно, A и $D \setminus F$ удовлетворяют тем же предположениям, можно считать, что $z_0 \in A$ и потому $z_0 \in A \cap \overline{D \setminus A}$.

Множество $A = \Phi_f^{-1}(F)$ содержит окрестность точки z_0 относительно множества $\mathrm{Fr}(A)$, так как функция Φ полунепрерывна сверху в точке z_0 и F — окрестность $\Phi(z_0) = \mathfrak{m}_{z_0}^{(x_0)}(f)$; поэтому существует число $\varepsilon > 0$ такое, что из условий $\rho(z, z_0) < \varepsilon$ и $z \in \mathrm{Fr}(A)$ следует, что $z \in A$. Пусть z_1 — точка множества $D \setminus A$ такая, что $\rho(z, z_1) < \varepsilon$ (в соответствии с условием $z_0 \in \overline{D \setminus A}$). Следовательно, $z_1 \in \mathrm{Fr}(A)$, откуда $z_1 \in D \setminus \bar{A}$. Проектируем множество $\mathrm{Fr}(A)$ на ось Oy. Возможны два случая:

1) проекция $\mathrm{Fr}(A)$ на ось Oy содержит отрезок;

2) эта проекция нульмерна.

В первом случае легко найти отрезок $[z_0, z_1]$, лежащий на некоторой прямой (параллельной оси Ox и пересекающей множество $\mathrm{Fr}(A)$ в точке z_0) и соединяющий точки z_0 и z_1, такой, что все его точки, кроме z_0 принадлежат $D \setminus A$, а $z_0 \in A$. Применяя обобщенную теорему Лагранжа (гл. III) к этому отрезку (что можно, так как функция f на прямой $y = y_0 = y_1$ ведет себя как функция одного переменного x) и пользуясь связностью $\mathfrak{m}_z^{(x)}(f)$,

$$\frac{f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{x_1 - x_0} \in \mathfrak{m}_z^{(c)}(f),$$

где c принадлежит отрезку $[x_0, x_1]$, лежащему на прямой $y = y_0$. Отсюда следует, что для точек z, близких к точке z_0, множество $\mathfrak{m}_z^{(c)}(f)$ можно сделать сколь угодно близким к множеству $\mathfrak{m}_z^{(x_0)}(f)$ (в смысле обычного расстояния между множествами). Это противоречит открытости выбранного выше множества F.

Во втором случае на оси Oy рассмотрим такой интервал смежности (y', y'') к проекции множества $\mathrm{Fr}(A)$, чтобы полоса $y' < y < y''$ содержала точки $D \setminus A$. Пусть z_0 — точка множества $\mathrm{Fr}(A)$ — находится на прямой $y = y'$; тогда легко видеть, что перпендикуляр $[z_0, z_1]$ для достаточно близких z_0 и z_1 принадлежит $D \setminus A$, за исключением точки z_0. Покажем, что и в этом случае в $D \setminus A$ функция f обладает частними производными числами, сколь угодно близкими к множеству $\mathfrak{m}_{z_0}^{(x_0)}(f)$.

В самом деле, рассмотрим множества $\mathfrak{m}_{z_0}^{(x_0)}(f)$ и $\mathfrak{m}_{z'}^{(x_0)}(f)$ производных чисел f соответственно в точках (x_0, y_0) и (x_0, y_1). Если они пересекаются, то доказывать нечего. Пусть они не пересекаются и для определенности все значения $\mathfrak{m}_{z_0}^{(x_0)}(f)$ меньше значений $\mathfrak{m}_{z'}^{(x_0)}(f)$ Пусть B — вещественное число такое, что

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} < B < \frac{f(x_0 + h, y_1) - f(x_0, y_1)}{h}.$$

Так как функция $\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ непрерывна при фиксированном h на отрезке $[y_0, y_1]$, то найдется такая точка $(x_0, y_2) = x'' \in D \setminus A$, что

$$\frac{f(x_0+h, y_2) - f(x_0, y_2)}{h} = B.$$

Применяя обобщенную теорему Лагранжа к отрезку $[x_0, x_0+h]$, лежащему на прямой $y = y_2$ получим

$$\frac{f(x_0+h, y_2) - f(x_0, y_2)}{h} \in \mathfrak{m}_z^{(c)}(f),$$

где $c \in [x_0, x_0+h]$ на прямой $y = y_2$. Отсюда, как в первом случае, получим, что для точек $z = (x, y)$, близких к точке $z_0 = (x_0, y_0)$, множество $\mathfrak{m}_z^{(x)}(f)$ можно сделать сколь угодно близким к множеству $\mathfrak{m}_z^{(x_0)}(f)$, что противоречит открытости выбранного множества F.

С л е д с т в и е. *Если производная* $\frac{df}{dx_k}$ *конечна для любого* $x \in D$, *то множество* $W = \left\{(x, \mathcal{E}) : x \in D, \mathcal{E} = \frac{df}{dx_k}\right\}$ *связно.*

5. Веер Кнастера-Куратовского

Понятие связности множества (даже в метрических пространствах) оказалось полным столькими неожиданностями, что математики уже научились осторожно строить различные гипотезы относительно свойств таких множеств.

Мы сейчас имеем уже возможность предложить пример множества, первоначальный вариант которого восходит к знаменитому в свое время "вееру Кнастера-Куратовского"[1] и которое кратко можно охарактеризовать так: это несчетное (мощность континуума) множество, компоненты которого суть отдельные точки этого множества; но если к нему прибавить одну точку, то новое множество будет связным и, следовательно, оно явится единственной компонентой для каждой его точки.

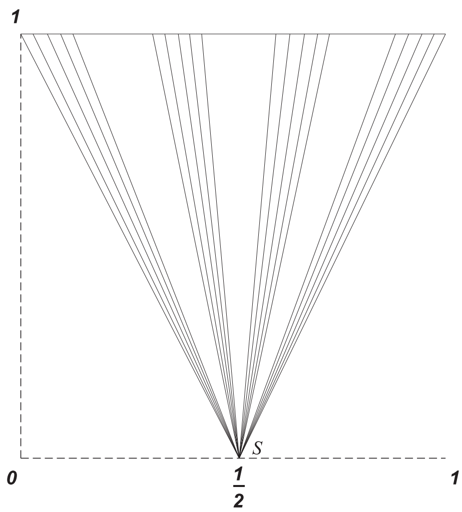

Рис. 7

Подчеркнем все же, что размерность (урысоновская) этих множеств равна $+1$: размерность бесконечного множества не меняется от прибавления или удаления одной точки.

Напомним сначала конструкцию Кнастера-Куратовского (несколько видоизменив ее).

В плоскости xOy рассмотрим единичный квадрат $I^2 = I \times I$; на "горизонтальной"стороне $y = 1$ этого квадрата поместим классическое канторово множество P и соединим точку $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ с каждой точкой этого множества прямолинейным отрезком ("канторов веер"). Если этот отрезок содержит конец интервала, смежного с P, то возьмем все его точки с рациональными ординатами; в противном случае берем точки с иррациональными ординатами. Все эти точки образуют требуемое множество (Рис. 7).

Именно, вместе с точкой $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ оно оказывается связным, а без нее оно не содержит никакого связного множества (имеющее более одной точки).

В другом примере [1] строится гомеоморфизм множества всех рациональных точек (т. е. точек с рациональными координатами) гильбертова пространства l_2 в "канторов веер", такой, что каждый луч веера содержит одну-единственную точку-образ, а весь этот образ — с тем же свойством, что и приведенный выше пример Кнастера-Куратовского.

В дальнейшем было приведено несколько других примеров подобного рода, начиная с Урысона [2], построившего счетное (!) связное множество (но не метризуемое), но, как и у первоначального примера Кнастера-Куратовского — с довольно сложными доказательствами.

Как уже обещано выше, мы дадим здесь сравнительно простой пример подобного множества.

Рассмотрим снова функцию $\theta_0(x)$, подобную канторовой лестнице, но липшицеву и дифференцируемую всюду на $I = [0, 1]$: она монотонно не бывает, постоянна на каждом интервале смежности к некоторому нигде не плотному совершенному множеству $P_0 \subset I$ положительной меры.

Покажем прежде всего, что производная $\theta_0'(x)$ обращается в нуль не только вне P_0, но и на некотором резидуальном его подмножестве.

В самом деле, пусть вопреки этому утверждению, на P_0 имеется подмножество $\mathcal{E}$, не первой категории на P_0, в точках которого $\theta_0'(x) > 0$.

Как всегда, рассматриваем замкнутое множество

$$\mathcal{E}_n = \left\{ \left| \frac{\theta_0(x+h) - \theta_0(x)}{h} \right| \geq \frac{1}{n} \text{ при } 0 < |h| < \frac{1}{n} \right\}$$

и очевидное представление $\mathcal{E} = \bigcup_n \mathcal{E}_n$.

Найдется порция $P_0' = P_0 \cap U$, на которой какое-то E_n будет плотно и, следовательно, просто совпадать в ней с P_0'. Взяв часть этой порции диаметра, меньшего $\frac{1}{n}$, придем к противоречию: в конце каждого интервала смежности к P_0' нет строгого неравенства $\left|\frac{\Delta\theta_0}{\Delta x}\right| \geq \frac{1}{n}$, $0 < |\Delta x| < \frac{1}{n}$.

Итак, множество $\{\theta_0' = 0\}$ и на P_0 является плотным G_δ множеством; в остальных точках мы, очевидно, можем считать, что $\{\theta_0' < 1\}$.

Мы уже знаем, что график Γ производной $y = \theta_0'(x)$ является связным множеством в квадрате $I^2 = I \times I$, содержащим интервалы смежности к P_0, а также найденное нами резидуальное подмножество нулей $\theta_0'(x)$ на P_0.

Точки графика Γ, соответствующие значениям $\theta_0' > 0$, принадлежат произведению $P_0 \times I$. В квадрате I^2 стянем в точку $x = \frac{1}{2}$ его сторону $y = 0$. Тогда произведение $P_0 \times I$ превратится в канторов конус K с вершиной $S = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, а график Γ перейдет в связное подмножество M этого конуса, содержащее S (стягивание — непрерывное отображение). Ясно, что среди лучей этого конуса K лишь подмножество их первой категории (на K) содержит точки Γ, отличные от S. И ясно также, что компоненты множества $M \setminus \{S\}$ суть отдельные точки, как и в случае предыдущих вариантов веера Кнастера-Куратовского.

6. Связность компактов

Введем следующие понятия.

Определение. Конечная последовательность $z_1, z_2, \ldots, z_n$ точек плоскости $\mathbb{C}$ называется ε-цепью, а именно, ε-цепью, соединяющей точку z_1 с точкой z_n, если $\rho(z_h, z_{h+1}) = |z_h - z_{h+1}| < \varepsilon$ для $h < n$. Множество $Z \subset \mathbb{C}$ называется ε-сцепленным, если любые две его точки могут быть соединены ε-цепью, составленной из точек множества Z. Множество Z называется сцепленным, если оно является ε-сцепленным при любом $\varepsilon > 0$.

Заметим, что эти понятия были введены еще Кантором применительно к произвольным метрическим пространствам.

Теорема 9. *Всякое связное множество $Z \subset \mathbb{C}$ является сцепленным.*

Доказательство. Пусть Z не сцеплено; докажем, что Z не может быть связным. В самом деле, так как Z не сцеплено, то в Z можно найти две точки z и w, которые лри некотором $\varepsilon > 0$ не могут быть соединены никакой ε-цепью. Обозначим через Z_ε множество всех точек из Z, которые могут быть соединены с z посредством ε-цепи. Множество Z_ε непусто — оно содержит точку z, не совпадает со всем Z, так как не содержит точки w, и замкнуто: если z' — точка прикосновения множества Z_ε, то имеется точка $z_n \in Z_\varepsilon$ отстоящая от z' на расстоянии, меньшем ε. Но z_n может быть соединено с z посредством ε-цепи $z = z_1, z_2, \ldots, z_n$; поэтому имеем и ε-цепь $z = z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1} = z'$, соединяющую z с z', т. е. $z' \in Z_\varepsilon$. Наконец, множество Z_ε открыто: если $z' \in Z_\varepsilon$, то z' может быть соединено с z посредством ε-цепи, но тогда и всякая точка z'' при $|z'' - z'| < \varepsilon$ может быть соединена с z посредством ε-цепи.

Пример множества всех рациональных точек на плоскости показывает, что теорема в общем случае не обратима. Однако имеет место

Теорема 10. *Всякий сцепленный компакт связен.*

Доказательство. В самом деле, если компакт K несвязен, то он может быть представлен в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых (а значит, и компактных) множеств: $K = K_0 \cup K_1$. Так как дизъюнктные компакты в C находятся на положительном расстоянии друг от друга, то $\rho(K_0, K_1) = \varepsilon > 0$. Взяв произвольно точки $z_0 \in K_0$ и $z_1 \in K_1$, видим, что они не могут быть соединены никакой ε-цепью.

Непустой связный компакт называется континуумом. Собственно континуум (или невырожденный континуум) — это континуум, содержащий более одной точки. Легко доказать, что всякий собственно континуум имеет мощность континуума. Из теорем 1 и 2 следует: для того чтобы компакт был континуумом, необходимо и достаточно, чтобы он был сцеплен. Оказывается далее, что пересечение убывающей последовательности континуумов есть континуум.

Нам потребуется более сильное предложение.

Теорема 11. *Пусть $K_1 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_1 \supset \ldots$, причем K_n есть непустой ε_n-сцепленный компакт и $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Тогда $K = \bigcap\limits_n K_n$ есть континуум.*

Доказательство основано на лемме, которой мы будем пользоваться и далее.

Лемма. *Пусть дана убывающая последовательность непустых компактов $K_1 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_1 \supset \ldots$ на плоскости. Какова бы ни была окрестность U пересечения $K = \bigcap\limits_n K_n$ этих компактов, найдется такое $n_0 = n(U)$, что для всех $n > n_0$ $K_n \subset U$.*

Доказательство. Так как U открыто, то каждое множество $K'_n = K_n \setminus U = K_n \cap (\mathbb{C} \setminus U) \subset K_1$ замкнуто. Кроме того, очевидно, $K'_n \supset K'_{n+1}$. Итак, множества K'_n образуют убывающую последовательность компактов. Их пересечение пусто, так как содержится, с одной стороны, в $K \subset U$, а с другой — в $\mathbb{C} \setminus U$. Поэтому все K'_n, начиная с некоторого $n = n_0$ пусты. Но если $K'_n = K_n \cap (\mathbb{C} \setminus U)$ пусто, значит, $K_n \subset U$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь теорему 11. Предположим, что K_n есть ε_n-сцепленный компакт (и $\varepsilon_n \to 0$) и что (непустой) компакт $K = \bigcap\limits_n K_n$ не является п континуумом. Тогда $K = K' \cup K''$, где K' и K'' замкнуты, не пусты и не пересекаются, а потому $\rho(K', K'') = \varepsilon > 0$. Положим $U' = U\left(K', \frac{\varepsilon}{3}\right)$, $U' = U\left(K'', \frac{\varepsilon}{3}\right)$. Открытое множество $U = U' \cup U''$ является окрестностью компакта K; поэтому для достаточно большого n имеем $K_n \subset U' \cup U''$. При этом $K'_n = K_n \cap U' \supset K' \neq \emptyset$, $K''_n = K_n \cap U'' \supset K'' \neq \emptyset$, $K'_n \cup K''_n = K_n$ и $\rho(K'_n, K''_n) \geq \frac{\varepsilon}{3}$. Взяв n столь большим, чтобы $\varepsilon_n < \varepsilon \setminus 3$, увидим, что K_n вопреки предположению не может быть ε_n-сцепленным.

7. Компоненты компакта

Назовем ε-компонентой $C_\varepsilon(z)$ точки $z \in K$ множество тех точек компакта K, которые могут быть соединены с точкой z посредством ε-цепи. Очевидно, $C_\varepsilon(z)$ есть ε-сцепленное множество; при доказательстве теоремы 9 §6 мы видели, что ε-компонента есть открыто-замкнутое множество. Замкнутым множеством будет и пересечение $\tilde{C}(z)$ всех ε-компонент точки z, взятых для всевозможных $\varepsilon > 0$. Полагая $\varepsilon_n = 1 \setminus n$ и $C_n = C_{\frac{1}{n}}(z)$, имеем $\tilde{C}(z) = \bigcap\limits_n C_n$, так что по теореме 11 компакт $\tilde{C}(z)$ связен и, значит, содержится в компоненте $C(z)$ точки z. Обратно, $C(z) \subset C_\varepsilon(z)$ при любом ε, так что $C(z) \subset \tilde{C}(z)$ и, значит, $C(z) = \tilde{C}(z)$.

Теорема 12. *Компонента любой точки z компакта K совпадает с пересечением ε-компонент этой точки, взятых для всевозможных $\varepsilon > 0$.*

Обозначая, как только что, $\frac{1}{n}$-компоненту точки $z \in K$ через C_n, заключаем из равенства $C(z) = \tilde{C}(z) = \bigcap\limits_n C_n$ по лемме §3, что к любой окрестности U множества $C(z)$ можно подобрать такое n, что $C_n \subset U$. Так как C_n открыто-замкнуто, то имеем такое следствие.

Следствие. Какова бы ни была окрестность U компоненты C компакта K, можно найти содержащуюся в U окрестность множества C (относительно K), являющуюся не только открытым, но и замкнутым множеством.

Рассмотрим еще раз найденную здесь открыто-замкнутую порцию $C_n \subset U$ компакта K.

Для $\varepsilon = 1 \setminus 2n$ возьмем покрытие Q_n кругами $U(z, \varepsilon)$, $z \in Q_n$, и выберем из него конечное подпокрытие $\{U(z_h, \varepsilon)\}$ $(h = 1, 2, \ldots, h_0)$. Условимся в случае, если какие-либо два круга из этого подпокрытия касаются извне, добавлять к нему достаточно малую круговую окрестность точки касания (которая, очевидно, не принадлежит Q_n), принадлежащую U; будем предполагать также, что ни один из этих кругов не содержится внутри другого.

Объединение $\bigcup\limits_h U(z, \varepsilon)$ плюс, быть может, еще указанные дополнительные круги распадается на конечное число компонент — областей, лежащих внутри U, каждая из которых ограничена конечным числом дуг окружностей. Пусть G — та из этих областей, которая содержит (очевидно, всю) компоненту C компакта K; из построения следует, что $\partial G \cap K = \emptyset$. В частности, внешний граничный контур L области G, который, как нетрудно показать, есть простая элементарная замкнутая кривая, содержит C внутри. Итак, имеет место

Теорема 13. *Для любой компоненты C компакта K и ее окрестности U внутри U найдется простая замкнутая кривая, не пересекающая K и содержащая эту компоненту внутри.*[1]

8. Нульмерные множества

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область; рассмотрим некоторое множество P, замкнутое в D.

Определение. (Замкнутое) множество $P \subset D$ называется нульмерным, если оно не содержит никакого собственно континуума. Очевидно, нульмерность множества P означает, что каждая точка его совпадает со своей компонентой.

Из предыдущего вытекает еще одна характеристика нульмерных множеств:

[1]Очевидно, в этой формулировке простую замкнутую кривую можно заменить простой замкнутой ломаной (например, вписанной в эту кривую).

Множество $P \subset D$ нульмерно, если для любой его точки $z \in P$ и окрестности $U(z) \subset D$ внутри U найдется простая замкнутая кривая, не пересекающая P и содержащая точку z внутри.

Примерами нульмерных множеств могут служить канторово совершенное множество и любые его локально компактные части. Оказывается, что с топологической точки зрения этими примерами и исчерпывается класс нульмерных множеств P, замкнутых в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$; другими словами, каждое из таких множеств гомеоморфно либо всему канторову совершенному множеству, либо некоторой локально компактной его части.

Одно из основных свойств нульмерных замкнутых множеств указывается следующей теоремой.

Теорема 14 *Никакая область $D \subset \mathbb{C}$ не разбивается нульмерным замкнутым множеством $P \subset D$, другими словами, если P нульмерно, то $D \setminus P$ связно (и открыто) т. е. является областью.*

Доказательство. Пусть $a, b \in D \setminus P$ — произвольные точки; покажем, что найдется ломаная в $D \setminus P$, соединяющая эти точки. Соединим a и b произвольной ломаной $l \subset D$. Если l не пересекает P, то теорема доказана. Пусть поэтому $P_0 = l \cap P \neq \emptyset$. Положим $\rho(l, \partial D) = 2\delta > 0$. Возьмем произвольную точку $z \in P_0$ и в круге $U(z, \delta)$ проведем простую замкнутую ломаную λ_z, $\lambda_z \cap P = \emptyset$ содержащую z внутри; внутреннюю область, ограниченную λ_z, обозначим d_z. Области $\{d_z\}$, $z \in P_0$, покрывают компакт P_0; пусть $\{d_{z_k}\}$ $(k = 1, 2, \dots, k_0)$ — конечное подпокрытие.

Объединение $\bigcup\limits_k d_{z_k}$ распадается на компоненты-многоугольники. Каждую такую компоненту заменим жордановым многоугольником, ограниченным внешним граничным контуром этой компоненты (который, по предыдущему, является простым и замкнутым). Возникающие многоугольники d'_n $(n = 1, 2, \dots, n_0, n_0 \leq k_0)$ также покрывают P_0, но уже не перекрываются между собой, причем их границы не пересекают P. Искомый путь, ведущий из a в b, теперь очевиден: движемся из a вдоль l до первой точки пересечения с границей одной из областей d'_m, затем по ее границе $\partial d'_m$ до последней точки ее пересечения с l, затем снова вдоль l до следующей точки пересечения l с границей некоторой области d'_m и т. д., пока не дойдем до точки b. Теорема доказана.

В связи с нашим определением следует подчеркнуть существенность предположения замкнутости P (в D). Мы уже знаем, что график $y = G'(x)$ производной от функции Помпейю связен. Отсюда, кстати, следует, что его размерность в каждой точке равна единице. Покажем, что он не содержит никакого собственно континуума.

В самом деле, если бы такой континуум K существовал, то он, так как функция $y = G'(x)$ однозначна, взаимно однозначно проектировался бы в ось Ox, т. е. эта проекция была бы гомеоморфизмом его на некоторый отрезок $[\alpha, \beta]$ оси Ox. Значит, K — простая дуга. С другой стороны, $K \cap [\alpha, \beta]$ есть плотное на $[\alpha, \beta]$ множество, поэтому необходимо $K \equiv [\alpha, \beta]$ и $G'(x) = 0$ всюду на $[\alpha, \beta]$, чего нет.

9. Нульмерные компакты

Мы рассмотрим здесь подробно случай нульмерных компактных множеств; из предыдущего следует, что это фактически локальное изучение любых нульмерных замкнутых в области множеств.

Из теоремы 13 вытекает, что в нульмерном компакте P каждая точка содержится в открыто-замкнутой его порции произвольно малого диаметра. Возьмем $\varepsilon > 0$ и заключим каждую точку $z \in P$ в открыто-замкнутое множество диаметра, меньшего ε. Из полученного покрытия P выделим конечное подпокрытие $U_1, U_2, \dots, U_{h_0}$. Положим теперь

$$V_1 = U_1,\ V_2 = U_2 \setminus V_1, \dots, V_{h_0} = U_{h_0} \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{h_0 - 1}).$$

Так как U_1 и U_2 открыто-замкнуты, то открыто-замкнутым будет и разность $U_2 \setminus U_1$ т. е. V_2. Вообще, всякое V_h $(h = 1, 2, \dots, h_0)$ открыто-замкнуто как разность между открыто-замкнутыми множествами U_h и $V_1 \cup \dots \cup V_{h_0 - 1}$.

Итак, P представлено как объединение конечного числа попарно не пересекающихся открыто-замкнутых множеств диаметра, меньшего ε. Обратно, если компакт P при любом $\varepsilon > 0$ допускает такое представление, то, очевидно, он не может содержать никакого связного множества, состоящего более чем из одной точки. Таким образом, имеет место

Теорема 15. *Для того чтобы компакт P был нульмерным, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ он мог быть представлен как объединение конечного числа попарно не пересекающихся открыто-замкнутых множеств (порций) диаметра, меньшего ε.*

Пусть $P = \bigcup\limits_{h=1}^{h_0} V_h$ — такое представление компакта P. Минимальное из попарных расстояний $\rho(V_h, V_{h'})$ между компактами V_h, $V_{h'}$ обозначим через 2δ:

$$\min \rho(V_h, V_{h'}) = 2\delta > 0 \ (h \neq h').$$

Рассмотрим каждое V_h в отдельности и возьмем для каждой точки $z \in V_h$, где $\delta_0 = \min\left(\delta, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, круг $U(z, \delta_0)$. Пусть $\{U(z_m, \delta_0)\}$ — конечное подпокрытие V_h из полученного покрытия. Условимся при наличии внешних точек касания (которые, как легко видеть, не принадлежат P) некоторых из этих кругов добавлять к этому подпокрытию их круговые окрестности. Тогда объединение $\bigcup\limits_m U(z_m, \delta_0)$ — плюс, возможно, указанные дополнительные круги - распадется на конечное число компонент - областей, замыкания которых (по построению) попарно не пересекаются и каждая из которых ограничена конечным числом дуг окружностей. Внешний граничный контур каждой из них есть простая замкнутая кривая, и мы заменим каждую из этих областей всей внутренней областью для такой кривой. Замыкание каждой внутренней области к простой замкнутой кривой назовем диском.

Проводя конструкцию для каждого V_h $(h = 1, 2, \ldots, h_0)$, приходим к следующему предложению.

Т е о р е м а 16. *Каждый нульмерный компакт $P \subset \mathbb{C}$ при любом $\varepsilon > 0$ можно заключить в конечную систему попарно не пересекающихся дисков диаметра, меньшего ε; при этом границы дисков не пересекают P.*

Заметим (это очевидно), что диски здесь можно выбирать прямолинейными, т. е. границы их можно считать многоугольниками.

Теперь легко уже показать, что каждый нульмерный компакт P можно получить, взяв конечное число непересекающихся дисков диаметра, меньшего ε_1 затем, взяв (строго внутри) конечное число непересекающихся дисков диаметра, меньшего ε_2, и т. д. При этом $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Называя совокупность Δ_n дисков, соответствующих числу ε_n, дисками n-го ранга, получаем нульмерный компакт $P = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. Отсюда нетрудно вывести (этого делать мы не будем), что через каждый нульмерный компакт можно провести простую дугу; это еще раз подтверждает, что все нульмерные компакты гомеоморфны линейным нульмерным компактам, т. е. расположенным на прямой.

Из доказательства теоремы 13 легко следует, что каждую открыто-замкнутую порцию V нульмерного множества $P \subset D$ можно отделить от остальной его части простой замкнутой ломаной. В самом деле, это V мы уже заключили в конечное число дисков (которые можно считать многоугольниками). Соединяя их узкими непересекающимися полосками, мы получаем диск, граница которого отделяет V от $P \setminus V$.

Отметим еще, что фактически уже из определения следует, что гомеоморфный образ нульмерного компакта также нульмерен; и это не зависит от того, в каких (метрических) пространствах расположены образ и прообраз.

И в общем случае (так называемая индуктивная) размерность произвольного подмножества метрического пространства является топологическим инвариантом, что, опять-таки, следует из определения.

Глава 5

Действительные функции одного переменного. Критерии монотонности.

1. Обратимость функции

По общепринятому определению функция $y = f(x)$, заданная на от резке $[a, b]$, называется монотонно неубывающей (невозрастающей), если для любых x, $x' \in [a, b]$, $x < x'$, всегда $f(x) \leq f(x')$ (соответственно $f(x) \geq f(x')$); если в последнем неравенстве равенство исключено, будем говорить о (строго) возрастающей (убывающей) функции.

Ограничиваясь далее рассмотрением лишь непрерывных функций, мы приведем ряд критериев строгой монотонности, не вытекающих прямо из приведенного определения.

О п р е д е л е н и е. Функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется обратимой, если для каждой пары x, x', $x \neq x'$, имеем: $f(x) \neq f(x')$.

Аналогичное определение для случая задания f на интервале или полуинтервале. Ниже ограничимся рассмотрением замкнутых отрезков, но все дальнейшие теоремы верны для любых интервалов.

Т е о р е м а. *Непрерывная функция $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, обратима в том и только в том случае, когда f строго монотонна.*

Доказательство требуется, очевидно, лишь в отношении необходимости ("только в том случае ...") условия теоремы.

Пусть Y - множество значений f на $[a, b]$; для каждого $y_0 \in Y$ существует, по условию, единственное x_0, для которого $f(x_0) = y_0$. Очевидно, что $f(a) \neq f(b)$; допустим для определенности, что $f(b) > f(a)$. Покажем, что $f(b) = \max\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$, $f(a) = \min\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$; докажем первое равенство.

Допустим противное. Тогда существует x_0,$a < x_0 < b$, такое, что $f(x_0) > f(b)$; по теореме о промежуточных значениях для непрерывных функций найдется точка $x_1 \in [a, x_0]$, для которой $f(x_1) = f(b)$, что противоречит обратимости f. Аналогично доказывается второе равенство.

Покажем теперь, что f строго возрастает. Если это не так, то найдутся точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что $x_1 < x_2$, а $f(x_1) > f(x_2)$; ясно, что $a \neq x_1$. Но тогда на отрезке $[a, x_1]$ найдется точка c такая, что $f(c) = f(x_1)$, что опять-таки противоречиво. Теорема доказана.

Из ее доказательства следует, что в случае обратимости непрерывной функции f на отрезке $[a, b]$ обратная функция f^{-l} будет, очевидно, также монотонной на отрезке $[f(a), f(b)]$; так как она принимает все значения на отрезке $[a, b]$, то из элементарных свойств монотонных функций следует и непрерывность f^{-l}. Другими словами, в этом случае отображение $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ является гомеоморфизмом.

2. Отсутствие экстремумов

О п р е д е л е н и е. Точка $x_0 \in (a, b)$ называется точкой максимума (минимума) функции f, если для некоторой окрестности $U(x_0) \subset (a, b)$ имеем: $f(x') \leq f(x_0)$ $[f(x' \geq f(x_0)]$ при любых $x' \in U(x_0)$. Точки, максимума или минимума назовем экстремальными точками функции f. Отметим, что наше определение дает точки нестрогого экстремума, допускается в приведенных неравенствах и знак равенства.

Т е о р е м а. *Строгая монотонность функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, равносильна отсутствию у нее экстремальных точек на (a, b).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, из строгой монотонности следует условие теоремы. Пусть теперь выполнено это условие. Покажем, что в этом случае функция f обратима на $[a, b]$, что на основании теоремы п. 1 и докажет наше утверждение. В самом деле, если бы нашлись такие x_1, x_2, $x_1 < x_2$, для которых $f(x_1) = f(x_2)$, то на отрезке $[x_1, x_2]$ нашлась бы и точка x_0, для которой $f(x_0) = \begin{pmatrix} \max \\ \min \end{pmatrix} f(x)$, $x \in [x_1, x_2]$. Легко видеть, что по крайней мере одна из таких точек (если их много) была бы внутренней точкой отрезка $[x_1, x_2]$, но это противоречит принятому условию отсутствия экстремумов. Теорема доказана.

3. Открытость

О п р е д е л е н и е 1. Отображение $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется открытым, если образ $f(G)$ произвольного открытого множества $G \subset (a, b)$ является открытым в $\mathbb{R}$.

Т е о р е м а 1. *Непрерывное отображение* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *является открытым тогда и только тогда, когда* f *строго монотонно. Иначе: класс открытых отображений отрезков совпадает с классом их гомеоморфизмов.*

Доказательство легко следует из теоремы §2. Действительно, если $x_0 \in (a, b)$ - экстремальная точка для f, а $U(x_0)$ — окрестность,в которой либо $f(x) \leq f(x_0)$ либо $f(x) \geq f(x_0)$ при $x \in U(x_0)$, то во всяком случае образ $f(U)$ интервала U содержит $f(x_0)$ в качестве граничной (а не внутренней) своей точки. Теорема 1 доказана.

О п р е д е л е н и е 2. Отображение $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется открытым в точке $x_0 \in (a, b)$, если образ $f(U)$ каждой окрестности $U(x_0)$ содержит окрестность точки $y_0 = f(x_0)$.

Отметим, что в этом случае образ $f(U)$ вовсе не обязан быть открытым для каждого U (пример: $y = x \sin \frac{1}{x}(y(0) = 0)$).

Т е о р е м а 2. *Отображение* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *открыто тогда и только тогда, когда оно открыто в каждой точке интервала* (a, b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нужно лишь показать, что из условия открытости f в каждой точке интервала следует открытость f в целом на (a, b). Но это легко получить с помощью теоремы §2, как и при доказательстве теоремы 1.

4. Степень отображении

Рассмотрим непрерывное отображение $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Пусть $c \neq f(a),\ f(b)$. Скажем, что пара точек $\{f(a), f(b)\}$ зацепляет точку c, если отрезок $[f(a), f(b)]$ содержит c строго внутри; в противном случае эта пара не зацепляет c.

О п р е д е л е н и е 1. (Глобальной) степенью отображения $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ относительно точки $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f(a)$, $c \neq f(b)$, называется число $\Gamma(c; f) = \Gamma(c)$, определяемое следующим образом:

1) если пара точек $\{f(a), f(b)\}$ не зацепляет точки c, то $\Gamma(c) = 0$;

2)если $c \in (f(a), f(b))$ и $f(b) > f(a)$, то $\Gamma(c) = +1$, если же $f(b) < f(a)$, то $\Gamma(c) = -1$.

Множество $f^{-1}(c) = \{x : f(x) = c,\ x \in (a, b)\}$ назовем уровнем функции f, соответствующим значению c; это — замкнутое множество на (a, b) (возможно, пустое). Пусть $x_0 \in f^{-1}(c)$ — изолированная точка уровня, а $U(x_0)$ — ее окрестность, не содержащая других точек этого уровня.

О п р е д е л е н и е 2. Локальной степенью отображения f в точке x_0 называется число $\gamma(x_0)$, определяемое следующим образом:

1) если все разности $f(x)-f(x_0)$, $x \in U(x_0)\setminus\{x_0\}$, —- одного знака, то $\gamma(x_0)=0$;

2) если $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$ и $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$, то $\gamma(x_0) = +1$; при обращении обоих неравенств (для f) $\gamma(x_0) = -1$ (Рис. 7).

Это определение оправдывает иногда применяемое для $\gamma(x_0)$ название локального индекса монотонности: если f возрастает в точке x_0 то $\gamma(x_0) = +1$, если же убывает, то $\gamma(x_0) = -1$. Конечно, определенную ранее степень $\Gamma(c)$ можно было бы назвать глобальным индексом монотонности f относительно значения $c \in \mathbb{R}$.

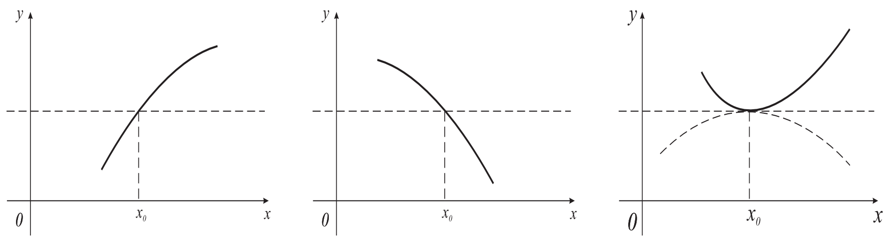

Рис. 8

Т е о р е м а 3. *Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывно, $c \neq f(a)$, $c \neq f(b)$ и уровень $f^{-1}(c)$ есть конечное множество*[1]*, то*

$$\Gamma(c, f) = \Gamma(c) = \sum_{x \in f^{-1}(c)} \gamma(x). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о легко следует из того, что слагаемые под знаком суммы имеют чередующиеся знаки, а также из теоремы о промежуточных значениях для непрерывной функции. В общем формула (1) весьма наглядна; например, для случая, когда $f(a) < c < f(b)$, ее можно прочесть так: если кривая $y = f(x)$ переходит из нижней полуплоскости $\{y < c\}$ в верхнюю $\{y > c\}$, то число точек пересечения ее с общей границей $\{y = c\}$ этих полуплоскостей нечетно, причем число точек $x \in f^{-1}(c)$ возрастания f на единицу больше числа точек убывания. Формула (1) как раз и призвана заменить подобные многословные высказывания одним лаконичным равенством, охватывая все варианты сразу.

Еще один вывод из этой формулы. Точки $f(a)$, $f(b)$ разбивают прямую $\mathbb{R} = \mathbb{R}_y$ не более чем на три интервала. Ясно, что для всех

[1]Если $f^{-1}(c) = \emptyset$, то сумма в правой части равна нулю по определению.

значений c, лежащих в одном из этих интервалов, степень $\Gamma(c)$ принимает одно и то же значение; поэтому если c_1, c_2 принадлежат одному такому интервалу, причем $f^{-1}(c_1)$, $f^{-1}(c_2)$ конечные множества, то в силу формулы (1) и суммы $\sum\limits_{x\in f^{-1}(c_1)} \gamma(x)$, $\sum\limits_{x\in f^{-1}(c_2)} \gamma(x)$ равны между собой.

Подчеркнем, что в то время как глобальная степень $\Gamma(c, f)$ отображения f всегда определена (при условии $c \neq f(a)$, $c \neq f(b)$), локальная степень $\gamma(x_0)$ нами определена пока лишь для случая изолированной точки x_0 уровня $f^{-1}f(x_0)$. Ниже мы несколько ослабим это ограничение (см. §7).

Отметим еще, что формула (1) имеет аналог в евклидовом пространстве любой размерности; в частности, в теории функций для аналитических отображений она фигурирует под названием "принципа аргумента", который, как известно, является одним из основных инструментов исследования в этой теории.

5. Другие критерии монотонности

Здесь мы приведем некоторые утверждения в предположении, что все уровни функции f конечны.

Т е о р е м а 4. *Для того чтобы отображение $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ было строго монотонным, необходимо и достаточно, чтобы $\gamma(x) \neq 0$ в каждой точке $x \in (a, b)$. При этом для возрастающей функции локальная степень $\gamma = +1 > 0$ всюду, а для убывающей всюду $\gamma = -1 < 0$.*

Доказательство сразу следует из очевидного отсутствия экстремальных точек, где $\gamma = 0$.

Теорему 4 можно сформулировать и так: если локальная степень $\gamma(x)$ на интервале (a, b) не обращается в нуль, то она не меняет знак. Отсюда легко вывести следующее известное предложение анализа.

Т е о р е м а 5. *Если $f(x)$, $x \in (a, b)$, дифференцируема в каждой точке и $f'(x) \neq 0$, то производная f' не меняет знак на (a, b) и f — строго монотонна. При этом при $f' > 0$ имеем возрастание, а при $f' < 0$ — убывание.*

Доказательство следует из того, что, как легко видеть, в точке, где $f'(x) \neq 0$, существует локальная степень $\gamma(x)$, причем у $\gamma(x) = \operatorname{sgn} f'(x)$. Из теоремы 5 сразу следует, что $f'(x)$ между любыми двумя значениями принимает все промежуточные.

Т е о р е м а 6. *Для того чтобы f была строго возрастающей (убывающей) на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы локальная степень $\gamma(x) \geq 0$ (≤ 0) в каждой точке $x \in (a, b)$. Другими словами, из $\gamma(x) \geq 0$ для всех точек следует, что фактически $\gamma(x) > 0$ (аналогично для $\gamma(x) \leq 0$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании теоремы §1 достаточно показать, что f обратима. Пусть это не так и $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 < x_2$. Тогда в некоторой точке $x_0 \in (x_1, x_2)$ имеем $f(x_0) = \begin{pmatrix} \max \\ \min \end{pmatrix} f(x)$, $x \in [x_1, x_2]$; пусть $f(x_0) = \max f$ (Рис. 9).

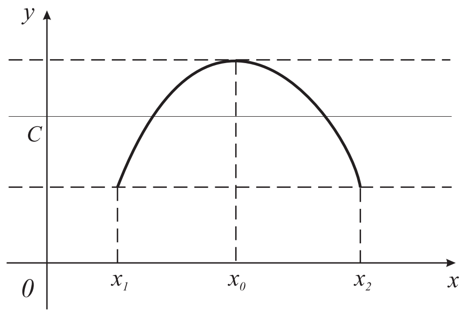

Рис. 9

Выберем c, $f(x_2) < c < f(x_0)$, и применим формулу (1) к отрезку $[x_0, x_2]$ для этого c:

$$\Gamma(c) = \sum_{x \in f'(c)} \gamma(x).$$

Но в левой части мы имеем, очевидно, $\Gamma(c) = -1$, а справа — неотрицательную величину: ведь все $\gamma(x) \geq 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Приведем теперь одно из наиболее интересных предложений (аналог которого на плоскости будет играть важную роль в дальнейшем).

Т е о р е м а 7. *Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$ и $P \subset [a, b]$ — нигде не плотное замкнутое множество такое, что на каждом интервале смежности к P функция f строго возрастает. Если образ $f(P)$ на прямой $\mathbb{R} = \mathbb{R}_y$ также нигде не плотен, то f возрастает на всем отрезке $[a, b]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать обратимость f на $[a, b]$. Пусть это не так и $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 < x_2$, причем в точке $x_0 \in (x_1, x_2)$ имеем $f(x_0) = \max\limits_{[x_1, x_2]} f(x)$.

Образ отрезка $[x_0, x_2]$ содержит отрезок $[f(x_2), f(x_0)]$; на этом отрезке $f(P)$ нигде не плотно. Поэтому можем выбрать c, $f(x_2) < c < f(x_0)$, не принадлежащее $f(P)$. Применим формулу (1) к отрезку

$[x_0, x_1]$ для этого c:

$$\Gamma(c) = \sum_{x \in f^{-1}(c)} \gamma(x).$$

Очевидно, $\Gamma(c) = -1$, а справа — положительная величина — ведь по построению весь уровень $f^{-l}(c) \cap [x_0, x_2]$ принадлежит дополнению к P. Полученное противоречие доказывает теорему.

То, что эта теорема неверна без дополнительных предположений, показывает следующий пример:

$$f(x) = x - \theta(x), x \in [0, 1],$$

где θ - известная "канторова лестница".

На интервалах смежности к канторову множеству P_0 функция $f(x)$ имеет вид $x + \mathrm{const}$ и, следовательно, возрастает, в то же время $f(0) = f(1) = 0$ (Рис. 10). Дело в том, что образ $f(P_0)$ заполняет здесь весь отрезок $\left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right]$ оси y (поэтому наша теорема неприменима).

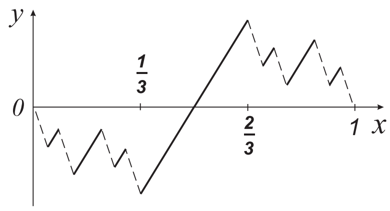

Рис. 10

6. Функции с особенностями

Будем говорить, что (глобальная) степень $\deg f$ отображения $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ равна нулю, если $f(a) = f(b)$.

Такое соглашение оправдывается тем, что, очевидно, $\Gamma(c) = 0$ для всех c, отличных от $f(a)$, $f(b)$ (в этом последнем случае $\Gamma(c)$ у нас просто не определена).

Т е о р е м а 8. *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение степени нуль и $P \subset [a, b]$ — произвольный компакт такой, что на каждом интервале смежности к P f строго возрастает. Тогда все значения, которые функция f принимает вне P, она принимает и на P.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим образ отрезка $[a, b]$ через $[m, M]$, где, очевидно, $M = \max f$ и $m = \min f$. Пусть c, $m < c < M$, — значение, которое принимается вне P и не принимается на P, причем пока возьмем $c \neq f(a) = f(b)$. Тогда уровень $f^{-l} \subset (a, b)$ содержит лишь регулярные точки вне P и притом в конечном числе, так как в противном случае предельные его точки (принадлежащие $f^{-1}(c)$) должны были бы принадлежать P. Искомое противоречие снова дает формула (1): $\Gamma(c) = \sum\limits_{x \in f^{-1}(c)} \gamma(x)$, где $\Gamma(c) = 0$, а слагаемые в правой части — положительны. Итак, образ $f(P)$ содержит множество $[m, M] \setminus \{f(a)\}$. Так как P — компакт, то образ его совпадает со всем отрезком $[m, M] \ni f(a)$. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывно и существует нигде не плотное замкнутое множество $P \subset [a, b]$ такое, что: 1) на каждом интервале смежности к P функция f строго возрастает или всегда строго убывает. В дальнейшем достаточно рассмотреть один из этих двух случаев.); 2) ни в какой окрестности каждой точки из P отображение f не является монотонным. Тогда скажем, что f есть отображение с особым множеством P; точки множества $[a, b] \setminus P$ назовем регулярными.

В конце п. 5 мы приводили пример подобной функции.

Т е о р е м а 9. *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение нулевой степени с особым множеством P. Тогда на образе $[m, M]$ отрезка $[a, b]$ существует плотное множество e типа $\mathcal{G}_\delta$ такое, что $e' = f^{-l}(e) \cap P$ также плотно на P, и типа $\mathcal{G}_\delta$, причем если $x_0 \in e'$, то найдется последовательность регулярных точек $\{x_k\}$, $x_k \to x_0$ для которых $f(x_k) = f(x_0)$ $(k = l, 2, \ldots)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предыдущей теореме образ $f(P)$ совпадает со всем отрезком $[m, M]$.

Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ рассмотрим открытое множество G_n, состоящее из объединения всех интервалов вида $\left(x - \frac{1}{2^n}, x + \frac{1}{2^n}\right)$, где $x \in P$. Ясно, что f — образ дополнения $G_n \setminus P$ есть открытое и всюду плотное множество O_n на отрезке $[m, M]$. Теперь, очевидно, что значения резидуального на нем множества $\bigcap\limits_n Q_n$ как раз и обладают указанными в теореме свойствами.

Теорема доказана.

А теперь дополним сказанное тем, что эта бесконечная кратность имеет место и на самом множестве P: именно — между двумя регулярными корнями x_1, x_2 уравнения $f = \mathrm{const}$ найдется по крайней мере один корень, принадлежащий P. Это сразу следует из теоремы 8, так как на отрезке $[x_1, x_2]$ степень f равна нулю.

Этим же методом нетрудно доказать следующий более общий результат.

Т е о р е м а 10. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *расположено некоторое замкнутое нигде не плотное множество* P, *а непрерывное отображение* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *является строго монотонным на каждом интервале смежности к* P^2. *Тогда если* $\mathrm{Int} f(P) \neq \emptyset$, *то существует плотное на* $\mathrm{Int} f(P)$ *множество* e *типа* $\mathcal{G}_\delta$ *такое, что для всех* $x_0 \in e' = f^{-1}(e) \cap P$ *(которые, очевидно, также типа* $\mathcal{G}_\delta$*) найдется последовательность регулярных точек* $\{x_k\}$, $x_k \to x_0$, *для которых*

$$f(x_k) = f(x_0) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Сопоставляя теоремы 1-3 и теорему 4 п. 5, можно сформулировать такое предложение. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывна и строго возрастает на каждом интервале смежности к некоторому замкнутому нигде не плотному множеству $P \subset [a, b]$. Тогда образ множества P содержит внутренние точки (относительно прямой $\mathbb{R}$) или нет, смотря по тому, имеются или нет точки бесконечной регулярной кратности (3) отображения f. Если таких точек нет, то в силу теоремы 7 f возрастает на всем отрезке $[a, b]$ и множество P можно назвать устранимым особым множеством отображения f.

Можно показать, что в условиях последнего предложения функция f возрастает и тогда, когда ограничение $f\big|_P$ изолированно.

7. Обобщения

Во многих случаях интерес представляют те отображения $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, для которых функция f не имеет отрезков постоянства. Приведем точные определения.

О п р е д е л е н и е 1. Замкнутое множество $p \subset \mathbb{R}$ называется нульмерным ($\dim P = 0$), если оно нигде не плотно на $\mathbb{R}$.

Примерами здесь могут служить любое конечное, а также счетное замкнутое множество в $\mathbb{R}$. Нетривиальным примером является канторово совершенное множество на отрезке $[0, 1]$ (мощности континуума в каждой своей порции). Еще пример: к канторову множеству присоединим центры его интервалов смежности; полученное множество и замкнуто, и нульмерно, причем канторово множество является нигде не плотным его подмножеством, несмотря на то что присоединенные точки образуют в нем множество изолированных точек.

О п р е д е л е н и е 2. Непрерывное отображение $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется нульмерным, если нульмерен каждый его уровень, т. е. $\dim f^{-l}(y) = 0$ для каждого $y \in \mathbb{R}$.

[2]На разных интервалах характер монотонности может быть различным

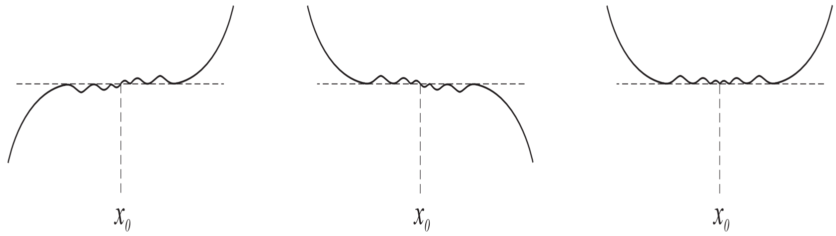

Рис. 11

Рассмотрим произвольный (непустой) уровень $f^{-l}(c)$ нульмерного отображения f и пусть $x_0 \in f^{-l}(c) \cap (a,b)$.

О п р е д е л е н и е 3. Скажем, что локальная степень $\gamma(x_0)$ отображения f определена в точке x_0, если найдется окрестность $U(x_0)$, для которой:

1) для всех $x \in U(x_0)$ либо только $f(x) \geq f(x_0)$, либо только $f(x) \leq f(x_0)$; в этом случае полагаем $\gamma(x_0) = 0$;

2) для $x > x_0$ имеем $f(x) \geq f(x_0)$, а для $x < x_0$ $f(x) \leq f(x_0)$; здесь полагаем $\gamma(x_0) = +1$;

3) длях $x > x_0$ $f(x) \leq f(x_0)$, для $x < x_0$ $f(x) \geq f(x_0)$; тогда $\gamma(x_0) = -1$ (Рис. 10). Легко привести примеры, когда x_0 является неизолированной точкой $f^{-l}(c)$, для которой все эти случаи реализуются. Также легко построить примеры функций, для которых локальная степень в некоторых точках не определена $\left(y = x \sin \frac{1}{x}\right)$.

Приведем две теоремы (только на первый взгляд они могут показаться очевидными), относящиеся к этому понятию. Доказательства мы дадим позже в гл. 8, где подобное понятие будет дано и для случая плоских отображений.

Т е о р е м а 11. *Пусть* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрерывно и нульмерно. Если в каждой точке* x *уровня* $f^{-l}(c)$ *существует локальная степень* $\gamma(x) \geq 0$*, то строгое неравенство* $\gamma(x) > 0$ *возможно лишь в одной-единственной точке; аналогично для случая* $\gamma(x) \leq 0$*,* $x \in f^{-l}(c)$.

Т е о р е м а 12. *Пусть* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрерывно и нульмерно и* $\gamma(x) > 0$ *всюду в интервале* (a,b)*, кроме, возможно, множества точек* $\mathcal{E} \subset (a,b)$ *такого, что* $f((a,b)) \setminus f(E)$ *всюду плотно в* $f([a,b])$. *Тогда* f *строго возрастает на всем отрезке* $[a,b]$.

Это усиление теоремы 6.

В следующих главах мы найдем на плоскости $\mathbb{R}^2$ точный аналог монотонных отображений на прямой $\mathbb{R}^1$ (внутренние отображения) и убедимся в справедливости (даже с усилением в теореме 1) всех приведенных выше теорем для этого нового класса отображений.

8. Дифференцируемые функции с особенностями

Выше мы показывали, как, используя "канторову лестницу" $y = \theta(x)$, строить функции с особенностями. Здесь мы приведем построение липшицевой всюду дифференцируемой "канторовой лестницы", что также приведет к функциям с особенностями. Построение проведем, следуя [1].

Л е м м а. *Если f непрерывна и ограниченной вариации на $[0,1]$, то существует гомеоморфизм h отрезка $[0,1]$ на себя такой, что $f \circ h$ есть липшицева функция.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий следует, что график $y = f(x)$ имеет конечную длину L. Для каждого $x \in [0,1]$ обозначим через $A(x)$ длину графика f на отрезке $[0,x]$. Таким образом, $L = A(1)$. Мы покажем, что функция $h(x) = (A(x)/L)^l$ искомая. Для $x_2 > x_1$ из $[0,1]$ положим $t_1 = h(x_1)$, $t_2 \neq (x_2)$. Тогда

$$\left|\frac{f \circ h(x_2) - f \circ h(x_1)}{x_2 - x_1}\right| = \left|\frac{f(t_2) - f(t_1)}{h^{-1}(t_2) - h^{-1}(t_1)}\right| =$$

$$= L\left|\frac{f(t_2) - f(t_1)}{A(t_2) - A(t_1)}\right| \leq L,$$

т. е. $f \circ h$ липшицева с константой L.

Т е о р е м а 13. *Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Для того чтобы существовал гомеоморфизм h отрезка $[0,1]$ на себя такой, что $f \circ h$ дифференцируема и с ограниченной производной, необходимо и достаточно, чтобы f была непрерывной и ограниченной вариации.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость почти очевидна: если h с требуемыми условиями существует, то $f \circ h$ — непрерывна и ограниченной вариации; но $f = (f \circ h) \circ h^{-1}$, поэтому и f непрерывна и той же полной вариации, что и $f \circ h$.

Докажем достаточность условия теоремы. По лемме можем предположить, что f липшицева с константой L. Пусть $Z = \{x : f \text{ не дифференцируема в } x\}$. Тогда лебегова мера $\mathrm{mes}(Z) = 0$. Пусть $X \subset Z$ — типа $\mathcal{G}_\delta$ и $\mathrm{mes}(X) = 0$. В силу [1] существуют гомеоморфизм h отрезка $[0,1]$ на себя, дифференцируемый в расширенном смысле, и постоянная $\alpha > 0$ такие, что

$$(h^{-1})'(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если} \quad x \in X \\ > \alpha, & \text{если} \quad x \in [0,1] \setminus X. \end{cases}$$

Тогда $h'(x) = 0$ для $x \in h^{-1}(Z)$ и $h'(x) < \frac{1}{\alpha}$ для $x \in [0,1] \setminus h^{-1}(Z)$. Пусть $x, y \in [0,1]$; тогда

$$\frac{(f \circ h)(y) - (f \circ h)(x)}{y - x} = \frac{f(h(y)) - f(h(x))}{h(y) - h(x)} \frac{h(y) - h(x)}{y - x}.$$

Если $h(x) \in Z$, то второй множитель в правой части стремится к нулю, а первый ограничен, следовательно, $(f \circ h)'(x) = 0$. Если $h(x) \notin Z$, то f дифференцируема в $h(x)$, т. е. $(f \circ h)'(x) = f'(h(x))h'(x)$ и $|(f \circ h)'(x)| \le L/\alpha$. Во всяком случае, $f \circ h$ дифференцируема и ее производная ограничена по модулю числом L/α.

Отметим три примера функций с ограниченной вариацией, для которых выводы из этой теоремы для наших целей будут наиболее интересны.

1. Уже упоминавшаяся "канторова лестница"$y = \theta(x)$, по предыдущей теореме, может быть преобразована в функцию $\theta_0(x)$ с ограниченной производной. Функция $\theta_0(x)$ подобна канторовой относительно другого нигде не плотного совершенного множества P_0', т. е. она в целом не убывает и постоянна на каждом интервале смежности к P_0'. Так как $\theta_0(x)$ дифференцируема, то mes$P_0 > 0$ (mes — мера Лебега).

2. Пусть E_1 и E_2, $E_1 \cup E_2 = I$ $(\equiv [0,1])$, всюду плотны в I и каждое — всюду положительной меры. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{на} E_1, \\ -1, & \text{на} E_2. \end{cases}$$

Тогда $f(x) = \int\limits_0^x g(t)dt$ является липшицевой нигде не монотонной на I функцией. Доказанная теорема позволяет преобразовать ее во всюду дифференцируемую (и липшицеву) функцию, также нигде не монотонную. Из теоремы о промежуточных значениях производной следует, что производная такой функции обращается в нуль на всюду плотном в I множестве. Так как уровень функции 1-го класса есть $\mathcal{G}_\delta$-множество, то множество нулей $\{f' = 0\}$ всюду второй категории на I.

3. Функция $f_1(x) = x + f(x)$, где f — только что рассмотренный пример, очевидно, строго возрастает на I, причем производная f_1' обращается в нуль на плотном в I множестве ($f_1 = 0$ почти всюду на E_2). Из теоремы следует существование всюду дифференцируемой липшицевой и строго возрастающей функции, нули производной которой образуют плотное $\mathcal{G}_\delta$-множество на I, а потому также всюду

второй категории. Первый подобный пример был построен Помпейю [2].

Глава 6

Комплексные функции

1. Множества моногенности

Здесь мы постараемся перенести прежние понятия и построения на случай однозначных и непрерывных функций $f(z)$ в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Для фиксированного $z \in D$ обозначим через M_ε множество значений отношения $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, где $z+\Delta z \in D$, $0 < |\Delta z| < \varepsilon$; M_ε будем рассматривать как подмножество расширенной плоскости Z. Тогда множество

$$\mathfrak{M}_z = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{M_\varepsilon},$$

где замыкания берутся относительно Z, называется множеством моногенности функции $f(z)$ в точке z. Оно, очевидно, компактно в Z.

Например, для случая моногенной в точке z функции, т.е. когда существует

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = f'(z),$$

множество $\mathfrak{M}_z$ содержит единственную точку $\zeta = f'(z)$; этим отчасти оправдывается название множеств $\mathfrak{M}_z$ и в общем случае, а также обозначение $\mathfrak{m}$ малыми готическими ранее.

Далее, назовем комплексное число a (случай $a = \infty$ не исключается) производным числом функции $f(z)$ в точке z, если существует такая последовательность чисел $\{\Delta z_n\}$, $\Delta z_n \to 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что

$$\lim \frac{f(z+\Delta z_n)-f(z)}{\Delta z_n} = a.$$

Как и прежде, легко показать, что множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ является множеством всех производных чисел функции $f(z)$ в точке z и только их.

Опять-таки, как и прежде, мы рассмотрим задачу о строении множеств $\mathfrak{M}_z$ как для отдельных точек z, так и при изменении $z \in D$.

Задача о строении множества моногенности в отдельных точках решается следующей простой теоремой [1]:

Т е о р е м а 1. *Для того, чтобы множество $\mathfrak{M} \subset Z$ могло служить множеством моногенности некоторой непрерывной в $D \subset \mathbb{C}$ функции $f(z)$ в некоторой точке z, необходимо и достаточно, чтобы оно было континуумом в Z.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость почти очевидна: $M_\varepsilon \subset Z$ связно как непрерывный образ связной проколотой ε-окрестности z, а потому $\overline{M}_\varepsilon$ — континуум. Но

$$\mathfrak{M}_z = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{M}_{\frac{1}{n}}, \quad \text{причем} \overline{M}_{\frac{1}{1}} \supset \overline{M}_{\frac{1}{2}} \supset \ldots,$$

поэтому $\mathfrak{M}_z$ как пересечение убывающей последовательности континуумов есть континуум.

Пусть теперь $\mathfrak{M} \subset Z$ — континуум, $\zeta_0 \in \mathfrak{M}$ и для любого натурального n и пусть $K_n \equiv \{\zeta : |\zeta - \zeta_0| \le \sqrt{n}\}$ — круг. Обозначим

$$P_n = \begin{cases} \mathfrak{M} \cap K_n = \mathfrak{M}, & \text{если} \mathfrak{M} \cap \partial K_n = \emptyset, \\ \\ (\mathfrak{M} \cap K_n) \cup \partial K_n, & \text{если} \mathfrak{M} \cap \partial K_n \ne \emptyset. \end{cases}$$

Очевидно, P_n — ограниченный континуум. Пусть L_n — ломаная (вообще с самопересечениями), имеющая начало и конец в точке ζ_0, причем

$$\max_{\zeta \in P_n} \rho(\zeta, L_n) < \frac{1}{n}, \max_{\zeta \in L_n} \rho(\zeta, P_n) < \frac{1}{n},$$

и пусть $z = \varphi_n(t)$, $\frac{1}{n+1} \le t \le \frac{1}{n}$, — непрерывное параметрическое представление этой ломаной. Ясно, что для любой точки $\zeta \in Z$ при всех достаточно больших n будет $\rho(\zeta, \partial K_n) \ge \rho(\zeta, \mathfrak{M})$, а потому

$$|\rho(\zeta, L_n) - \rho(\zeta, \mathfrak{M})| < \frac{1}{n},$$

$$\lim_{x \to \infty} \rho(\zeta, L_n) = \rho(\zeta, \mathfrak{M}).$$

Определим при $|z| \le 1$ функцию

$$fz = \begin{cases} z\varphi_n(|z|) & \text{при} \frac{1}{n+1} \le |z| \le \frac{1}{n} (n = 1, 2, \ldots), \\ \\ 0 & \text{при} z = 0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна во всем круге $|z| \le 1$: непрерывность при $z \ne 0$ очевидна, а при $z = 0$ следует из того, что для $\frac{1}{n+1} \le |z| \le \frac{1}{n}$

$$|f(z)| < \frac{\sqrt{n} + \frac{1}{n}}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Для нахождения множества моногенности в точке $z = 0$ прежде всего имеем $M_{\frac{1}{n}} = \bigcup\limits_{j=n}^{\infty} L_j$, откуда легко вывести, что

$$\overline{M}_{\frac{1}{n}} = \mathfrak{M} \bigcup \left(\bigcup_{j=n}^{\infty} L_j \right),$$

$$\mathfrak{M}_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{M}_{\frac{1}{n}} = \mathfrak{M}.$$

Теорема 1 доказана.

Отметим частный случай этой теоремы, когда $\mathfrak{M}$ есть непрерывная кривая (т.е. ограниченный локально связный континуум): именно, если на плоскости ζ $\mathfrak{M}$ задан параметрическим представлением

$$\zeta = \zeta(\alpha), \alpha \in [0.2\pi],$$

где $\zeta(\alpha)$ — периодическая функция с периодом 2π, то для функции

$$f(z) = re^{i\alpha}\zeta(\alpha), \quad z = re^{i\alpha},$$

множество моногенности $\mathfrak{M}_0$ (т.е. $\mathfrak{M}_z$ при $z = 0$) в точности совпадает с континуумом $\mathfrak{M}$.

Т е о р е м а 2. *Если функция $f(z)$ дифференцируема в некоторой точке z, то множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ этой функции есть окружность или одна точка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Возьмем приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y = |\Delta z|e^{i\alpha}$. В силу дифференцируемости $f(z)$ имеем

$$f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta f = f_z \Delta z + f_{\bar{z}} \Delta \bar{z} + o(\Delta z), \tag{1}$$

где

$$f_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Разделив (1) на Δz и устремив его к нулю, причем так, чтобы угол α сохранял постоянное значение, получим

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} \to f_z + f_{\bar{z}} e^{-2i\alpha}.$$

Это показывает, что значения $\lim\limits_{\alpha=\mathrm{const}} \frac{\Delta f}{\Delta z}$ $(\Delta z \to 0)$ заполняют в плоскости Z окружность с центром в точке f_z и радиусом $|f_{\bar{z}}|$. Теперь легко показать, что и каждое производное число функции $f(z)$ в точке z принадлежит этой окружности, следовательно, последняя совпадает с $\mathfrak{M}_z$. Если, в частности, $f_{\bar{z}} = 0$, т.е. выполняются условия Коши - Римана, то $\mathfrak{M}_z$ содержит единственную точку f_z и $f(z)$ моногенна в точке z.

Теорема 2 доказана.

Укажем еще, что в условиях теоремы 2 для функции $\overline{f(z)} = u - iv$, сопряженной $f(z)$, параметрическое представление окружности $\mathfrak{M}_z$ имеет вид

$$\zeta = \bar{f}_{\bar{z}} + \bar{f}_z e^{-2i\alpha}, \alpha \in [0, 2\pi]. \tag{2}$$

В качестве еще одного примера возьмем $f(z) = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывная в некотором интервале оси Ox функция. Пусть в некоторой точке x_0 правые производные числа функции $\varphi(x)$ заполняют отрезок $[A, B]$ $(-\infty \le A, B \le +\infty)$. Для произвольного $z = x_0 + iy$ получим

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\varphi(x_0 + \Delta x)}{\Delta z} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \cos \alpha e^{i\alpha},$$

где, как и выше, $\Delta z = |\Delta z| e^{i\alpha}$. Легко видеть теперь, что если:

1) $0 = A < B$, то все производные числа функции f, соответствующие приближению к z из правой полуплоскости $x > x_0$ (временно назовем их правыми), заполняют круг диаметра B, касающийся мнимой оси в начале координат $\zeta = 0$ и лежащий в правой полуплоскости $\Re\zeta \le 0$;

2) $0 < A < B$, то множество правых производных чисел f есть разность двух кругов соответственно диаметров B и A;

3) $A < 0 < B$, то множество правых производных чисел состоит из двух кругов диаметров A, B, касающихся друг с другом извне в точке $\zeta = 0$;

4) $A < B = 0$, то правые производные числа f заполняют круг диаметра A, лежащий в левой полуплоскости $\Re\zeta \le 0$ и касающийся мнимой оси в начале координат $\zeta = 0$;

5) $A < B < 0$, то, как и в 2), имеем разность двух кругов, только расположенных в левой полуплоскости.

Аналогично исчерпывается вопрос о левых производных числах. Объединяя полученные (правые и левые) множества, мы можем убедиться даже в таком простом случае в достаточном разнообразии вариантов для $\mathfrak{M}_z$. В частности, из приведенного анализа легко следует, что если $\varphi(x)$ обладает в некоторой точке x_0 всевозможными производными числами (здесь могут быть и левые), то $\mathfrak{M}_z$ в точке $z = x_0 + iy$ есть полная, т.е. расширенная, плоскость Z. Так что если для $\varphi(x)$ множество $\mathfrak{m}_x = \overline{\mathbb{R}}$, то функция комплексного переменного $f(z) = \varphi(x)$ также обладает всеми производными числами в каждой точке z-плоскости, т.е. $\mathfrak{M}_z$ для каждого z есть расширенная плоскость Z. Функция $F(z) = x + i[y - \varphi(x)] = z - i\varphi(x)$ однолистная на всей плоскости и обладает этим же свойством.

Мы хотим доказать одну из основных теорем о множествах моногенности, которая идейно соответствует классической теореме о контингенциях с точки зрения меры.

Сначала — следующее понятие.

О п р е д е л е н и е. Непрерывная функция $f(z)$, заданная на произвольном множестве $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}$, называется однолистной на этом множестве, если для любых точек $z_1, z_2 \in \mathcal{E}$, таких, что $z_1 \neq z_2$, всегда $f(z_1) \neq f(z_2)$; как известно, такая функция не всегда является гомеоморфизмом.

Итак, пусть в области $D \subset \mathbb{C}$ задана произвольная непрерывная функция $f(z)$. Рассмотрим сначала множество $\mathcal{E} \subset D$, точек $z \in D$, для которых множества $\mathfrak{M}_z$ производных чисел функции f не содержат фиксированной точки C плоскости Z. Это означает, что для каждого $z_0 \in \mathcal{E}$ найдется такая его ε-окрестность $U_\varepsilon(z_0)$, такая что при всяком $z' \in U_\varepsilon(z_0)$ и некотором $\delta > 0$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} - C \right| \geq \delta \qquad (z' \neq z_0).$$

Очевидно, можно считать, что $\delta = \varepsilon$. Обозначим через $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}$ множество тех точек из $\mathcal{E}$, для которых $\varepsilon = \delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Мы уже знаем, что $\mathcal{E}_n$ — замкнутые множества (...) и можем записать:

$$\mathcal{E} = \bigcup_n \mathcal{E}_n.$$

Введем вспомогательную функцию $w(z) = f(z) - Cz$. Очевидно, при $z \in \mathcal{E}_n$ и $z + \Delta z \in D$, $0 < |\Delta z| < \frac{1}{n}$, имеем

$$\left| \frac{w(z + \Delta z) - w(z)}{\Delta z} \right| = \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| \geq \frac{1}{n}. \tag{3}$$

В $\frac{1}{2n}$-окрестности каждой точки $z \in \mathcal{E}_n$ функция $w(z)$ однолистна на соответствующей порции множества $\mathcal{E}_n$. В самом деле, если z_1, z_2 —

точки этой порции, то $|\Delta z| = |z_2 - z_1| < \frac{1}{n}$ и неравенство (3) дает

$$\left|\frac{w(z_2) - w(z_1)}{z_2 - z_1}\right| \geq \frac{1}{n} > 0.$$

Более того, это неравенство выполняется, если $z_1 \in \mathcal{E}_n$, а z_2 — произвольная точка указанной $\frac{1}{2n}$-окрестности — "отталкивающий"гомеоморфизм на порции $\mathcal{E}_n$ (в силу определения множества $\mathcal{E}_n$). Итак, имеем следующую лемму:

Л е м м а 1. *Пусть в области D задана произвольная непрерывная функция $f(z)$ и пусть $\mathcal{E} \subset D$ — совокупность всех точек z, для которых множества моногенности $\mathfrak{M}_z$ не содержат фиксированного значения C. Тогда:*

1) множество $\mathcal{E}$ есть сумма счетного числа замкнутых в D множеств $\mathcal{E}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т.е. является множеством типа F_τ;

2) на каждом множестве $\mathcal{E}_n$ функция $w(z) = f(z) - Cz$ является локально однолистной ("отталкивающим"гомеоморфизмом).

Пусть теперь $F \subset D$ — множество всех точек z, для которых $\mathfrak{M}_z$ не есть полная плоскость Z. Запишем все рациональные точки плоскости Z в последовательность

$$r_1, r_2, \ldots, r_m, \ldots$$

Обозначим через F_m множество точек $z \in D$, для которых $\mathfrak{M}_z$ не содержит точки r_m; тогда ясно, что

$$F = \bigcup_m F_m. \tag{4}$$

Отсюда и из леммы 1 мы получаем утверждение.

С л е д с т в и е. Совокупность всех точек области D, для которых множества моногенности $\mathfrak{M}_z$ не являются полными плоскостями, образуют F_σ-множество, а потому точки, для которых $\mathfrak{M}_z$ являются полными плоскостями, образуют G_δ-множество.

Мы докажем, что функция $f(z)$ почти всюду на множестве F дифференцируема. В силу (4) это достаточно доказать для каждого множества F_m. По теореме В. В. Степанова для этого нужно показать, что почти всюду на F_m

$$\overline{\lim_{\Delta z \to 0}} \left|\frac{\Delta f}{\Delta z}\right| < \infty.$$

Так как это неравенство выполняется одновременно и для функции вида $w(z) = f(z) - Cz$, то из доказательства леммы 1 следует, наконец, что достаточно доказать такое предложение:

Лемма 2. *Пусть в замкнутом круге* $\overline{D}$ *определена некоторая непрерывная функция* $w(z)$. *Если для каждой точки* z *некоторого замкнутого множества* $E \subset D$ *и* $z + \Delta z \in \overline{D}$ *выполняется неравенство*

$$\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| \geq \delta > 0,$$

то почти всюду на E *будет*

$$\varlimsup_{\Delta z \to 0} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| < \infty.$$

Докажем сначала еще одну лемму.

Лемма 3. *Пусть однозначная функция* $z = z(w)$ *непрерывно отображает замкнутое множество* E_1 *на замкнутое множество* E *плоскости* z *и*

$$\left|\frac{\Delta z}{\Delta w}\right| = \left|\frac{z(w + \Delta w) - z(w)}{\Delta w}\right| \leq k$$

при $w, w+\Delta w \in E_1$. *Тогда точки из* E, *в которых производные числа функции* $z(w)$ *(относительно* E_1*) могут равняться нулю, отображаются в подмножество* E *меры нуль.*

Доказательство. Очевидно, утверждение леммы верно для подмножеств E_1 меры нуль; а так как из ее условий следует, что функция $z(w)$ почти всюду на E_1 имеет полный дифференциал относительно E_1, то достаточно рассмотреть лишь точки плотности множества E_1, где такой дифференциал существует.

Как и в случае обычного дифференциала, легко показать, что производные числа функции $z(w) = x(u,v) + iy(u,v)$ (относительно E_1 в такой точке $w = u + iv$ заполняют окружность $\omega = z_w + z_{\bar{w}} e^{-2i\alpha}$, $\alpha \in [0, 2\pi]$, где

$$z_w = \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

$$z_{\bar{w}} = \frac{\partial z}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

(частные производные здесь асимптотические).

Отсюда следует, что для того чтобы производное число в данной точке могло равняться нулю, необходимо и достаточно, чтобы указанная окружность проходила через начало координат $\omega = 0$, т. е.

чтобы $|z_w| = |z_{\bar{w}}|$. Но в этом случае

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = |z_w|^2 - |z_{\bar{w}}|^2 = 0. \tag{5}$$

Возьмем любую такую точку $w_0 = u_0 + iv_0$ и соответствующую ей в плоскости z точку $z_0 = x_0 + iy_0$. Отображение $z = z(w)$ вблизи w_0 имеет вид

$$z - z_0 = z_w(w - w_0) + z_{\bar{w}}(\bar{w} - \bar{w}_0) + \varepsilon(w)|w - w_0|, \tag{6}$$

где $\varepsilon(w) \to 0$ при $|w - w_0| \to 0$ ($w \in E_1$, $z \in E$).

Рассмотрим наряду с этим аффинное отображение

$$\tilde{z} - z_0 = z_w(w - w_0) + z_{\bar{w}}(\bar{w} - \bar{w}_0) \tag{7}$$

В силу (5) оно является вырожденным и образом всей плоскости w будет прямая линия L, проходящая через точку z_0 (либо сама эта точка в последнем случае рассуждения лишь упрощаются). Пусть $E_1^{(r)}$ — часть множества E_1 расположенная в круге $|w - w_0| \leq r$. Докажем, что функция растяжения при отображении $z = z(w)$ в точке w_0 равна нулю, т. е.

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathrm{Mes} z(E_1^{(r)})}{\mathrm{Mes}(E_1^{(r)})} = 0. \tag{8}$$

Обозначим через l отрезок прямой L, соответствующий кругу $|w - w_0| \leq r$ при аффинном отображении (7). Легко подсчитать, что длина l равна $\lambda = 4|z_w|r \leq 4kr$.

Положим теперь

$$\varepsilon(r) = \sup_{w \in E_1^{(r)}} |\varepsilon(w)|,$$

где $\varepsilon(w)$ — функция, определенная равенством (6). В силу дифференцируемости функции $z(w)$ в точке w_0 необходимо должно быть

$$\lim_{r \to 0} \varepsilon(r) = 0. \tag{9}$$

Так как для точек $w \in E_1^{(r)}$

$$|z - \tilde{z}| = |\varepsilon(w)||w - w_0| \leq \varepsilon(r)|w - w_0|,$$

то множество $z(E_1^{(r)})$ расположено внутри прямоугольника с центром z_0, высоты λ и ширины $2\varepsilon(r)r$, дополненного двумя полукругами того же диаметра. Площадь этой фигуры

$$S = 2\lambda r \varepsilon(r) + \pi[\varepsilon(r)]^2 r^2 \leq [8k + \pi\varepsilon(r)]\varepsilon(r) r^2.$$

Отсюда и из соотношения (9) и $\lim\limits_{r \to 0} \frac{\mathrm{Mes} E_1^{(r)}}{\pi r^2} = 1$ следует (8).

Пользуясь теперь теоремой Витали о покрытии множеств и ограниченностью производных чисел функции $z(w)$ на E_1 нетрудно показать, что образ множества точек плотности E_1, в которых производное число функции может равняться нулю, имеет плоскую меру нуль. Это же, как мы указывали, и завершает доказательство леммы 3.

Докажем теперь лемму 2. Из условий леммы следует, что $w(z)$ однолистна на E. Пусть $\overline{D}_1 = w(\overline{D})$ и $E_1 = w(E) \subset \overline{D}_1$. Очевидно, $\overline{D}$ — континуум и $E - 1$ замкнуто, причем обратная функция $z = z(w) = x(w) + iy(w)$ однозначна на E_1 $(w = u + iv)$.

"Продолжим" функции $x(w)$ и $y(w)$ на весь континуум $\overline{D}_1$. Рассмотрим полный прообраз K_w любой точки $w \in \overline{D}_1$ при отображении $w = w(z)$; в качестве соответствующих значений функций $x(w)$ и $y(w)$ примем соответственно множество абсцисс и ординат всех точек замкнутого множества K_w. Рассмотрим поверхности $W = x(w)$ и $W = y(w)$. Пусть $w_n \to w_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Так как топологический предел полных прообразов точек w_n при непрерывном отображении $w = w(z)$ входит в полный прообраз точки w_0, то указанные поверхности суть замкнутые множества трехмерного пространства (u, v, W).

Из условия, наложенного на функцию $w(z)$, следует, что для точек $w_1 \in E_1$ имеют место неравенства

$$\left|\frac{z(w) - z(w_1)}{w - w_1}\right| = \left|\frac{\Delta z}{\Delta w}\right| \leq \frac{1}{\delta} \tag{10}$$

при любом прообразе $z(w) \in \overline{D}$ точки w. Те же неравенства справедливы, очевидно, и для компонент $x(w)$ и $y(w)$ функции $z(w)$.

Последнее означает, что контингенция поверхностей $W = x(w)$ и $W = y(w)$ над точками множества E_1 не пересекается с некоторым двуполостным конусом, т. е. эта контингенция, не есть ни полное пространство, ни полупространство. Отсюда следует [§ 2 гл. II], что почти всюду на E_1 контингенция поверхностей $W = x(w)$ и $W = y(w)$ есть плоскость. В точках $w_1 \in E_1$, где это имеет место, можно естественно определить полный дифференциал функций $x(w)$ и $y(w)$ (относительно множества $\overline{D}_1$, например

$$x(w) - x(w_1) = A(w_1)(u - u_1) + B(w_1)(v - v_1) + o(w - w_1) \quad (w_1 = u_1 + iv_1)$$

при любом выборе значения из множества $x(w)$. Аналогично для $y(w)$.

Поэтому почти во всех точках множества $E_1 \subset \overline{D}_1$ можно определить полный дифференциал функции $z(w) = x(w) + iy(w)$ (относительно $\overline{D}_1$). Ясно, что в этих точках она имеет и полный дифференциал относительно E_1 который, совпадая с предыдущим, равен почти всюду на E_1 полному асимптотическому дифференциалу однозначной (на E_1) функции $z(w)$.

Теперь для $w_1 \in E_1$ можно определить множество моногенности $\mathfrak{M}_{w_1}$, функции $z(w)$ как совокупности всех ее производных чисел в этой точке. Почти во всех точках w_1, где определен дифференциал $z(w)$ (например, в точках плотности E_1), множества $\mathfrak{M}_{w_1}$ суть окружности (см. выше). Но почти во всех точках плотности E_1 множества $\mathfrak{M}_{w_1}$ производных чисел однозначной на E_1 функции $z(w)$, взятых относительно E_1 суть также окружности и в таких точках

$$\mathfrak{M}_{w_1} \equiv \widetilde{\mathfrak{M}}_{w_1}. \tag{11}$$

В силу (10) остальным точкам E_1 соответствует на E подмножество меры нуль. Рассмотрим поэтому, лишь точки $w_1 \in E_1$, в которых имеет место (11).

Ясно, что в точке $z_1 = z(w) \in E$ производные числа функции $w(z)$ будут ограничены, если окружность $\mathfrak{M}_{w_1}$, совпадающая с $\widetilde{\mathfrak{M}}_{w_1}$, не проходит через начало координат. Но таким точкам по лемме 3 соответствуют почти все точки E, т. е. почти всюду на E

$$\overline{\lim_{\Delta z \to 0}} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| < \infty.$$

Лемма 2 доказана.

Как указывалось выше, из этой леммы, а также из теоремы 2 вытекает следующее основное предложение:

Т е о р е м а 3. *Если $f(z)$ — произвольная однозначная и непрерывная в области D функция, то почти для всех точек $z \in D$ множества моногенности $\mathfrak{M}_z$ этой функции суть либо окружности (в частности, точки), либо полные плоскости. При этом множество всех точек z области D, для которых $\mathfrak{M}_z$ не есть полная плоскость, является F_σ-множеством, на котором функция $f(z)$ почти всюду имеет полный дифференциал*[1].

То, что обе указанные возможности для множеств $\mathfrak{M}_z$ могут осуществляться для подмножеств D положительной меры, показывают примеры, приведенные выше.

[1]Аналогичный результат получен и для произвольной конечной функции[2].

В связи с понятием множества моногенности интересным является вопрос об однозначном определении функции $f(z)$ (с точностью до аддитивной постоянной) совокупностью всех $\mathfrak{M}_z$, $z \in D$ (ничего, кроме тривиальных результатов, здесь пока не имеется).

Сделаем еще одно небезынтересное дополнение к нашим "дискретным" теоремам из гл. I.

Обозначим через Σ класс непрерывных функций на каком-либо отрезке, обладающих в каждой его точке (исключая не более чем счетное их множество) конечным правым производным числом; другими словами — нет правой бесконечной производной.

Т е о р е м а 4. *Либо на отрезке* $[a, b]$ *найдется точка* $c \in (a, b)$ *и такое правое производное число* $d(c)$, *что* $f(b) - f(a) = d(c)(b - a)$, *либо на этом отрезке* f *является обобщенной абсолютно непрерывной и*

$$f(b) - f(a) = \int\limits_a^b f'(t)dt.$$

где справа — интеграл Данжуа-Хинчина.

Д о к а з а т е л ь с т в о требуется фактически лишь для второго утверждения теоремы.

И, действительно, если число $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ не является правым производным числом ни в одной точке из $[a, b]$, то этот отрезок является объединением счетной совокупности замкнутых множеств, на каждом из которых f — ограниченной вариации (ср. выше), т.е. функция f — обобщенной ограниченной вариации на $[a, b]$ [3]. А так как f — из класса Σ, то в каждой точке $x \in [a, b]$, исключая счетное множество, одно из правых крайних производных чисел Дини $\bar{f}^+$ или $\underline{f}^+$ — конечно, и, следовательно, f обладает N-свойством [3]. А это и означает, что f является обобщенной абсолютно непрерывной функцией на $[a, b]$.

Отметим лишь, что в общем случае во втором утверждении теоремы функция может не быть обобщенной абсолютно непрерывной в узком смысле и, тем более, просто абсолютно непрерывной.

Мы описали структуру множеств $\mathfrak{M}_z$ с точки зрения <u>классики</u>, т.е. с точки зрения теории меры. Что же касается категорий, мы приведем пока следующие утверждения, легко вытекающие из всего предыдущего:

1) Теорема Бэра: на резидуальном множестве $\mathcal{E} \subset D$ многозначное отображение $z \to \mathfrak{M}_z$ непрерывно, т.е. если $z_0 \in \mathcal{E}$ и $z_n \to z_0$, то $\overline{\mathrm{lt}}\mathfrak{M}_{z_n} \subset \mathfrak{M}_{z_0}$,

2) Для резидуального множества $\mathcal{E}$ в D контингенция графика Γ функции $w = f(z)$ в пространстве $\mathbb{C}^2(z, w)$ совпадает с его паратингенцией; это означает, что в каждой точке $z_0 \in \mathcal{E}$ отображение $z \to \mathfrak{M}_z$ непрерывно и $\mathfrak{M}_{z_0}$ есть совокупность всех предельных значений отношения $\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}$ при $z_1, z_2 \to z_0$.

3) Если z_0 есть точка непрерывности отображения $z \to \mathfrak{M}_z$, то каждая граничная точка континуума $\mathfrak{M}_{z_0}$ достижима по точкам множества A дифференцируемости f, т.е. для каждой $\xi \in \partial\mathfrak{M}_{z_0}$ найдется последовательность $z_n \in A$, $z_n \to z_0$, для которой $\rho(\mathfrak{M}_{z_n}, \xi) \to 0$ (ср. §5 гл II).

Мы сейчас докажем это, а пока заметим, что нас в дальнейшем будет интересовать случай, когда множества $\mathfrak{M}_z$ не являются полными плоскостями для точек множеств второй категории. Но тогда одно из множеств $\mathcal{E}_n$ (см. выше) оказывается содержащим некоторую подобласть $D_1 \subset D$, в которой явится однолистной вспомогательная функция вида $f(z) - Cz$; обратная же функция оказывается уже липшицевой, а так как множества $\mathfrak{M}_z$ и $\mathfrak{M}_w$ прямой и обратной функции одно из другого получается преобразованием $\omega = \frac{1}{\xi}$, то для описания структуры $\mathfrak{M}_z$ для первоначальной функции достаточно это проделать только для липшицевых функций.

Далее, если $f(z)$ липшицева с константой L

$$|f(z') - f(z)| \leq L|z' - z|,$$

то для вспомогательной функции

$$F(z) = f(z) + (L + l)z \qquad (l > 0)$$

получим:

$$l|z' - z| \leq |F(z') - F(z)| \leq (2L + l)|z' - z|.$$

Тем самым мы сведем задачу к однолистной функции, которая вместе с обратной удовлетворяет условию Липшица. А так как $\mathfrak{M}(F)$ получается из $\mathfrak{M}(f)$ параллельным сдвигом, то для решения нашей задачи достаточно описать структуру множеств моногенности именно для таких функций.

Докажем теперь 3). Мы предположим, что для $\mathfrak{M}_{z_0}$ имеет место 2).

Пусть Δ — произвольная из компонент дополнения $\mathbb{C}_\xi \setminus \mathfrak{M}_{z_0}$.

Назовем граничную точку $\tilde{\xi}$ области Δ хорошо достижимой, если существует (открытый) круг $d \in \Delta$, для которого $\tilde{\xi}$ является граничной; при этом можно выбрать круг d так, чтобы $\tilde{\xi}$ была единственной общей граничной точкой d и Δ. Так как хорошо достижимые точки образуют, очевидно, плотное подмножество на границе $\mathfrak{M}_z$, то, используя функции вида $f(z) - \xi_0 z$ и им обратные, мы легко сведем 3) к доказательству следующего утверждения:

Пусть в круге $|\xi| \leq R$ расположено множество $\mathfrak{M}_{z_0}$, пересекающее окружность $|\xi| = R$ в одной точке ξ_0 и пусть z_0 — точка непрерывности отображения $z \to \mathfrak{M}_z$, $z \in D$; тогда найдется последовательность $z_n \in A$, $z_n \to Z_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, такая, что $\xi_0 \in \overline{\mathrm{lt}}\mathfrak{M}_{z_n}$.

В противном случае нашлась бы круговая окрестность $U(z_0)$, такая, что все $\mathfrak{M}_z$-окружности $z \in A \cap U$, расположены в круге $|\xi| \leq R - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$; мы покажем, что в этом случае для каждой пары точек $z', z'' \in U(z_0)$ будет: $|f(z') - f(z'')| \leq (R - \varepsilon)|z' - z''|$, в частности, и при $z'' = z_0$. Но тогда и $\mathfrak{M}_{z_0}$ будет принадлежать кругу $|\xi| \leq R - \varepsilon$, что невозможно. Рассматривая всевозможные отрезки прямых в U, пересекающие A по множеству полной меры, мы фактически сведем доказательство к следующему предложению:

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана комплексная функция $f(t) = x(t) + iy(t)$, удовлетворяющая условию Липшица, причем почти всюду на $[a, b]$ имеем:

$$|x'(t) + iy'(t)| \leq R - \varepsilon;$$

тогда

$$|f(b) - f(a)| \leq (R - \varepsilon)(b - a).$$

В самом деле, легко получаем:

$$|f(b) - f(a)| = |x(b) - x(a) + i[y(b) - y(a)]| =$$

$$\left| \int_a^b [x'(t) + iy'(t)] dt \right| \leq (R - \varepsilon)(b - a),$$

и т. д.

2. Случай функции $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$

Многое при рассмотрении комплексной функции $z(t)$ от вещественного параметра $t \in [a, b]$ окажется подобным соответствующим моментам в случае функции $f(z)$ комплексного переменного. Поэтому естественно сразу исследовать в том же духе и функцию $z(t)$.

Конечно, и здесь возникает множество $m\mathcal{E}$ значений отношения $\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}$ при фиксированном $t \in [a, b]$, где $t + \Delta t \in [a, b]$, $0 <$

$|\Delta t| < \varepsilon$; $m_{\mathcal{E}}$ будем рассматривать как подмножество расширенной комплексной τ-плоскости Т. Множество

$$m_t = \bigcap_{\mathcal{E}>0} \bar{m}_{\mathcal{E}},$$

где замыкания берутся относительно Т, здесь также совпадает с множеством производных чисел функции $z(t)$ в точке t, т. е. с множеством всех предельных значений разностного отношения

$$\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

при $\Delta t \to 0$. Это множество компактно в Т и, в общем случае, состоит из двух континуумов.

Легко перенести (почти дословно) конструкцию из теоремы 1 §1 и доказать, что, и обратно, любые два континуума на Т могут служить множеством производных чисел для некоторой непрерывной функции $z(t)$ в некоторой точке. в случае, например, дифференцируемости φ и ψ в точке $t_0 \in [a, b]$, конечно, m_{t_0} есть единственная точка $(\varphi'(t_0), \psi'(t_0)) \in$ Т. Но если здесь множеством производных чисел функции $\psi(t)$ явится вся прямая $\overline{\mathbb{R}}$, то m_{t_0} будет "вертикальной"прямой $\tau_1 = \varphi'(t_0)$ на плоскости Т.

Как и ранее, множество тех точек из $[a, b]$, для которых m_t не есть полная плоскость Т представляет множество типа $\mathfrak{F}_\tau$; и достаточно рассмотреть лишь одно из слагаемых $\mathfrak{F} \subset [a_1, b_1]$ этого множества, на котором для некоторого $C \in$ Т и определенном $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\left| \frac{\Delta z(t)}{\Delta t} - C \right| \geq 2\varepsilon \text{ при всех } t + \Delta t \in [a_1, b_1]. \tag{12}$$

Следует доказать аналог леммы 2.

Пусть $C = C_1 + iC_2$. Неравенство (12) означает, что значения отношений $\frac{\Delta z(t)}{\Delta t}$ находятся вне круга с центром C и радиуса 2ε. Рассмотрим в нем квадрат Q с центром C, со сторонами, параллельными осям на плоскости Т и длины 2ε. Тогда на множестве $\mathfrak{F}$ имеем подавно:

$$\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} + i\frac{\Delta\psi}{\Delta t} - C_1 - iC_2 \right| \geq \varepsilon.$$

Рассматривая внешность квадрата Q, легко заключить, что для каждого $t \in \mathfrak{F}$ и $t+\Delta t \in [a_1, b_1]$ будем иметь лишь такие возможности:

1) $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} < C_1 - \varepsilon$, 2) $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} > C_1 + \varepsilon$,

3) $\frac{\Delta\psi}{\Delta t} \geq C_2 + \varepsilon$, 4) $\frac{\Delta\psi}{\Delta t} \leq C_2 - \varepsilon$.

Эти неравенства можно переписать как

$$\Delta\varphi < (C_1 - \varepsilon)\Delta t\ (\Delta t > 0),\ \Delta\varphi > (C_1 - \varepsilon)\Delta t\ (\Delta t < 0)$$

и т.д.; видно, что они определяют открытое покрытие всего множества $\mathfrak{F}$.

Беря, например, порцию $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$, на которой имеет место неравенство $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} < C_1 - \varepsilon$ и строгая монотонность φ на $\mathfrak{F}'$ и повторяя почти дословно рассуждения в лемме 2, придем к выводу, что φ дифференцируема почти всюду на $\mathfrak{F}'$.

Аналогично это проводится и для остальных неравенств 2), 3), 4).

Отсюда следует, что почти всюду на множестве точек из $[a, b]$ (типа $\mathfrak{F}_\tau$, в каждой из которых m_t не есть полная плоскость, по крайней мере одна из функций $\varphi(t)$ или $\psi(t)$ дифференцируема. Вспоминая, что каждая конечная функция $f(t)$, $t \in [a, b]$, почти в каждой точке из $[a, b]$ обладает либо всеми возможными производными числами, либо одним-единственным, придем окончательно к следующему утверждению:

Теорема 5. *Для произвольной непрерывной функции $z(t) = \varphi(t)+i\psi(t)$, почти для всех точек $t \in [a, b]$ множества m_t являются либо полными плоскостями, либо полными прямыми, параллельными одной из осей координат на плоскости* Т*, либо единичные точки этой плоскости.*

Остается лишь добавить, что случай, когда почти всюду m_t является полной плоскостью, возникает, если рассмотреть параметрическое представление $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ кривой Пэано (или "ковра" Серпинского) при почти всюду недифференцируемых φ, ψ.

3. Свойства конформности, K', K'', K''' и множества моногенности.

Рассмотрим здесь непрерывные отображения, обладающие свойством консерватизма углов в некоторых точках, и выясним структуру множества моногенности в таких точках. Но прежде уточним и обобщим основные понятия, связанные с этим свойством, приведем некоторые леммы и построим различные примеры отображений.

Будем пользоваться обычным обозначением $\operatorname{Arg} w$ для аргумента комплексного числа $w \neq 0$, определяемого лишь с точностью до целого кратного 2π, т. е.

$$\operatorname{Arg} w = \arg w + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где главное значение аргумента $\arg w$ определяется неравенствами $-\pi < \arg w \leq \pi$.

Если в плоскости w дан некоторый луч T, выходящий из точки w_0, то определим $\operatorname{Arg} T$ следующим образом:

$$\operatorname{Arg} T = \operatorname{Arg}(w - w_0),$$

где $w \in T$ — произвольная точка, отличная от w_0.

Если последовательность точек $\{w_n\}$ сходится и ее предел $w \neq 0$, то $\lim \operatorname{Arg} w_n = \operatorname{Arg} w$.

Это соотношение следует понимать в том смысле, что для любого значения $\alpha = \operatorname{Arg} w$ существует последовательность значений $\alpha_n = \operatorname{Arg} w_n$ сходящихся к α. В случае, когда $w \neq 0$ не есть отрицательное число, предыдущее равенство можно заменить равенством

$$\lim_{n\to\infty} \arg w_n = \arg w.$$

Дадим теперь следующее определение.

Определение 1. Пусть задана произвольная последовательность чисел $\{w_n\}$, $w_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Последовательность $\{\operatorname{Arg} w_n\}$ их аргументов назовем сходящейся, если существует такое число $w^* \neq 0$, что

$$\lim_{n\to\infty} \arg w_n = \arg w^*.$$

или, что то же, обозначая луч $0w^*$ через T,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg} w_n = \operatorname{Arg} T.$$

Заметим, что сама последовательность $\{w_n\}$ может быть и расходящейся. Легко показать, что последовательность $\{\operatorname{Arg} w_n\}$,$w_n \neq 0$, сходится тогда и только тогда, когда в плоскости w существует луч T, выходящий из начала координат $w = 0$ и такой, что при любом $\varepsilon > 0$ все точки последовательности $\{w_n\}$, начиная с некоторого $n = N(\varepsilon)$, лежат внутри угла Ω_ε раствора 2ε с вершиной $w = 0$, биссектрисой которого является луч T; при этом, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Arg} w_n = \operatorname{Arg} T$.

Для произвольных чисел $w_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ из последовательности $\{\lim\limits_{u\to 0} \operatorname{Arg} w_n\}$ всегда можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в указанном выше смысле. Для этого рассмотрим последовательность $\{\arg w_n\}$ главных значений аргументов чисел w_n; так как она ограничена $(|\arg w_n| \leq \pi)$, то найдется подпоследовательность $\{w_n\}$, для которой $\lim \arg w_{n_i} = \alpha$. Но $|\alpha| \leq \pi$, поэтому существует число w^*, для которого $\arg w^* = \alpha$ или $\arg w^* = \alpha + 2\pi$ (если $\alpha = -\pi$). Очевидно, что тогда

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{Arg} w_{n_i} = \operatorname{Arg} w^*.$$

Если $\alpha \neq -\pi$, то, в частности, $\lim\limits_{i\to\infty} \arg w_{n_i} = \arg w^*$.

Так как сходимость аргументов для последовательности выяснена, то сходимость их по непрерывному параметру определяем обычно, т. е. пишем

$$\lim_{u\to 0} \operatorname{Arg} w(u) = \operatorname{Arg} w^*, \quad u \in [0,1]$$

($w(u) \neq 0$ при $u > 0$), если это равенство имеет место для каждой последовательности $\{u_n\}$, $u_n \to 0$, $u_n \in [0,1]$. Например, если $L : w = w(u)$, $0 \le u \le 1$, — простая дуга на плоскости w, то для существования касательной полупрямой T в начальной точке $u = 0$ необходимо и достаточно, чтобы существовал $\lim\limits_{u\to 0} \operatorname{Arg} \Delta w = \lim\limits_{u\to 0} \operatorname{Arg}\,[w(u) - w(0)]$. При этом $\lim\limits_{u\to 0} \operatorname{Arg} \Delta w = \lim\limits_{u\to 0} \operatorname{Arg} T$. Если T не есть отрицательная полуось действительной оси плоскости w то, в частности, будем иметь

$$\lim_{u\to 0} \arg w(u) = \arg T.$$

Для наших целей годится более общее определение касательной, которое мы и приведем в соответствующей форме.

Рассмотрим произвольное непрерывное отображение $w = f(z)$ области D плоскости z в плоскость w. Возьмем точку $z \in D$ и некоторую простую дугу l, выходящую из этой точки. Образ дуги l при нашем отображении есть некоторая непрерывная кривая $L = f(l)$, выходящая из точки $f(z)$, уравнение которой имеет вид $w = f(z + \Delta z)$, $z + \Delta z \in l$. Так как l простая дуга, то очевидно, что это уравнение можно считать параметрическим уравнением кривой L с параметром Δz.

Определение 2. Скажем, что непрерывная кривая $L : w = f(z+ \Delta z)$, $z + \Delta z \in l$ (l — простая дуга с концом z), имеет касательную полупрямую T в точке $f(z)$ (т. е. при $\Delta z = 0$), если:

а) либо при некотором $\delta > 0$ функция $f(z + \Delta z)$ постоянна на l при $|\Delta z| \le \delta$; тогда лучу T приписываем любое направление;

б) либо существует

$$\lim_{\Delta z\to 0} \operatorname{Arg} \Delta w = \lim_{\Delta z\to 0} \operatorname{Arg}\,[f(z + \Delta z) - f(z)],$$

где Δz пробегает все значения, для которых $\Delta w \neq 0$ (тогда $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \operatorname{Arg} \Delta w = \operatorname{Arg} T$).

Из нашего определения сходимости аргументов вытекает, что более полно определение 2 можно высказать следующим образом: непрерывная кривая $L : w = f(z + \Delta z)$ имеет касательную T в точке $f(z)$, если при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что отрезок кривой

L для $|\Delta z| \le \delta$ расположен в некотором замкнутом[2] угле Ω_ε раствора 2ε с вершиной в точке $f(z)$ и биссектрисой T.

Отметим, что в случае, когда вблизи точки $z \in l$ функция $f(z)$ непостоянна на l, то касательная T для кривой L либо вполне определена, либо не существует; это легко следует из того, что из любой последовательности $\{\operatorname{Arg} w_n\}$, $w_n \ne 0$, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (см. выше).

О п р е д е л е н и е 3. Непрерывное отображение $w = f(z)$ области D называется конформным в точке $z \in D$, если образ каждой простой дуги l, выходящей из точки z и имеющей касательную t в этой точке, есть непрерывная кривая L, имеющая касательную T в точке $f(z)$ смысле определения 2, причем касательные $\{T\}$ можно определить (если некоторые из них не определены) так, что выполняется свойство: если произвольные две дуги l_1, l_2 с касательными t_1, t_2 отображаются на кривые L_1, L_2 с касательными T_1, T_2, то $[\widehat{t_1, t_2}] = [\widehat{T_1, T_2}]$; при этом будем говорить о конформном отображении первого или второго рода смотря по тому, сохраняется ли направление отсчета указанных углов или изменяется на противоположное (через $[\widehat{t_1, t_2}]$ обозначена величина угла между лучами t_1, t_2, заключенная между 0 и π).

Заметим, что по этому определению постоянное отображение (при $f(z) = \mathrm{const}$) также является конформным. Будем считать его конформным отображением первого рода.

Очевидно, что конформность первого рода равносильна равенству

$$\operatorname{Arg} t_2 - \operatorname{Arg} t_1 = \operatorname{Arg} T_2 - \operatorname{Arg} T_1.$$

Имеет место следующая лемма.

Л е м м а 4. *Для того чтобы непрерывное отображение $w = f(z)$ было конформным первого рода в некоторой точке $z \in D$, вблизи которой функция $f(z)$ непостоянна, необходимо и достаточно существования предела*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z}, \tag{13}$$

где Δz пробегает все значения, для которых $\Delta w \ne 0$. При этом, если T — луч на плоскости ζ, выходящий из начала $\zeta = 0$ и такой, что $\operatorname{Arg} T$ равен пределу (13), то $\operatorname{Arg} T$ есть угол поворота касательной

[2]Можно рассматривать и открытый угол Ω_ε, но с присоединенной к нему вершиной $f(z)$.

к кривой l в точке z при переходе к ее образу $L : w = f(z + \Delta z)$, $z + \Delta z \in l$ с начальной точкой $f(z)$.

Доказательство предоставляем читателю.

Из определения предела (13) следует, что для того чтобы отображение $w = f(z)$ было конформным первого рода в точке $z \in D$, необходимо и достаточно, чтобы в плоскости ζ существовал луч T (с начальной точкой $\zeta = 0$) со следующим свойством: каково бы ни было $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что замкнутый угол Ω_ε раствора 2ε с биссектрисой T содержит все значения отношения

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\Delta w}{\Delta z}$$

при $0 < |\Delta z| \leq \delta$; при этом, очевидно,

$$\operatorname{Arg} T = \lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Из определения множества моногенности (см. § 1) сразу следует лемма.

Л е м м а 5. *Если непрерывное отображение $w = f(z)$ области D является конформным первого рода в точке $z \in D$, то множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ расположено на некотором луче T с начальной точкой $\zeta = 0$; при этом*

$$\operatorname{Arg} T = \lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

Из этой леммы следует, что в случае конформности первого рода естественно определить величину $\operatorname{Arg} \mathfrak{M}_z$, взяв ее равной $\operatorname{Arg} T$ — угол поворота кривых при отображении $w(z)$ в точке z. В частности, если $\mathfrak{M}_z$ содержит точки $\zeta \neq 0, \infty$, то

$$\operatorname{Arg} \mathfrak{M}_z = \operatorname{Arg} \zeta,$$

где ζ — произвольная точка $\mathfrak{M}_z$.

Заметим, что если отображение $w = f(z)$ конформно (первого рода) в точке z, то множество $\mathfrak{M}_z$ может содержать и точку $\zeta = 0$ (что, как известно, для аналитических функций невозможно). Это видно из следующих примеров отображений вблизи точки $z = 0$:

$$w = z|z|, \qquad w = z\left(\frac{1}{1-|z|} + \sin\frac{1}{|z|}\right).$$

Первая из приведенных функций даже моногенна в точке $z = 0$, для второй множеством $\mathfrak{M}_0$ служит сегмент $[0, 2]$ действительной оси плоскости ζ. Можно привести пример даже однолистной функции с подобным свойством $w = z\frac{f(z)}{z}$, где $f(x) > 0$, $f(0) = 0$ — строго возрастающая функция, не имеющая производной в точке $x = 0$, нижнее производное число которой равно нулю.

Примеры отображений, конформных в точке $z = 0$, вблизи которой функции $f(z)$ принимают и равные значения, дают функции вида

$$w = r^2|\sin n\varphi|e^{i\varphi} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

при $z = re^{i\varphi}$. Но лемма 5 необратима. Это видно уже из примера $w = z^2$, или более сложного

$$w = z\left(1 + \frac{1}{1-|z|}\sin\frac{1}{|z|} + i|z|\right).$$

Для последней функции множеством $\mathfrak{M}_0$ является сегмент $[0, 2]$ действительной оси и при условии существования $\operatorname{Arg}\mathfrak{M}_0$ имело бы место соотношение $\operatorname{Arg}\mathfrak{M}_0 = 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Но для любых точек $\{z_n\}$ таких, что $|z_n| = \frac{1}{(4n-1)\frac{\pi}{2}}$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} \arg\frac{w_n}{z_n} = \frac{3\pi}{4}$.

Можно указать пример однолистной функции с подобным свойством:

$$w(z) = w(re^{i\varphi}) = r\left[1 - (1-r)\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{1}{r}} e^{i\frac{\varphi|\varphi|}{\pi}}$$

при $-\pi \le \varphi \le \pi$ $(r < 1)$. В самом деле, радиусам $\varphi = \mathrm{const}$ круга $|z| < 1$ соответствуют радиусы $\Phi = \mathrm{const}$ круга $|w| < 1$ и это соответствие взаимно однозначно и непрерывно; далее, вдоль каждого радиуса $\varphi = \mathrm{const}$ модуль $|w(re^{i\varphi})|$ есть строго возрастающая функция от r. Отсюда и следует однолистноеть $w(z)$ в круге $|z| < 1$.

Для этой функции множеством производных чисел $\mathfrak{M}_0$ является отрезок $[0, 1]$ действительной оси плоскости ζ; но конформность не имеет места, так как, например, радиусам $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ соответствуют радиусы $\Phi = 0$ и $\Phi = \frac{\pi}{4}$. И все же частичное обращение леммы 5 можно привести.

Лемма 6. *Если для непрерывной функции $f(z)$ множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ в точке z есть конечный отрезок (или конечная точка) луча, выходящего из начала координат, не содержащий точки $\zeta = 0$, то отображение $w = f(z)$ в точке z является конформным первого рода.*

Из условий леммы и определения множества моногенности легко следует, что условие леммы 4 выполнено.

Так как отрезок прямой есть непрерывная кривая, то по методу, указанному в § 1, легко построить примеры, удовлетворяющие условиям леммы 6.

Из сказанного следует, что точка $\zeta = 0$ на плоскости производных чисел играет особую роль в теории множеств моногенности, по крайней мере в вопросах, связанных с конформностью. Подобной же особенностью обладает и точка $\zeta = \infty$, что легко предвидеть, так как, например, для однолистного отображения $w = f(z)$ множество $\mathfrak{M}_z$ связано с множеством $\mathfrak{M}_w$ обратной функции $z = \varphi(w)$ преобразованием $\omega = \frac{1}{\zeta}$ следовательно, каждое свойство точки $\zeta = 0$ для функции $f(z)$ выражается в соответствующем ему свойстве точки $\omega = \infty$ для обратной функции $\varphi(w)$.

Рассмотрим два примера: $w = z\sqrt{|z|}$, $w = -z^{2\frac{\ln|z|}{|z|}}$. В том и другом случае $\mathfrak{M}_0$ есть бесконечно удаленная точка $\zeta = \infty$, однако первое отображение конформно в точке $z = 0$, а второе — нет, так как для одного

$$\lim_{z\to 0} \operatorname{Arg} \frac{\omega}{z} = 2\pi k \quad (k = 0, +1, \ldots),$$

а для другого этот предел не существует.

Вообще, из леммы 4 следует, что если отображение $w = f(z)$ конформно в точке z и $\mathfrak{M}_z$ содержит бесконечно удаленную точку $\zeta = \infty$, то бесконечно удаленные точки, принадлежащие другим лучам плоскости ζ, мы должны при этом считать отличными от первой; то же справедливо и для точки $\zeta = 0$. Другими словами, при изучении конформных отображений мы должны считать, что плоскость ζ имеет не одну бесконечно удаленную, и "начальную", точку, а бесчисленное их множество, и рассматривать ее не как сферу, а как замкнутое круговое кольцо с граничными "окружностями" бесконечно удаленных и "начальных"точек $\zeta = 0$. Приведенные нами примеры убеждают в необходимости различать эти топологии плоскости ζ. Однако такое различие имеет место пока мы рассматриваем отдельные точки $z \in D$. Более того, ниже мы покажем, что если при отображении $w = f(z)$ в каждой точке $z \in D$ множество $\mathfrak{M}_z$ расположено на некотором луче T_z но, вообще говоря, $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ не существует, то отображение осуществляется аналитической функцией. Ясно, что в этих условиях лемма 5 оказывается обратимой.

Дадим теперь следующее определение.

Определение 5. Функция $f(z)$ обладает свойством K' в точке $z \in D$ если из нее исходят три луча $t_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$, расположенных на трех различных прямых, причем:

а) либо при некотором $\delta > 0$ функция $f(z+\Delta z)$ постоянна при $z+\Delta z \in t_i(z)$ $(i=1,2,3)$ и $|\Delta z| \le \delta$;

б) либо существует определенный предел

$$\lim_{\Delta z\to 0} \operatorname{Arg} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \operatorname{Arg} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \operatorname{Arg} T_z,$$

$$z+\Delta z \in t_i(z) \quad (i=1,2,3),$$

где Δz пробегает лишь значения, для которых $\Delta w \ne 0$. При этом в случае а) лучу T_z приписываем произвольное направление. Если, в частности, на лучах t_i $(i=1,2,3)$ вблизи z имеем $\Delta w \ne 0$ и луч T не есть отрицательная полуось действительной оси плоскости ζ, то K'-свойство означает, что в обычном смысле

$$\lim_{\Delta z\to 0} \arg \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \arg T_z, \quad z+\Delta z \in t_i.$$

Как и в лемме 5, свойство K' по определению 5 равносильно следующему: образы лучей t_1, t_2, t_3 в плоскости w при отображении $w=f(z)$ суть непрерывные кривые L_1, L_2, L_3 с касательными (в смысле определения 3) T_1, T_2, T_3 такими, что $[\widehat{t_1,t_2}] = [\widehat{T_1,T_2}]$, $[\widehat{t_1,t_3}] = [\widehat{T_1,T_3}]$, $[\widehat{t_2,t_3}] = [\widehat{T_2,T_3}]$, причем сохраняются направления отсчета углов.

Из определений, приведенных выше, следует, что существование предела

$$\lim_{\Delta z\to 0} \arg \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \arg T_z, \quad z+\Delta z \in t_1, t_2, t_3,$$

равносильно такому свойству: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что замкнутый на плоскости ζ угол Ω_ε раствора 2ε с биссектрисой T_z содержит все значения отношения

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}, \quad z+\Delta z \in t_1, t_2, t_3,$$

при всех Δz таких, что $0 < |\Delta z| \le \delta$. Отсюда и вытекает, что все производные числа функции $f(z)$, соответствующие приближению к точке z вдоль t_1, t_2, t_3, расположены на одном луче T_z (в § 4 мы это используем).

Здесь с помощью теоремы 2 § 1 мы докажем некоторые утверждения о свойствах K', K'', K'''. Напомним определение свойств K'', K''' [14].

Функция $f(z)$ обладает свойством K'' в точке z области D, если из этой точки исходят три луча: t_1, t_2, t_3, расположенные на трех различных прямых, вдоль каждого из которых существуют конечные пределы

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|, \quad z+h\in t_1, t_2, t_3, \tag{14}$$

причем все эти пределы одинаковы.

Функция $f(z)$ обладает свойством K''' в точке $z\in D$, если из нее исходят два луча t_1, t_2, расположенные на различных прямых, вдоль каждого из которых существует конечный предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}, \quad z+h\in t_2, t_3, \tag{15}$$

причем оба предела одинаковы.

Напомним еще один удобный термин: скажем, что однолистное отображение $w=f(z)$ области D является прямым, если локальная степень его (всюду) равна $+1$.

Докажем следующие леммы.

Лемма 7. *Если в точке z области D функция $f(z)$ обладает свойством K' (или K''') и имеет полный дифференциал, то она моногенна в этой точке.*

Лемма 8. *Пусть непрерывная функция $w=f(z)$ однолистна в области D и осуществляет прямое отображение D на некоторую область плоскости w. Если в некоторой точке $z\in D$ функция $f(z)$ обладает свойством K'' и имеет полный дифференциал, то она моногенна в этой точке.*

Доказательство лемм 1 и 2. В силу теоремы 2 § 1 множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ функции $f(z)$ есть окружность (или точка) с параметрическим представлением

$$\zeta = f_z + f_{\bar z}e^{-2i\alpha}, \quad \alpha\in[0,2\pi], \tag{16}$$

где ζ есть производное число функции $f(z)$ в точке z, соответствующее приближению к z вдоль луча с наклоном α; при этом лучам, располо- женным на различных прямых, т. е. для которых разность углов α отлична от π, соответствуют и различные производные числа $\zeta\in\mathfrak{M}_z$, если $f_{\bar z}\neq 0$.

Из этого замечания сразу следует, что если выполнено свойство K''', то $f_{\bar z}=0$, т. е. функция $f(z)$ моногенна в точке z.

Пусть выполнено свойство K'; если бы $f_{\bar z}\neq 0$, то существовали бы три различных производных числа функции $f(z)$, расположенных на одном и том же луче T_z с началом в точке $\zeta=0$ (см. выше), т. е. этот луч должен был бы пересекать окружность $\mathfrak{M}_z$ в трех различных точках, что невозможно. Следовательно, и в этом случае $f_{\bar{z}} = 0$.

Пусть теперь для прямого однолистного отображения $w = f(z)$ выполнено свойство K'' в точке z. Если $f_{\bar{z}} \neq 0$, то существуют три различные точки окружности $\mathfrak{M}_z$, расположенные на одном и том же расстоянии от $\zeta = 0$ (равном общему значению пределов (14)), т. е. $\mathfrak{M}_z$ есть окружность с центром в начале координат $\zeta = 0$ и радиусом $|f_{\bar{z}}| \neq 0$, но тогда в силу (16) $f_z = 0$. В этом случае сопряженная функция $\bar{f}(z)$ моногенна в точке z и в силу § 1 $\bar{f}'(z) = \bar{f}_{\bar{z}} \neq 0$. Отсюда следует, что в точке z отображение $w_1 = \bar{f}(z)$ имеет локальную степень, равную $+1$. Но тогда данное отображение имело бы степень, равную $^-1$, что противоречит предположению леммы 8.

Итак, в этом случае также должно быть $f_{\bar{z}} = 0$ и функция $f(z)$ моногенна в точке z. Леммы 1 и 2 доказаны.

Из их доказательства ясно, что для каждой дифференцируемой и нигде не моногенной функции $f(z)$ можно выбрать в каждой точке $z \in D$ два луча $t_1(z)$ и $t_2(z)$, вдоль которых растяжения (т. е. значения (14)) одинаковы, тем не менее K''' не выполняется, или выбрать три луча $t_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ такие, что вдоль $t_1(z)$ и $t_2(z)$ растяжения одинаковы, но отличны от растяжения вдоль $t_3(z)$ (невыполнение K''), и т. д.

В этом смысле свойства K', K'', K''' являются минимальными характеристиками для свойства моногенности дифференцируемых функций. Более того, во многих случаях выполнение какого-либо из условий K', K'', K''' в области D самого по себе, т. е. без предположения дифференцируемости функции, обязательно приводит к аналитическим функциям (см. гл. XIII). Следовательно, характеристики K', K'', K''' оказываются в этих случаях не только необходимыми, но и достаточными для аналитичности.

4. Категорная теорема о множествах моногенности

Рассмотрим теперь случай непрерывной комплексной функции $f(z)$, $z \in D \subset \mathbb{C}$. Здесь пока нет такой полной характеристики множества моногенности $\mathfrak{M}_z$ на резидуальном множестве в D, как это было для случая множеств полной меры. И все же мы приведем некоторые определенные утверждения.

Прежде всего, докажем, повидимому, ожидаемый уже для нас, какой-то из вариантов теорем о "симметрии":

Т е о р е м а 6. *На резидуальном множестве $\mathcal{E} \subset D$ имеем свойство: если a — производное число функций $f(z)$ в точке $z \in \mathcal{E}$,* *соответствующее последовательности* $\{z + h_n\}$, $h_n \to 0$, *с полукасательной* l *в точке* z, *то найдется другая последовательность* $\{z + h'_n\}$, $h'_n \to 0$ *с полукасательной* $(-l)$, *"дающая"то же производное число* a.

Доказательство этой теоремы повторяет дословно все моменты доказательства подобной теоремы 2 гл. II, поэтому приводить его не будем.

Из этой теоремы легко вывести, что точки множества $\mathcal{E}$ обладают тем свойством, что все производные числа f в этих точках возникают, если вместо полной круговой окрестности брать любые их полукруги с диаметрами фиксированного направления.

Мы сейчас же применим это замечание.

Именно, рассмотрим простую дугу, заданную гомеоморфизмом $f : I \to \mathbb{C}$, или $z = f(t) = \phi(t) + i\psi(t)$ $(t \in I \equiv [0, 1])$. Дуга $L = f(I)$ в каждой точке $z(t)$, $t \in (0, 1)$ имеет естественным образом определяемые две контингенции: правую и левую — $\mathrm{contg}^+_L z$, $\mathrm{contg}^-_L z$: это — некоторые плоские секторы с вершиной z.

Так вот, для резидуального множества $e \subset (0, 1)$ эти контингенции — центрально-симметричны.

Это сразу следует из предыдущей теоремы в применении к конкретному случаю комплексной функции $\mathfrak{F}(z) = f(x)$ $(z = x + iy)$ вещественной переменной x, определенной в квадрате $I^2 = I \times I$: ведь в силу равенства

$$\frac{\Delta \mathfrak{F}}{\Delta z} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cos \alpha e^{i\alpha}$$

последовательности $\{z + h_n\}$, $\{z + h'_n\}$ можно брать просто на самих лучах l и $-l$; нам же нужно взять $\alpha = \arg\{l, -l\} = 0, \pi$.

Для фиксированной ее точки $z_0 = f(z_0)$, $t_0 \in (0, 1)$, и для $t > t_0$ возьмем одно из значений $\mathrm{Arg}[f(t) - f(t_0)]$ $\left(\mathrm{Arg}\frac{[f(t) - f(t_0)]}{t - t_0}\right)$. Непрерывное продолжение этого значения при $t > t_0$, другими словами, поднятие части дуги L при $t > t_0$ на риманову поверхность функции $\mathrm{Ln}(z - z_0)$ определит однозначную ветвь функции $\mathrm{Arg}[f(t) - f(t_0)]$; колебание ее в точке t_0 назовем правым обходом дуги L. Аналогично определим и левый обход.

Из наших теорем следует теперь, что для резидуального множества точек простой дуги L правые и левые обходы совпадают.

Вернемся к произвольной непрерывной комплексной функции $f : D \to \mathbb{C}$.

Мы уже знаем, что множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ может быть полной плоскостью для всех точек области D.

Рассмотрим общий случай, когда множество $\mathcal{E} \subset D$ точек, где $\mathfrak{M}_z$ не есть полная плоскость — непусто. Тогда оно — типа $\mathfrak{F}_\sigma$ и, как и в § 1, представимо в виде

$$\mathcal{E} = \bigcup_{m,n} \mathcal{E}_{mn}, \tag{17}$$

где $\mathcal{E}_{mn} = \left\{z : \left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - r_n\right| \geq \frac{1}{m},\ 0 < |h| < \frac{1}{m}\right\}$ причем $\{r_n\}$ — плотная на плоскости последовательность точек, а $\mathcal{E}_{mn}$ — замкнуты.

Предположим теперь, что $\mathcal{E}$ — не первой категории.

Отбрасывая не существенные для нас нигде не плотные в D открытые порции $\mathcal{E}$, можем считать, что любая открытая порция из $\mathcal{E}$ плотна в некотором круге из D. Тогда из представления (17) следует, что найдется некоторый круг $d \subset D$, в котором порция $\mathcal{E} \cap d$ плотна, а на ней плотно $\mathcal{E}_{mn}$ при определенных значениях m, n. В силу замкнутости последнего, $\mathcal{E}_{mn} \supset d$; взяв диаметр d меньшим $\frac{1}{m}$, мы получим для вспомогательной функции $\mathcal{G}(z) = f(z) - r_n z$, что для любых точек $z', z'' \in d$:

$$|\mathcal{G}(z'') - \mathcal{G}(z')| \geq \frac{1}{m}|w'' - w'|.$$

А это означает, что все множества моногенности $\mathfrak{M}_w$ функции $\psi(w) = \mathcal{G}^{-1}(w)$ — как подмножества некоторой плоскости ω — лежат в круге $|\omega| \leq m$ этой плоскости. Вводя новую вспомогательную функцию

$$\psi(w) = \psi(w) + 2mw,$$

получим для нее:

$$m|w'' - w'| \leq |\psi(w'') - \psi(w')| \leq 3m|w'' - w'|. \tag{18}$$

Тем самым мы построим новую однолистную функцию, которая вместе со своей обратной удовлетворяет условию Липшица.

Так как она получена с помощью серии операций прибавления целой линейной функции (для $\mathfrak{M}$ это означает преобразование $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}+a$, $a \in \mathbb{C}$), то ясно, что вопрос о структуре множеств моногенности будет решен в случае липшицевых функций, если мы это сделаем для функции типа (18).

Введем сначала одно понятие.

Пусть Δ — односвязная область плоскости ζ, содержащая бесконечно удаленную точку. граница $\partial\Delta$ которой есть непустой континуум K, и пусть $\zeta_0 \in \Delta$ — произвольная точка. Возьмем некоторую дугу $l \subset \Delta$, соединяющую ζ_0 с бесконечно удаленной точкой и в плоскости ζ с разрезом l определим какую-либо однозначную ветвь функции $\mathrm{Arg}(\zeta - \zeta_0)$. Колебание этой непрерывной функции на $K \equiv \partial\Delta$ назовем обходом вокруг точки ζ_0 континуума K и обозначим через $\delta(\zeta_0, K)$.

Нетрудно убедиться, что величина $\delta(\zeta_0, K)$ не зависит от выбора дуги l и ветви функции $\mathrm{Arg}(\zeta - \zeta_0)$. Грубо говоря, число $\frac{1}{2\pi}\delta(\zeta_0, K)$ показывает, какое максимальное число (целое или нет) "полных"оборотов могут совершать подконтинуумы границы $\partial\Delta$ области Δ "вокруг"точки ζ_0.

Л е м м а 9. Каждое из свойств:

1) $\delta(\zeta_0, K) < 2\pi$ для каждой точки $\zeta \in \Delta$;

2) $\delta(\zeta_0, K) \leq 2\pi$ для каждой точки $\zeta \in \Delta$;

эквивалентно следующему свойству континуума K (или, если угодно, области Δ): каждую точку $\zeta \in \Delta$ можно соединить с бесконечно удаленной точкой некоторой полупрямой в Δ, не пересекающей K.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение для свойства 1) почти очевидно: легко показать, что в этом случае радиальная проекция K на какую-либо окружность с центром ζ не может быть полной окружностью. Поэтому достаточно доказать эквивалентность свойств 1) и 2), которая вытекает со следующего утверждения: если $\delta(\zeta_0, K) = 2\pi$, то в любой близости от ζ_0 найдутся точки $\zeta \in \delta$, для которых $\delta(\zeta_0, K) > 2\pi$. Это же легко следует из принципа максимума гармонических функций, каковыми являются любые ветви $\mathrm{Arg}(\zeta - \zeta_0)$.

Лемма 1 доказана.

Рассмотрим в области D многозначное отображение $z \to \mathfrak{M}_z$. В силу обобщенной теоремы Бэра это отображение полунепрерывно сверху; тогда на основании одной теоремы Куратовского [3] существует резидуальное множество $\mathcal{E} \subset D$, такое, что 1) для каждой последовательности $z_n \in d$, $z_n \to z_0 \in \mathcal{E}$, имеем: $\underset{n}{lt}\ \mathfrak{M}_{z_n} \subset \mathfrak{M}_{z_0}$; 2) для последовательности $z_n \in \mathcal{E}$, $z_n \to z_0 \in \mathcal{E}$, имеем: $\underset{n}{lt}\ \mathfrak{M}_{z_n} = \mathfrak{M}_{z_0}$. Другими словами, ограничение нашего многозначного отображения $z \to \mathfrak{M}_z$ на множество $\mathcal{E}$ непрерывно.

Одной из основных для дальнейшего явится следующая теорема:

Теорема 7. *Если $z_0 \in \mathcal{E}$ и точка ζ лежит в неограниченной компоненте дополнения к $\mathfrak{M}_{z_0}$, то существует прямолинейный луч, выходящий из точки ζ и не пересекающий $\mathfrak{M}_{z_0}$.*

Доказательство будем вести от противного.

В таком случае — по лемме 1 — мы можем считать, что обход $\delta(\zeta, \mathfrak{M}_{z_0})$ точки ζ континуумом $\mathfrak{M}_{z_0}$ — больше 2π.

Выберем окрестность $\mathrm{V}(\mathfrak{M}_{z_0})$, такую, чтобы точка ζ лежала в неограниченной компоненте дополнения к $\overline{\mathrm{V}}$; пусть $U(z_0)$ — столь малая круговая окрестность z_0, что выполняются следующие условия: 1) для каждой точки $z \in U(z_0)$ множество $\mathfrak{M}_z \subset \mathrm{V}$ и 2) для каждой точки $z \in \mathcal{E} \cap U$ обход $\delta(\zeta, \mathfrak{M}_z) \geq 2\pi + 3\alpha_0$, где $\delta(\zeta, \mathfrak{M}_{z_0}) \geq 2\pi + 4\alpha_0$, $\alpha_0 > 0$; это возможно в силу упомянутых теорем Бэра и Куратовского.

Рассмотрим прямолинейные сечения $\{\lambda\}$ круга $\overline{U(z_0)}$, параллельные оси абсцис; из замечания к теореме следует, что для точек некоторого резидуального множества (в U) множество всех производных чисел в этих точках возникает если рассматривать лишь какую-либо из (замкнутых) полуокрестностей с диаметром, параллельным оси абсцисс. Можно считать, что это имеет место уже для $\mathcal{E}$. Наконец, на диаметре U, параллельном оси Oy найдется резидуальное множество, для которого соответствующие горизонтальные сечения пересекают $\mathcal{E}$ по (линейному) множеству также всюду на них второй категории.

Пусть λ — одно из таких сечений и $\Lambda = f(\lambda)$, $\mathcal{E} \cap \lambda = e'$; так как f — гомеоморфизм, то Λ — простая дуга на плоскости w при отображении $w = f(z)$, а $f(e')$ — резидуально на Λ.

Возьмем произвольную точку $z' \in e'$ внутри отрезка λ и пусть $w' = f(z')$. Так как $\delta(\zeta, \mathfrak{M}_{z_0}) \geq 2\pi + 3\alpha_0$, то в каждой полуокрестности z' найдется пара точек z_1, z_2, таких, что прямолинейный отрезок $\overline{z_1, z_2}$ не содержит z' и что приращение функции $\Phi_{z'}(z) = \mathrm{Arg}\frac{f(z)-f(z')}{z-z'}$ больше $2\pi + 2\alpha_0$.

Образ отрезка $\overline{z_1 z_2}$ есть простая дуга $\overline{w_1, w_2}$, которая, в силу гомеоморфизма f не пересекает Λ, а по построению, обход этой дуги вокруг точки $w' \in \Lambda$ — больше $2\pi + 2\alpha_0$.

Здесь можем дополнительно считать, что в точках $f(e')$ правая и левая контингенции дуги Λ — центрально-симметричны относительно этих точек (в том числе и для выбранной точки w'). Очевидно, что тогда правые и левые обходы дуги Λ в точке w' — больше $\pi + \alpha_0$. Другими словами правая и левая контингенции дуги Λ в точке w' содержат по крайней мере "сверхтупой"угол раствора $\pi + \alpha_0$.

Подчеркнем, что это имеет место для каждой точки w' резидуального в $f(U)$ множества $f(\mathcal{E})$ и соответствующей дуги $\Lambda \ni w'$.

Мы собираемся сейчас применить теорему Бэра при одном нужном нам частном подходе и которая возникает из привычных уже построений из гл. II.

Именно, будем рассматривать отношения $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ при $h > 0$; другими словами, рассматриваем правые частные производные числа по x. Напомним, что их множество $\mu(z)$ в точке z определяется следующим образом:

$$\mu_\varepsilon = \left\{ \frac{f(z+h)-f(z)}{h},\ 0 < h < \varepsilon \right\}$$

и

$$\mu(z) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mu_\varepsilon}.$$

Применяя эту теорему в нашем случае, получим, что континуум $\mu(z)$ для каждой точки $z \in \mathcal{E}$ расположен в кольце $K : l \leq |\zeta| \in L$ и угловой раствор его — больше $\pi + \alpha_0$.

По теореме Куратовского на резидуальном множестве отображение $z \to \mu(z)$ непрерывно. Мы и здесь можем считать, что этим множеством является $\mathcal{E}$. Поэтому легко найти точку z_0' и ее окрестность $U'(z_0')$, такие, что правые контингенции в каждой точке из $f(\mathcal{E})$ дуг $f(\lambda)$ содержат фиксированный "сверхтупой"угол раствора $\pi + \frac{\alpha_0}{2}$.

Проведем в области $f(U')$ отрезок τ прямой, перпендикулярной биссектрисе этого угла и пересекающий множество $f(\mathcal{E})$ по линейному резидуальному множеству e.

Имеем следующую картину: прямолинейный отрезок τ, на нем резидуальное подмножество e, причем для каждой его точки имеется бесконечная последовательность попарно непересекающихся простых дуг, лежащих по одну сторону от τ, с концами на τ, каждая из которых окружает эту точку и, как последовательность, стягивается в нее. для каждой такой точки, прообраз ее и этих дуг принадлежат одной горизонтали. В этой системе дуги попарно не пересекаются и в целом, так как они представляют гомеоморфные образы непересекающихся горизонталей из первоначальной окрестности $U(z_0)$.

Мы покажем, что в наших этих условиях пересечение все же должно быть: это и явится искомым противоречием.

Для этого положим $e = \bigcup_k e_k$, где $e_k \subset e$ множество тех точек из e, которым соответствует хотя бы одна дуга из нашей системы диаметра $\geq \frac{1}{k}$. Как и всегда ранее, легко видеть, что e_k замкнуто в e;

и, опять-таки, найдем интервал e, который полностью принадлежит некоторому e_k. По построению, точкам этого интервала соответствуют "большие"дуги с одной и той же стороны от τ и с концами на τ по разные стороны от соответствующих точек. Прообразами этих дуг являются также "большие"отрезки горизонтальных прямых с концами на простой дуге $f^{-1}(\tau)$.

Возьмем произвольные точки α, β из нашего e_k и предположим, что соответствующие им "большие"дуги l_α, l_β охватывают одна другую: тем самым, вместе с некоторыми отрезками τ они ограничивают определенное "полукольцо"по одну сторону от τ.

В силу равномерной непрерывности f^{-1} прообразы всех предельных положений дуг, соответствующих точкам из интервала $(\alpha, \beta) \cap e_k$, также суть "большие" отрезки горизонталей, не пересекающие дугу $f^{-1}(\tau)$ и лишь с концами на этой дуге. Итак, отрезку $[\alpha, \beta] \subset \bar{e}_k$ в прообразе $f^{-1}(\tau)$ соответствует некоторая простая дуга (по построению, она не лежит на одной горизонтали) со следующим свойством: на каждой горизонтали через точки этой дуги находятся "большие"отрезки с концами на дуге $f^{-1}(\tau)$, которые не пересекают ее больше.

Отсюда следует, что $f^{-1}(\tau)$ содержит две дуги (соответствующие двум "основаниям"указанного выше "полукольца"), являющиеся графиками однозначных — относительно оси Oy — непрерывных функций.

Возьмем точку, на одном из этих графиков, принадлежащую множеству $f^{-1}(e)$ (оно плотно на $f^{-1}(\tau)$!) и соответствующий горизонтальный отрезок через нее. Тогда образ этого отрезка, по построению, расположен по одну сторону от τ и (односторонняя) контингенция его не может иметь "сверхтупого"угла. Противоречие.

Пользуясь функциями вида $f(z) - \zeta_0 z$ и переходом к обратным функциям, мы легко приходим к следующему важному для нас следствию из теоремы 2, которое сформулируем в виде отдельной теоремы:

Т е о р е м а 3. *Для произвольной непрерывной функции $f(z)$ существует множество $\mathcal{E}$ всюду второй категории в D, такое, что для каждого $z \in \mathcal{E}$ множество $\mathfrak{M}_z$ есть либо вся плоскость ζ, либо обладает следующим свойством: любые две точки компоненты дополнения к $\mathfrak{M}_z$ можно соединить дугой окружности, не пересекающей $\mathfrak{M}_z$.*

В следующем параграфе мы докажем основную теорему о структуре множеств моногенности непрерывных функций комплексного переменного; и хотя формулировку ее нельзя считать окончательной, сама она, метод ее доказательства, а также приводимые далее примеры в большой степени проясняют как различные возможности здесь, так и возникающие трудности в дальнейших исследованиях.

5. Основная теорема о множествах $\mathfrak{M}_z$

Как и выше, мы будем все время предполагать, что в области D функция $f(z)$ удовлетворяет неравенствам:

$$l|z'' - z'| \le |f(z'') - f(z')| \le L|z'' - z'|, \ z', z'' \in D,$$

а множество $\mathcal{E}$ второй категории в D таково, что на нем соответствие $z \to \mathfrak{M}_z$ полунепрерывно сверху относительно D и непрерывно относительно самого себя.

Теорема 4. *Граница каждой компоненты дополнения к $\mathfrak{M}_z$, $z \in \mathcal{E}$, есть непрерывная кривая.*

Доказательство. Так как каждая такая компонента односвязна, то из теории простых концов следует, что достаточно доказать наличие лишь концов I-го рода. Но, в противном случае, граница содержала бы некоторый континуум конденсации, а вместе с ним существовала бы последовательность $\{\zeta_p\}$ точек компоненты, сходящаяся к точке этого континуума и таких, что любые две из них можно соединить внутри компоненты другой, длина которой не может быть меньше некоторого фиксированного $\delta > 0$. Но теперь уже легко видеть, что достаточно близкие из этих точек нельзя соединить дугой окружности, не пересекающей $\mathfrak{M}_z$.

6. Обобщение теоремы В.В. Степанова об асимптотической дифференцируемости функций

Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$ непрерывная функция; обозначим через Γ — график ее в $\mathbb{R}^{m+1}$ и пусть $A \in \Gamma$ — произвольная ее точка.

Легко показать, что $\mathrm{contg}^S_\Gamma A = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \overline{M}_\varepsilon$, где M — проекция на единичную сферу проколотой ε-окрестности точки $A = A(x, u) \in \Gamma$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in D \subset \mathbb{R}^m$.

Введем другой, отличный от классического, вид контингенции для графика Γ:

$$\mathrm{contg}^C_\Gamma A = \bigcup_{\varphi \in S^{m-1}} [Q(\varphi), P(\varphi)],$$

где $P(\varphi)$, $Q(\varphi)$ определены как в гл. II. Проекцию $\mathrm{contg}_\Gamma^C A$ на единичную сферу, как и раньше, обозначим через $\mathrm{contg}_\Gamma^S A$. Здесь, вообще говоря, функции $P(\varphi)$, $Q(\varphi)$ не являются полунепрерывными и $\mathrm{contg}_\Gamma^C A$ может быть несвязна. Из определения $\mathrm{contg}_\Gamma^C A$ следует,что она регулярна, т. е. каждое сечение образующей цилиндра не пусто и даже есть компакт. Но несчетное объединение компактов не всегда является компактом.

Теорема. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^1$, $D \subset \mathbb{R}^2$ непрерывная функция. Пусть $E \subset D$ множество всех точек, в которых* $\mathrm{contg}_\Gamma^S A$*, $A \in \Gamma$, содержит по крайней мере два неполных полумеридиана. Тогда множество E есть множество типа F_σ и почти всюду на E функция f асимптотически дифференцируема. При этом, если* $\mathrm{Int}E \neq 0$*, т. е. E не первой категории, то на* $\mathrm{Int}E$ *существует всюду плотное открытое множество O, на котором функция f дифференцируема почти всюду в обычном, смысле.*

Доказательство. По условию теоремы, $\mathrm{contg}_\Gamma^S A$, $A \in \Gamma$, по направлениям $t_j(A)$ $(i = 1, 2)$ содержит два неполных полумеридиана. Тогда, по направлениям, по которым полумеридианы неполны, верхний или нижний пределы разностного отношения ограничены, т. е. либо

$$\overline{\lim}\frac{f(z') - f(z)}{|z' - z|} < \infty \tag{19}$$

либо

$$\underline{\lim}\frac{f(z') - f(z)}{|z' - z|} > -\infty, \tag{20}$$

где $z' \in t_i(z)$ $(i = 1, 2)$. Разобьем множество E на три подмножества: E^{+-}, E^{++}, E^{--}: 1) $z \in E^{--}$, если в обоих направлениях $t_1(z)$, $t_2(z)$ имеет место соотношения (19); 2) $z \in E^{++}$, если в обоих направлениях выполнено (20); 3) $z \in E^{+-}$, если вдоль одного из $t_1(z)$, $t_2(z)$ выполнено (19), а для другой — (20).

Очевидно, что $E = E^{+-} \cup E^{++} \cup E^{--}$. Покажем, что каждое из слагаемых здесь является обьединеним замкнутых множеств. Фиксируем определенный луч t в плоскости z и введем множества $E^{+-}(p, q, n_1, n_2) = E'$; именно, $z \in E'$ если: 1)$|[t_i(z), t] - n_i/100p| \leq 1/100p$ $(i = 1, 2)$; 2) $1/100p \leq [t_1(z), t_2(z)] \leq \pi - 1/100p$; 3) $[f(z' - f(z)]/|z' - z| \geq -q$ для всех $z' \in t_1(z)$, таких, что $0 < |z' - z| \leq 1/q$ и $[f(z' - f(z)]/|z' - z| \leq q$ для всех $z' \in t_2(z)$ таких, что $0 < |z' - z| \leq 1/q$. Аналогично вводим множества $E^{++}(p, q, n_1, n_2)$,

$E^{--}(p,q,n_1,n_2)$. Легко видеть, что каждое из этих множеств замкнуто; это просто следует из непрерывности f. Далее, очевидно, что $E^{++} = \bigcup -pqn_iE^{++}(p,q,n_1,n_2) = E'$ и т. д. и $E = E^{+-} \cup E^{++} \cup E^{--}$; тем самым, все множества E^{+-}, E^{++}, E^{--}, E: типа F_σ.

Выберем систему координат, для которой ось Ox является биссектрисой угла $t_1(z_0)$, $t_2(z_0)$; из условий $[\widehat{t_1(z_0), t_2(z_0)}] \leq 2/p$ и $[\widehat{t_i(z_0), t_i(z')}] \leq 1/100p$ стороны углов $t_1(z')$, $t_2(z')$ располагаются одинаково: нижняя сторона в соответствующей нижней полуплоскости, верхняя — в верхней. Можем считать в качестве нижних сторон $t_1(z')$.

Рассмотрим пару вертикальных углов $V(z_0) = V_1 \cup V_2$ раствора, меньшего $1/10p$ с общей биссектрисой, совпадающей с осью ординат; по построению, лучи $t_i(z_0)$ лежат вне $V(z_0)$.

Рассмотрим два случая: 1. В одном из углов V_1 или V_2 нет точек множества $E^{++}(p,q,n_i)$. В этом случае, очевидно, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ двугранный угол над соответствующим V_i не содержит графика функции $f\mid_{E'}$; следовательно, контингенция графика $f\mid_E$ не содержит точек этого двугранного угла. 2. Пусть теперь $z' \in E' \cap V_1$. Тогда луч $t_2(z')$ пересекает $t_1(z_0)$ в некоторой точке $\tilde{z}$; имеем

$$\frac{f(z') - f(z)}{|z' - z|} = \frac{f(z') - f(\tilde{z}) + f(\tilde{z}) + f(z)}{|z' - z|} \leq$$

$$\leq \frac{|f(z') - f(\tilde{z})|}{|z' - \tilde{z}|}\frac{|z' - \tilde{z}|}{|z' - z|} + \frac{|f(\tilde{z}) - f(z)|}{|\tilde{z} - z|}\frac{|\tilde{z} - z|}{|z' - z|} \leq q\left[\frac{\sin\alpha}{\sin\tilde{\alpha}} + \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}\right] \leq$$

$$\leq q\frac{2m}{\sin 100\sigma}, \quad \text{где } m = \max(\max\sin\alpha, \max\sin\alpha') \text{ и}$$

$$\alpha' = [\widehat{|z' - \tilde{z}|, |z' - z|}],\ \alpha' = [\widehat{|\tilde{z} - z|, |z' - z|}],\ \tilde{\alpha} = [\widehat{|z - \tilde{z}|, |z' - \tilde{z}|}]$$

Другими словами, над V_1 найдется конус (в данном случае), не содержащий точек график $f\mid_E$; тогда по известной теореме [19] функция f асимптотически дифференцируема на каждом $E^{+-}(p,q,n_i)$.

Случай $E^{++}(p,q,n_i)$, $E^{--}(p,q,n_i)$ сводится к рассмотреному следующим простым приемом: в каждой их точке один из лучей $t_i'(z)$ заменяем на луч противоположного направления и для новой системы лучей $t_1'(z)$, $t_2'(z)$ проводим предыдущие рассмотрения, которые приводит к тому же результату.

Докажем теперь, что если $\mathrm{Int}E \neq \emptyset$, то найдется открытое всюду на $\mathrm{Int}E$ плотное множество, на котором функция f почти всюду дифференцируема в обычном смысле. Так как множество E — типа f_σ то в любой окрестности точки из $\mathrm{Int}E$ найдется круг, совпадающий с одним из $E^{+-}(p,q,n_i)$. Можно предположить, что диаметр этого круга меньше чем $1/q$. Все предыдущие оценки приводят к тому, что для каждой точки z из этого круга найдется угол, над которым существует конус, не содержащий точек графика функции над всей окрестностью. Это же означает, что график функции f над всей этой окрестностью есть объединение не более чем счетного множества графиков Липшицеых функций. Отсюда легко следует дифференцируемость почти всюду в этой окрестности функции f в обычном смысле.

Рассмотрим теперь некоторый многомерный аналог этой теоремы. Обозначим, как всегда, через $\Gamma \subset \mathbb{R}^{m+1}$ график однозначной непрерывной функции $f : D \to \mathbb{R}^1$, $D \subset \mathbb{R}^m$.

Теорема. *Пусть $E \subset D$ множество всех точек, в которых* $\mathrm{contg}_\Gamma^S A$, $A \in \Gamma$, *содержит неполные полумеридианы вдоль m линейно независимых направлений. Тогда множество E есть множество типа F_σ; при этом, если* $\mathrm{Int} E \neq \emptyset$, *(другими словами, $E \subset D$ — не первой категории), то на* $\mathrm{Int} E$ *существует всюду плотное открытое множество O, на котором функция f дифференцируема почти всюду.*

Доказательство. Для каждого натурального p постороим конечное замкнутое покрытие $H_p = \left\{ H_p^{(j)} \right\}$ $(j = 1, 2, \ldots, j_p)$ единичной сферы S^{m-1}: $\sum x_k^2 = 1$, такое, что две произвольные точки из $H_p^{(j)}$ видны из ее центра под углом $< 1/1800p$. О луче τ будем говорить, что он принадлежит множеству $H_p^{(j)}$: $\tau \in H_p^{(j)}$, если параллельный ему радиус сферы S^{m-1} пересекает это $H_p^{(j)}$.

Обозначим через $E(n_1, n_2, \ldots, n_m, k_1, k_2, \ldots, k_{m_1}, p, q) = E(n_\mu, k_\nu, p, q)$, $(n_k \leq j_p$, $k = 1, \ldots, m$, множество точек $x \in E$ удовлетворяющих условиям:

А) $t_k(x) \in H_p^{(n_k)}$;

Б)для объема Δ единичного параллелепипеда на $t(x)$ имеем: $\Delta(x) > 900\sigma m^{m+1}$;

В) $(B = B' \cup B'')$.

Для целых неотрицательных m_1, m_2 таких, что $m = m_1 + m_2$ имеем $B' = B(k_1, k_2, \ldots, k_{m_1})$:

$$\frac{f(x') - f(x)}{|x' - x|} \geq -q/2,$$

для всех x' лучей $t_k(x)$ $(k = k_1, k_2, \ldots, k_{m_1})$, удовлетворяющих условиям $0 < |x' - x| \leq 1/q$; $B'' = B(k_1', k_2', \ldots, k_{m_1}')$:

$$\frac{f(x') - f(x)}{|x' - x|} \leq q/2$$

для всех $x' \in t_k(x)$ $(k = k_1', k_2', \ldots, k_{m_1}')$, $0 < |x' - x| \leq 1/q$, причем как в B', так и в B'' расстояние от x до границы ∂D области D не меньше $2/q$: $\rho(x, \partial D) \geq 2/q$.

Легко видеть, что каждое множество $E(n_\mu, k_\mu', k_\mu'', p, q)$ $(m \leq j_p, k_j \leq m\ m = m_1 + m_2)$ замкнуто. Отсюда следует, что E — множество типа F_σ.

Пусть теперь $\mathrm{Int} E \neq \emptyset$; тогда легко видеть, что в каждой подобласти $d \subset \mathrm{Int} E$ найдется другая область d', которая состоит из точек одного определенного $E(n_\mu, k_\mu', k_\mu'', p, q)$. Мы можем предположить, что d' есть шар диаметра $< 1/q$. Предположим сначало, что $m_2 = 0$ и $m_1 = m$, т. е. для всех направлений $t_k(x)$ $(k = 1, \ldots, m)$ имеем неравенство (водну сторону)

$$\frac{f(x') - f(x)}{|x' - x|} \geq -q/2$$

при $0 < |x' - x| \leq 1/q$ $x' \in t_k(x)$.

В силу леммы 3 существует шаровой конус Q, такой, что параллельный перенесенный конус Q в точку — обозначим его через $Q(x)$ — обладает следующим свойством: любая точка ξ вблизи вершины конуса $Q(x)$ достижима из любой другой точки $x' \in Q(x) \cap d'$: существует ломаная $\xi^{(0)}\xi^{(1)} \ldots \xi^{(s-1)}x'$ принадлежащая выпуклой оболочке лучей $t_k(x)$ $(k = 1, \ldots, m)$ $(\xi^{(0)} = \xi,\ \xi^{(s)} = x)$, такая, что каждое из звеньев есть часть какого-либо луча $t_k(\xi^{(l)})$.

Так как при фиксированной x'

$$\frac{f(x') - f(x)}{|x' - x|} = \frac{f(x') - f(\xi)}{|x' - x|} + \frac{f(\xi) - f(x)}{|x' - x|}$$

и из того, что ξ можно выбрать сколь угодно близкой к x, то достаточно оценить первое слагаемое.

Имеем:

$$\frac{f(x')-f(\xi)}{|x'-x|}=\frac{f(x')-f(\xi^{(s-1)})}{|x'-x|}+\frac{f(\xi^{(s-1)})-f(\xi^{(s-2)})}{|x'-x|}+\ldots+$$
$$+\frac{f(\xi^{(1)})-f(\xi)}{|x'-x|}=\frac{f(x')-f(\xi^{(s-1)})}{|x'-x|}\frac{x'-\xi^{(s-1)}}{|x'-x|}+\ldots+$$
$$+\frac{f(\xi^{(1)})-f(\xi)}{|x'-x|}\frac{\xi^{(1)}-\xi}{|x'-x|}\geq -q/2\left[\sum_{k}^{s-1}|\xi^{(k+1)}-\xi^{(k)}|\right]/|x'-x|.$$

По лемме 2 можем считать, что числитель написанной дроби ограничен сверху числом $3\sqrt{m}|x'-x|+r$, где $r=|\xi-x|$. Следовательно,

$$\frac{f(x')-f(x)}{|x'-x|}\geq -q/2(3\sqrt{m}),$$

для всех точек x' конуса $Q(x)$.

Аналогично, в случае когда $m_1=0$ мы показали бы, что для точек конуса $Q(x)$ имеет место неравенство

$$\frac{f(x')-f(x)}{|x'-x|}\geq -q/2(3\sqrt{m}),$$

Пусть теперь $m_1\neq 0$, $m_2\neq 0$.

В этом случае в каждой точке $x\in d'$ репер $t(x)=\{t_1(x),\ldots,t_m(x)\}$ заменим на другой репер $t'(x)$, в котором некоторые t'_k направлены противоположно t_k; именно, если на t_k имеет место неравенство (20), заменяем на $t'_k=-t_k$, на котором, следовательно, будет выполняться неравенство (19). Но тогда снова применимы предыдущие оценки, показывающие, что в каждой точке $x\in d'$ контингенция графика Г функции f не содержит некоторого конуса. Но тогда отсюда и следует утверждение теоремы.

Теперь докажем одну теорему, принадлежащую одномерному анализу

Т е о р е м а. *Пустъ m_ε для некоторого $\varepsilon=\varepsilon_0$ является открытым (непустым) множеством. Тогда все m_ε при $\varepsilon\leq\varepsilon_0$ совпадают между собой $m_{\varepsilon_0}\equiv m_\varepsilon$, а потому $m_{x_0}=\bigcap_{\varepsilon>0}\overline{m}_\varepsilon=\overline{m}_{\varepsilon_0}$, и следовательно функция f недифференцируема в этой точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим сначала m_ε, и кроме того m'_ε:

$$m_\varepsilon=\{(f(x+h)-f(x))/h, 0<|h|\leq\varepsilon\},$$

$$m'_\varepsilon=\{(f(x+h)-f(x))/h, 0<|h|<\varepsilon\}.$$

Итак, пусть проекция графика функции f на соответствующую ось $O\xi$ есть интервал (α, β). Рассмотрим произвольное $\varepsilon < \varepsilon_0$, и $m_{\varepsilon_0} = m_\varepsilon \cup m_{[\varepsilon,\varepsilon_0]}$, где $m_{[\varepsilon,\varepsilon_0]} = \{(f(x_0+h) - f(x_0))/h, \varepsilon \leq |h| \leq \varepsilon_0\}$ и следовательно является связным компактом, а потому некоторым отрезком $[\alpha', \beta']$, явно принадлежащим (α, β). Отсюда следует, что часть интервала (α, β), вне $[\alpha', \beta']$ принадлежит m_ε, и они являются непересекающимися интервалами. Учитывая связности m_ε, можно сделать вывод о том, что $[\alpha', \beta']$, т. е. $m_{[\varepsilon,\varepsilon_0]}$, тоже принадлежит m_ε. Тогда $m_{\varepsilon_0} = m_\varepsilon \cup m_{[\varepsilon,\varepsilon_0]} = m_\varepsilon$, т. е. они совпадают.

Если все m_ε $\varepsilon < \varepsilon_0$, совпадают с m_{ε_0}, то $m_{x_0} = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{m}_\varepsilon = \overline{m}_{\varepsilon_0} = [\alpha, \beta]$, где $\alpha \neq \beta$. Значит функция f недифференцируема в этой точке.

Легко видеть, с другой стороны, что для дифференцируемой функции множества m_ε и m'_ε, могут быть различными не открытыми связными множествами. Во всяком случае, это утверждение показывает, что знание структуры множеств m_ε, т. е. фактически структуры множеств конечных разностных отношений (что естественно, не известно было в каком-то смысле) позволяет говорит о дифференцируемости или недифференцируемости функции. Легко видеть, что эта теорема переносится и на многомерный случай, в частности для случая комплексной функции и множеств

$$M_\varepsilon = \{(f(z+h) - f(z))/h, 0 < |h| \leq \varepsilon\}.$$

Все это имеет место, конечно, лишь в случае, когда в определении M_ε значение модуля h может равняться ε. Легко видеть, например, что для аналитических функций $f(z)$ множества M_ε всегда есть замкнутая область с выколотой точкой (для достаточно малых ε).

Часть 2

Внутренние отображения и их приложения

Глава 7

Локальная степень отображения

Здесь мы обобщаем оказавшееся нам полезным ранее понятие локальной степени на случай плоских отображений. Основным инструментом для этого нам послужит фундаментальная группа, введенная в науку еще Пуанкаре.

В качестве приложения мы доказываем знаменитую теорему об инвариантности области.

1. Поверхность $\Sigma(z_0)$

Так мы назовем риманову поверхность функции $w = \mathrm{Ln}(z - z_0) = \ln|z - z_0| + i\mathrm{Arg}(z - z_0)$, одна из моделей которой, как известно, возникает следующим образом: берем счетное множество одинаковых экземпляров плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль некоторого луча с начальной точкой z_0; учитывая положительное направление вращения вокруг z_0, отметим нижний и верхний "берега"l^- и l^+ разреза l. Занумеруем эти экземпляры Σ_n числами $n = ..., -2, -1, 0, 1, .2, ...$, и наконец, для каждого n склеим нижний берег l_n^- n-го экземпляра ("листа") Σ_n с верхним берегом l_{n+1}^+ листа Σ_{n+1}. Для возникающей бесконечнолистной поверхности $\Sigma(z_0)$ определим ее естественное отображение (проекцию) p на "проколотую"плоскость $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$:

$$p : \Sigma(z_0) \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\};$$

именно, каждой точке $z \in \Sigma_n \setminus \{z_0\} \subset \Sigma(z_0)$ ставим в соответствие точку из $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ с тем же аффиксом z (Рис. 12).

Из этого определения следует, что для каждой точки $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ существует окрестность $U(z)$ (в нашем случае можно взять круг радиуса $|z - z_0|$), такая, что точки $\{\tilde{z}_n\} = p^{-1}(z)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ обладают окрестностями $\tilde{U}(\tilde{z}_n) \subset \Sigma(z_0)$ со следующими свойствами:

1) $p\,|_{\tilde{U}(\tilde{z}_n)}$ — гомеоморфизм окрестности $\tilde{U}(\tilde{z}_n)$ на $U(z)$ для каждой точки $\tilde{z} \in p^{-1}(z)$;

2) $\bigcup\limits_n \tilde{U}(\tilde{z}_n) = p^{-1}(U(z))$;

3) для $\tilde{z}_n \neq \tilde{z}_m$ имеем: $\tilde{U}(\tilde{z}_n) \cap \tilde{U}(\tilde{z}_m) \neq \emptyset$.

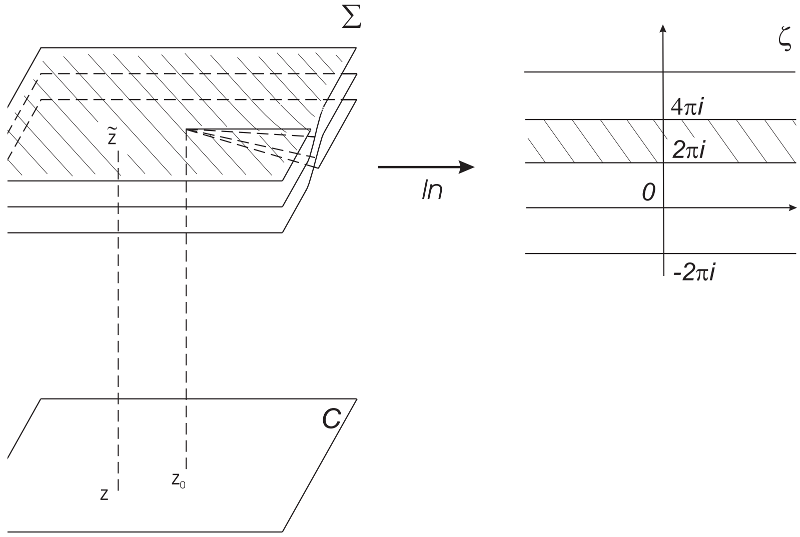

Рис. 12

Отображение p с подобными свойствами называется накрытием (или проекцией); $\Sigma(z_0)$ называется накрывающей (в данном случае даже так называемой универсальной накрывающей) поверхностью для проколотой плоскости $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Вторым не менее важным свойством поверхности $\Sigma(z_0)$ является то, что на ней многозначная функция $\mathrm{Ln}(z - z_0)$ оказывается однозначной; точнее, если в некоторой точке $z' \in \Sigma(z_0)$ зафиксировать какое-то из значений

$$\mathrm{Ln}(z' - z_0) = \ln|z' - z_0| + i(\arg(z' - z_0) + 2\pi n) \ (n = 0, \pm1, \pm2, ...),$$

то непрерывным продолжением мы сможем определить $\mathrm{Ln}(z-z_0)$ как однозначную функцию уже на всей поверхности $\Sigma(z_0)$. Легко видеть, что отображение $\zeta = \mathrm{Ln}(z - z_0)$ гомеоморфно (и конформно) отображает поверхность $\Sigma(z_0)$ на всю конечную ζ-плоскость (если угодно, это еще одна модель универсальной накрывающей для проколотой плоскости).

Если для какого-либо пространства W отображения $f : W \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ и $\tilde{f} : W \to \Sigma(z_0)$ связаны соотношением $p \circ \tilde{f} = f$, то скажем, что $\tilde{f}$ поднимает отображение f, или $\tilde{f}$ является накрывающим для

f. Существование накрывающего отображения равносильно возможности замкнуть диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \Sigma(z_0) \arrow[d, "p"] \\ W \arrow[r, "g"'] & \mathbb{C}\setminus\{z_0\} \end{tikzcd}$$

до коммутативной

$$\begin{tikzcd} & \Sigma(z_0) \arrow[d, "p"] \\ W \arrow[ur, "\tilde f"] \arrow[r, "g"'] & \mathbb{C}\setminus\{z_0\} \end{tikzcd}$$

Для формулировки основных для нас здесь утверждений введем несколько понятий.

О п р е д е л е н и е. Непрерывное отображение ориентированного отрезка $I = [0, 1]$ в пространство Z назовем путем в Z и обозначим

$$\alpha : I \to Z \text{или} t \to \alpha(t)\ (t \in I).$$

При этом точки $a = \alpha(0)$, $b = \alpha(1)$ называются соответственно началом и концом пути α.

Два пути $\alpha_0(t)$ и $\alpha_1(t)$ в пространстве Z с общими концами $a = \alpha_0(0) = \alpha_1(0)$ и $b = \alpha_0(1) = \alpha_1(1)$ называются гомотопными (в Z), если существует непрерывное отображение (гомотопия); $\alpha(t, s) : I \times I \to Z$ ($I \times I$ — квадрат $[0 \le t \le 1; 0 \le s \le 1]$) такое, что

$$\alpha(t, 0) = \alpha_0(t),\ \alpha(t, 1) = \alpha_1(t),\ \alpha(0, s) = a,\ \alpha(1, s) = b.$$

Другими словами, пути α_0 и α_1 гомотопны, если существует непрерывное отображение квадрата $I \times I$ в Z, при котором "горизонтальные"граничные стороны $s = 0$ и $s = 1$ переходят соответственно в пути α_0, α_1, а "вертикальные"$t = 0$, $t = 1$ стягиваются в a, b.

Ниже мы приведем общую теорему о существовании накрывающих отображений (она требует понятия фундаментальной группы); здесь же мы сформулируем некоторые ее частные случаи, причем применительно к нашему отображению $p : \Sigma(z_0) \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

1. Накрывающее отображение существует, если $W = I$; точнее, пусть $\alpha(t) : I \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ — путь с концами $a = \alpha(0)$, $b = \alpha(1)$, и $\tilde{a} \in \Sigma(z_0)$ — произвольная точка над a. Тогда существует единственный путь $\tilde{\alpha}(t) : I \to \Sigma(z_0)$ с концами $\tilde{a}$ и $\tilde{b} = \tilde{\alpha}(t)$ такой, что $p \circ \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$.

2. Если пути $\alpha_0(t)$ и $\alpha_1(t)$ в $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ с общими концами a, b гомотопны, то их накрывающие пути $\tilde{\alpha}_0$ и $\tilde{\alpha}_1 \subset \Sigma(z_0)$, выходящие из одной точки $\tilde{a}$, имеют общую и вторую концевую точку $\tilde{b}$, причем $\tilde{\alpha}_0$ и $\tilde{\alpha}_1$ также гомотопны (но уже на $\Sigma(z_0)$).

3. Накрывающее отображение существует, если W есть замкнутая плоская область, граница которой есть непрерывная кривая, точнее, если $\overline{G}$ — такая область и $f : \overline{G} \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ — непрерывно, $a \in \overline{G}$ – какая-либо точка и $\tilde{a} \in \Sigma(z_0)$ — произвольная точка над $f(a)$. Тогда существует единственное отображение $\tilde{f} : \overline{G} \to \Sigma(z_0)$ такое, что $\tilde{f}(a) = \tilde{a}$ и $p \circ \tilde{f} = f$.

Все эти утверждения можно перефразировать следующим образом:

1) на любом пути $\alpha(t)$, не проходящем через точку z_0, можно определить однозначную ветвь логарифма $\mathrm{Ln}(z - z_0) = \mathrm{Ln}(\alpha(t) - z_0)$;

2) если пути α_0 и α_1 гомотопны (в $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$) и в начальной их точке зафиксировано значение $\mathrm{Ln}(z - z_0)$, то значения соответствующих ветвей логарифма, определенных (в силу 1) на каждом из этих путей, в (общей в силу 2) конечной их точке совпадают;

3) если в замкнутой области $\overline{G} \subset \mathbb{C}_\zeta$, граница которой есть непрерывная кривая, функция $z = f(\zeta)$ не принимает значения z_0, то в этой области можно определить однозначную ветвь функции $\mathrm{Ln}(f(\zeta) - z_0)$.

2. Порядок кривой относительно точки

Пусть путь $L \subset \mathbb{C}$ задан отображением $f : I \to L$ с начальной и конечной точками $a = f(0)$, $b = f(1)$; пусть z_0 — произвольная точка, не принадлежащая L. Поднятие пути L на поверхность $\Sigma(z_0)$ дает путь $L_1 \subset \Sigma(z_0)$ с концами $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ ($p(\tilde{a}) = a$, $p(\tilde{b}) = b$) и разность (так называемая угловая функция)

$$\mathrm{Im}[\mathrm{Ln}(\tilde{b} - z_0) - \mathrm{Ln}(\tilde{a} - z_0)] = F(f, z_0),$$

как легко видеть, не зависит от поднятия L, т. е. от выбора определенного значения $\mathrm{Arg}(z - z_0)$ в некоторой точке $z \in L$.

Из этого определения сразу следует непрерывная зависимость функции $F(f, z_0)$ от z_0. Пусть теперь путь L замкнут, т. е. $a = b$. Это означает, что соответствующие точки $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ на $\Sigma(z_0)$ лежат одна над другой, т. е. в этом случае угловая функции $F(f, z_0)$ оказывается целочисленным кратным 2π. Следовательно, для любой точки $z_0 \neq L$ определено целое число $\nu(f, z_0) = \nu(L, z_0) = \frac{1}{2\pi}F(f, z_0)$, зависящее только от отображения f и от точки z_0.

Определение. Число $\nu(f, z_0) = \nu(L, z_0)$ называется порядком отображения f (или замкнутой кривой L) относительно точки z_0.

Ясно, что если порядок $\nu(f, z_0)$ определен для точки z_0, то он определен и для всех точек, достаточно близких к z_0, причем в силу непрерывности и целочисленности функции $\nu(f, z_0)$ для всех z_0', достаточно близких к z_0,

$$\nu(f, z_0') = \nu(L, z_0') = \nu(L, z_0) = \nu(f, z_0).$$

Отсюда следует, что для всех точек z_0, принадлежащих одной и той же компоненте дополнения $\mathbb{C}\backslash L = \mathbb{C}\backslash f(I)$, функция $\nu(f, z_0)$ принимает одно и то же значение. В самом деле, если z_0 и z_0' принадлежат одной компоненте $g \subset \mathbb{C}\backslash L$, то их можно соединить ломаной, принадлежащей g; для всех точек z' этой ломаной функция $\nu(f, z')$ определена и, следовательно, — вследствие своей непрерывности и целочисленности — сохраняет постоянное значение. Поэтому $\nu(f, z_0) = \nu(f, z_0')$, что и требовалось.

Из приведенных ниже, в §3, гл. IX, теорем о накрывающем отображении легко следует, что порядок $\nu(f, z_0)$ не меняется при любой гомотопии отображения f, не задевающей точки z_0 — для этого достаточно поднять весь квадрат гомотопии этого отображения (а квадрат — область с непрерывной границей!) на поверхность $\Sigma(z_0)$. Отсюда следует также непрерывность функции $\nu(f, z_0)$ по совокупности своих переменных.

Отсюда же легко следует часто применяемая теорема Руше ("Дама с собачкой"):

Теорема Руше. *Если на L заданы две функции $f(t)$ и $g(t)$, причем $|g(t)| < |f(t) - z_0|$, то $\nu(f + g, z_0) = \nu(f, z_0)$.*

(Т. е. сколько оборотов вокруг далекой точки сделает Дама (f), столько же сделает и крутящаяся у ее ног собачка (g)).

Дадим, наконец, другое определение порядка $\nu(f, z_0)$, которое (или подобное ему) обычно и приводится как основное; эквивалентность его с приведенным выше будет очевидной.

Пусть $z = f(t)$, $t \in I$, — параметрическое представление замкнутой кривой L. Так как $f(t) \neq z_0$ при всех t, то существует $\rho > 0$ такое, что $|f(t) - z_0| > \rho$ на всем I. В силу равномерной непрерывности отрезок I можно разбить на конечное число сегментов $[t_k, t_{k+1}]$ таких, что $|f(t) - f(t_k)| > \rho$ при $t \in [t_k, t_{k+1}]$,(или любое другое подобное условие, при котором образ отрезка $[t_k, t_{k+1}]$ принадлежал бы области однозначности каждой ветви $\mathrm{Arg}[f(t) - z_0]$). Комплексное число

$$w_k = \frac{f(t_{k+1}) - z_0}{t(t_k) - z_0}$$

имеет положительную вещественную часть, так как $|w_k - 1| < 1$. Поэтому существует единственное значение ν_k числа $\arg w_k$, для которого $-\frac{\pi}{2} < \nu_k < \frac{\pi}{2}$.Тогда

$$\nu(f, z_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_k \nu_k.$$

Отметим еще, что замкнутую кривую можно определить и как отображение окружности с очевидными изменениями в предыдущих определениях и построениях.

Докажем теперь важную формулу, представляющую собой некоторое обобщение уже упоминавшегося нами принципа аргумента из теории функций и которое мы назовем свойством аддитивности порядка кривой $\nu(L, z_0)$.

Пусть D — (многосвязная) область, граница которой есть объединение конечного числа простых замкнутых ломаных: L_0 — "внешний"граничный контур, а L_k $(k = 1, 2, ..., k_0)$ — "внутренние", причем эти контуры могут иметь и общие точки. Ориентируем их все положительным образом. Тогда имеет место

Теорема 1. *Если функция* $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ *не принимает значение* z_0, *то*

$$\nu(L_0, z_0) = \sum_{k=1}^{k_0} \nu(L_k, z_0).$$

Доказательство. Вспомогательными разрезами (которые, по теореме Урысона [1], можно считать прямолинейными) превратим область D в (односвязную) область D_0, граница которой, очевидно, есть непрерывная кривая. Поэтому в силу § 1 в ней можно определить однозначную ветвь функции $\mathrm{Ln}(f(z) - z_0)$, а это означает, что общее приращение ее вдоль всей проходимой по обычным правилам ориентированной границы ∂D_0 равно нулю. При этом на разных берегах проведенных разрезов, возможно, будут определены и несовпадающие значения логарифма, но их приращения вдоль этих разрезов совпадают, а так как каждый из них проходится дважды в противоположных направлениях, то эти приращения взаимно уничтожаются. Остаются лишь контуры L_0 и L_k $(k = 1, 2, ..., k_0)$, для которых получим

$$\nu(L_0, z_0) - \sum_{k=1}^{k_0} \nu(L_k, z_0) = 0,$$

а это равносильно доказываемому равенству. Теорема доказана.

3. Произведение путей

Определение 1. Произведение $\alpha_1\alpha_2$ двух путей $\alpha_1 : t \to \alpha_1(t)$, $\alpha_2 : t \to \alpha_2(t)$ определим лишь для случая, когда конец пути α_1 совпадает с началом пути α_2; в этом случае путь $\alpha_1\alpha_2$ определяется отображением $\alpha : t \to \alpha(t)$, где

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t) & \text{для } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \\ \alpha_2(2t-1) & \text{для } t \in \left[\frac{1}{2}, 0\right]. \end{cases}$$

Другими словами, $\alpha_1\alpha_2$ возникает при последовательном прохождении сначала пути α_1, а затем α_2.

Определение 2. Обратным к пути $\alpha : t \to \alpha(t)$ называется тот же путь α, но проходимый в обратном направлении, точнее, $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$.

Будем теперь рассматривать пути α в фиксированной области $D \subset \mathbb{C}$, т. е. рассматривать отображения $\alpha : I \to D$.

В §1 определено понятие гомотопии для путей. Легко показать, что отношение гомотопности рефлексивно, симметрично и транзитивно. Поэтому множество всех путей с общими концами распадается на классы, каждый из которых объединяет все гомотопные между собой пути; эти классы мы назовем гомотопическими.

Гомотопность путей α_0 и α_1 будем записывать так: $\alpha_0 \sim \alpha_1$.

Назовем два пути $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ эквивалентными, если они отличаются монотонно возрастающей заменой переменной $t = t(\tau) : I \to I$, т. е. если $\alpha_1(t(\tau)) = \alpha_2(\tau)$. Эквивалентные пути гомотопны между собой: соответствующее отображение квадрата $I \times I$ имеет вид

$$(t, s) \to \alpha_1((1-s)\tau + st(\tau)).$$

Отсюда следует, что гомотопический класс пути определяется не особенностями его "уравнения", а порядком прохождения его точек.

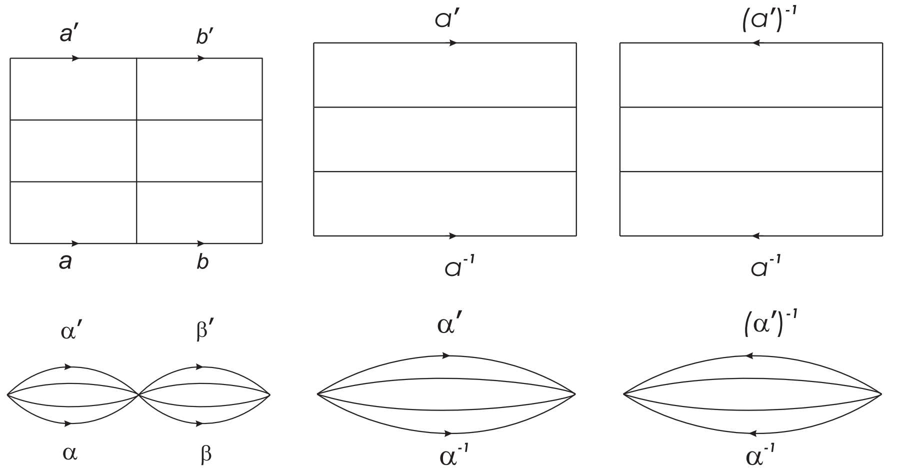

Рис. 13

Докажем, например, что гомотопический класс простой дуги определяется дугой, рассматриваемой как точечное множество, и выбором одной из ее концевых точек в качестве начальной. Пусть отображения f и g определяют эту дугу. Тогда $\tau = f^{-1}g$ есть гомеоморфизм отрезка $I = [0, 1]$ на себя и из наших условий следует, что $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$. Но тогда $\tau(t)$ есть строго возрастающая функция и равенство $g = f\tau$ доказывает эквивалентность (а значит, и гомотопность) путей f, g.

Практическое значение полученного вывода заключается в том, что при решении гомотопических задач вид отображения для простой дуги не играет большой роли и здесь достаточно указать ее начальную точку.

Аналогичные соображения показывают, что гомотопический класс простой замкнутой кривой определяется указанием начальной точки и положительным направлением вдоль кривой. В свою очередь положительное направление этой кривой определяется указанием начальной и конечной точек некоторой частичной ее (простой) дуги, даже не содержащей начальной точки самой кривой.

4. Фундаментальная группа

Заметим сначала, что операции произведения и обращения путей переносятся на гомотопические классы этих путей, так как очевидно, что если $\alpha \sim \alpha'$ и $\beta \sim \beta'$, то и $\alpha\beta \sim \alpha'\beta'$, и $\alpha^{-1} \sim \alpha'^{-1}$ (Рис. 13).

Произведение путей определено нами не во всех случаях. Но если мы ограничимся множеством замкнутых (но направленных) путей, начинающихся и заканчивающихся в одной и той же точке $z_0 \in D$, то такие пути мы всегда можем перемножать. В этом множестве есть единица e — это постоянный путь $e(t) \equiv z_0$ при всех $t \in I$.

Далее, произведение гомотопических классов указанных замкнутых путей ассоциативно, так как, хотя (замкнутые) кривые $(\alpha\beta)\gamma$ и $\alpha(\beta\gamma)$ как отображения не совпадают, но переводятся одна в другую монотонной заменой параметра, т. е. они эквивалентны (значит, и гомотопны). Имеется единичный элемент, обозначаемый 1,—- гомотопический класс постоянного пути $e : e(t) \equiv z_0$, $t \in I$. Имеем $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = 1$, $\alpha\alpha^{-1} = 1$. Последнее равенство доказывается построением соответствующей гомотопии

$$\alpha(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{для } 0 \le t \le \frac{1-s}{2}, \\ \alpha(1-s) & \text{для } \frac{1-s}{2} \le t \le \frac{1+s}{2}, \\ \alpha(2-2t) & \text{для } \frac{1+s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Здесь гомотопия пути $\alpha\alpha^{-1}$ осуществляется только по телу самого пути α. Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Гомотопические классы замкнутых (направленных) путей с общей начальной (и конечной) точкой z_0 относительно операции перемножения образуют группу.*

Эта группа обозначается через $\pi(D, z_0)$ и называется фундаментальной группой области D относительно начальной точки z_0.

Мы покажем сейчас, что фундаментальная группа, рассматриваемая как абстрактная, не зависит от выбора начальной точки $z_0 \in D$. Пусть $z_1 \in D$ — другая начальная точка. Проведем некоторый путь ω, идущий из z_1 в z_0. Каждому замкнутому пути α из z_0 поставим в соответствие замкнутый путь $\alpha' = \omega\alpha\omega^{-1}$ из z_1. Легко видеть, что гомотопический класс пути α' зависит только от гомотопического класса пути α'; поэтому определено отображение $\alpha' \to \omega\alpha\omega^{-1}$ гомотопических классов. Это отображение сохраняет произведение, так как $\omega\alpha\omega^{-1}\omega\beta\omega^{-1} = \omega(\alpha\beta)\omega^{-1}$. Оно взаимно однозначно, так как из $\alpha' \sim \omega\alpha\omega^{-1}$ следует $\alpha \sim \omega^{-1}\alpha'\omega$, наконец, оно есть отображение на, так как $\omega^{-1}\alpha'\omega$ переходит в α'.

Полученный нами изоморфизм ω_* между $\pi(D, z_0)$ и $\pi(D, z_1)$ зависит от выбора вспомогательного пути ω. Если вместо ω взять другой вспомогательный путь ω_1 то отображение $\alpha \to \omega\alpha\omega^{-1}$ заменится отображением

$$(1) \qquad \alpha \to \omega_1\alpha\omega_1^{-1} = \omega_1\omega^{-1}(\omega\alpha\omega^{-1})\omega\omega_1^{-1} = (\omega_1\omega^{-1})\omega\alpha\omega^{-1})(\omega\omega_1)^{-1},$$

т. е. для того чтобы из прежнего изоморфизма ω_* получить изоморфизм (1), нужно трансформировать все элементы группы $\pi(D, z_1)$ одним и тем же элементом $\omega_1\omega^{-1} \in \pi_1(D, z_1)$.

Итак, имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 3. *Всякий путь ω, идущий из z_1 в z_0, определяет изоморфизм $\omega_* : \pi(D, z_0) \to \pi(D, z_1)$. Этот изоморфизм зависит лишь от гомотопического класса пути ω (гомотопия относительно неподвижных концов z_1 и z_0). Сам же изоморфизм между $\pi(D, z_0)$ и $\pi(D, z_1)$ определяется лишь с точностью до внутренних автоморфизмов группы $\pi(D, z_0)$ (или $\pi(D, z_1)$).*

Если $\pi(D, z_0)$ — абелева группа, то все указанные здесь изоморфизмы совпадают.

Абстрактная группа $\pi(D)$, которая изоморфна всем группам $\pi(D, z_0)$, называется фундаментальной группой области D.

Рассмотрим теперь непрерывное отображение $f : D \to D'$, $D' \subset \mathbb{C}_w$, где $f(z_0) = w_0$. Каждый путь $\alpha(t)$ в D переходит в путь $f(\alpha(t))$ в D', причем произведение переходит в произведение, а гомотопные пути — в гомотопные. Другими словами, имеем такую теорему.

Т е о р е м а 4. Каждое отображение $f : D \to D'$ индуцирует гомоморфизм $f^* : \pi(D, z_0) \to \pi(D', w_0)$ и для любого $g : D' \to D'' : (gf)_* = g_* f_*$.

Последнее утверждение легко следует из первого.

Наконец, пусть $f : D \to D'$ есть гомеоморфизм, т. е. существует непрерывное отображение $f^{-1} : D' \to D$ такое, что $ff^{-1} = f^{-1}f = id$. Тогда $(f^{-1}f)_* = f_*^{-1} f_* = 1$. Отсюда следует, что $(f^{-1})_* = (f_*)^{-1}$, т. е. f_* есть изоморфизм между группами $\pi(D, z_0)$ и $\pi(D', w_0)$. Таким образом, справедлива теорема:

Т е о р е м а 5. *Фундаментальная группа области есть ее топологический инвариант.*

5. Примеры

Может случиться так, что фундаментальная группа области сводится к единичному элементу. В этом случае каждые два пути с одинаковыми концами гомотопны, или, что то же, любой замкнутый путь стягиваем в этой области в точку.

О п р е д е л е н и е. Область $D \subset \mathbb{C}$ называется односвязной, если ее фундаментальная группа тривиальна, т. е. содержит лишь единичный элемент.

Пример 1. Плоскость $\mathbb{C}$ односвязна.

Выбирая начало координат $z = 0$ за начальную точку, рассмотрим произвольный замкнутый путь $\alpha(t)$, $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$. Гомотопия $(t, s) \to (1 - s)\alpha(t)$ переводит его в постоянный путь $e(t) \equiv 0$.

Этот же прием доказывает односвязность полуплоскости, звездных областей, открытого и замкнутого кругов.

Несколько труднее доказывается следующее утверждение: область $D \subset \mathbb{C}$ односвязна тогда и только тогда, когда ее граница ∂D связна (или пуста). Например, любая жорданова область или, более общо, область с непрерывной границей, односвязна.

Отметим еще, что в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, это утверждение уже не имеет места.

Пример 2. Фундаментальная группа плоскости $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ с выкинутой точкой изоморфна бесконечной циклической группе $\mathbb{Z} \equiv \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$.

Возьмем $z_0 = 1$ как начальную точку замкнутых путей; гомотопический класс единичной окружности с представлением $t \to e^{2\pi it}$ обозначим через α.

Прежде всего ясно, что каждый замкнутый путь из $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ центральной проекцией переводится в некоторый (гомотопный ему) путь β на $|z| = 1$. В силу равномерной непрерывности каждый такой путь β можно записать в виде $\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n$, где каждое β_k не содержит либо точки $z_0 = 1$, либо точки $z = -1$.

Легко видеть, что β_k гомотопно одной из дуг окружности с теми же концами; мы предположим эту гомотопию выполненной и сохраним обозначение β_k для получившихся дуг окружности.

Для $2 \leq k \leq n$ обозначим через σ_k одну из дуг окружности $|z| = 1$ от 1 до начальной точки β_k. Полагая $\sigma_1 = \sigma_{n+1} = e(t) \equiv 1$ $(t \in I)$, получаем

$$\beta \sim (\sigma_1\beta_1\sigma_2^{-1})(\sigma_2\beta_2\sigma_3^{-1}) \ldots (\sigma_n\beta_n\sigma_{n+1}^{-1}).$$

Каждый множитель $\sigma_k\beta_k\sigma_{k+1}^{-1}$ состоит из трех дуг; разбирая все возможные здесь случаи, легко найти, что он гомотопен 1, α или α^{-1}. Тем самым β гомотопно некоторой степени α^m.

Осталось показать, что α^m не гомотопно 1 при $m \neq 0$. Для этого заметим, что порядок $\nu(\alpha^m, 0)$ замкнутого пути α^m относительно $z = 0$ как раз равен m, а так как он не зависит от допустимой гомотопии (см. §1) и $\nu(e, 0) = \nu(1, 0) = 0$, то $\alpha^m \sim 1$ лишь при $m = 0$, что и заканчивает наше доказательство.

Пример 3. Фундаментальная группа следующих областей также изоморфна $\mathbb{Z}$:

1) открытое круговое кольцо, $r < |z| < R$;
2) замкнутое круговое кольцо, $r \leq |z| \leq R$;
3) открытый круг с выкинутым центром, $0 < |z| < R$;
4) замкнутый круг с выкинутым центром, $r < |z| \leq R$.

Приведенное в предыдущем примере доказательство остается в силе и в этих случаях, хотя в случаях 1 и 3 можно сослаться на то, что открытое кольцо и проколотый круг гомеоморфны, и что фундаментальная группа ест топологический инвариант.

Фактически в примере 2 доказано, что фундаментальная группа окружности есть $\mathbb{Z}$; но, во-первых, нам это не потребуется, а вовторых, и фундаментальную группу мы определяли лишь для областей на плоскости.

6. Локальная степень отображения

Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — непрерывное отображение области D.

Оп,ределение. Скажем, что f изолированно в точке $z_0 \in D$, если существует окрестность ее $U(z_0)$, в которой $f(z) \neq f(z_0)$ при $z \neq z_0$.

Мы определим для этого случая степень отображения f в точке z_0. Обозначим через G проколотый круг $0 < |z - z_0| < r$, содержащийся в $U(z_0)$. По предположению f отображает G в $\mathbb{C} \setminus \{w_0\} = G'$. Но тогда по теореме 3 f определяет гомоморфизм $f_* : \pi(G) \to \pi(G')$. Так как обе группы бесконечные циклические, то этот гомоморфизм легко описать. Образующими α и β этих групп выберем окружности $z - z_0 = (a - z_0)^{2\pi it}$ и $w - w_0 = (b - w_0)^{2\pi it}$, где $a \in G$ и $b = f(a) \in G'$. Тогда $f^*(\alpha) = \beta^n$; это равенство полностью определяет наш гомоморфизм, так как $f_*(\alpha^m) = \beta^{nm}$. Если $n = 0$, то вся группа $\pi(G)$ отображается в единичный элемент из $\pi(G')$. Если $n \neq 0$, мы получаем изоморфное отображение $\pi(G)$ на подгруппу $\pi(G')$ с образующей β^n, так как $f_*(\alpha^m) = \beta^{nm} = 1$ лишь при $m = 0$

Число n называется степенью отображения f в точке z_0 и обозначается через $\gamma(f, z_0) = \gamma(z_0)$. Степень, очевидно, не зависит от выбора G и точки $a \in G$.

Из доказательства, проведенного в примере 2 §5, легко следует, что степень $\gamma(f, z_0)$ есть не что иное, как порядок $\nu(f\,|_\alpha, w_0)$ образа окружности α относительно точки $w_0 = f(z_0)$. Если задано отображение g области, содержащей точку $w_0 = f(z_0)$, причем в этой точке

g изолированно, то $\gamma(gf, w_0) = \gamma(f, z_0)\gamma(g, w_0)$; это следует из того, что сквозной гомоморфизм соответствующих фундаментальных групп есть композиция $g_* f_*$ (теорема 4 §5).

Это мультипликативное свойство степени становится достаточно очевидным, если иметь в виду, что степень совпадает с порядком соответствующей кривой (в образе).

В качестве примера можно взять линейный гомеоморфизм $w = f(z) = Az + B\bar{z} + C$ плоскостей z, w; в этом случае, как легко видеть, $|A| \neq |B|$, якобианом $J(f)$ отображения f является $|A|^2 - |B|^2$ и, наконец, локальная степень $\gamma(z)$ в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ одна и та же и равна $\operatorname{sgn} J(f) = \pm 1$.

Поэтому если некоторое отображение $f : D \to \mathbb{C}$ дифференцируемо в точке $z_0 \in D$ и $f(z) - f(z_0) = f_z(z - z_0) + f_{\bar{z}}(\bar{z} - \bar{z}_0) + o(z - z_0)$, причем $J(f, z_0) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 \neq 0$, то, так как для достаточно малого $|z - z_0|$ линейная часть превосходит остаточный член $o(z - z_0)$, из теоремы Руше следует, что и в этом случае $\gamma(z_0) = \operatorname{sgn} J(f)$.

Предположим, что $f : D \to \mathbb{C}$ есть гомеоморфизм области D на $f(D)$. Пусть для некоторой точки $z_0 \in D$ точка $w_0 = f(t_0)$ является внутренней точкой образа $f(D)$. Так как тождественное отображение имеет степень 1, то $\gamma(f)\gamma(f^{-1}) = 1$, поэтому $\gamma(f) = \pm 1$. Ниже мы покажем, что в наших условиях $f(D)$ всегда открыто, следовательно, степень $\gamma(z) = \pm 1$ в каждой точке $z \in D$.

Но пока докажем, без предположения открытости $f(D)$, следующую теорему.

Т е о р е м а 6. *Если $f : D \to \mathbb{C}$ — гомеоморфизм, то степень $\gamma(z)$ сохраняет постоянное значение во всех точках $z \in D$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольной точки $z_0 \in D$ пусть α, β и G, G' те же, что и при определении степени. Если $f(\alpha) \sim \beta^{\gamma_0}$ в G, то $\gamma(f(\alpha), f(z_0)) = \gamma_0$.

Пусть z_1 — произвольная точка внутри окружности α. Рассмотрим отрезок $z_0 z_1$ ее радиуса. В силу гомеоморфизма f образ этого отрезка не пересекает (жордановой) кривой $f(\alpha)$, следовательно, он весь принадлежит одной компоненте дополнения $\mathbb{C} \setminus f(\alpha)$. потому $\gamma(f(\alpha), f(z_0)) = \gamma_0$.

Для определения степени $\gamma(z_1)$ используем проколотый круг G_1 с центром z_1 лежащий внутри α, плоскость $G_1' = \mathbb{C} \setminus f(z_1)$ и образующие α_1, β_1. Так как f — гомеоморфизм, то центральная проекция из точки z_1 дает допустимые гомотопии $\alpha_1 \sim \alpha$ в G_1 и $f(\alpha_1) \sim f(\alpha)$ в G_1' поэтому $\nu(f(\alpha_1), f(z_1)) = \nu(f(\alpha), f(z_1)) = \nu(f(\alpha), f(z_0)) = \gamma_0$ т. е. $f(\alpha_1) \sim \beta_1$ в G_1'.

Мы показали, что степень $\gamma(z)$ постоянна в некоторой окрестности каждой точки области D, а так как D связна, то она постоянна всюду в D.

Теорема доказана.

7. Инвариантность области

Нам необходимо будет следующее утверждение. Если P — замкнутое нигде не плотное множество на z-плоскости, то на оси x найдется множество e всюду второй категории такое, что для каждой прямой $x = x_0$, $x_0 \in e$, пересечение $P \cap \{x = x_0\}$ (замкнуто и) нульмерно.

Докажем здесь одну общую теорему, для которой это утверждение явится очевидным частным случаем.

Определение. Вещественная непрерывная функция $F(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, называется в области D нигде не постоянной, если каждый ее уровень $F_c = \{x : F(x) = c\}$ нигде не плотен в D.

Теорема 7. *Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ заданы произвольная непрерывная нигде не постоянная функция $F(x)$, $m \le F(x) \le M$, $-\infty \le m$, $M \le \infty$, $m = \inf F$, $m = \sup F$, и произвольное нигде не плотное множество $P \subset D$. Тогда на $[m, M]$ существует подмножество e всюду второй категории такое, что для $c \in e$ пересечение $P \cap F_c$ будет нигде не плотным на уровне $F_c = \{F(x) = c\}$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать теорему для замкнутых P.

Рассмотрим кубильяж Q_1 пространства $\mathbb{R}^n$, состоящий из замкнутых единичных кубов. Затем, заменяя каждый из этих кубов на 2^n равных кубов с длиной 1-ребра $1/2^n$, получаем кубильяж Q_2 и т. д. Занумеруем все кубы, принадлежащие полученной последовательности $\{Q_j\}$:

$$q_1, q_2, \dots, q_k, \dots \tag{2}$$

Предположим теперь, что теорема неверна. Тогда найдется множество не первой категории e' значений функции $F(x)$, для каждого из которых пересечение $P \cap F_c$ содержит открытую порцию F_c; для подходящего куба q_k из (2) $P \cap F_c$ содержит порцию F_c, вырезаемую из последнего кубом q_k. Все значения c, для которых это имеет место, образуют множество e_k. По построению

$$e' = \bigcup_k e'_k.$$

Так как e' не первой категории (на $[m, M]$), то найдется отрезок $[a, b] \subset [m, M]$, на котором одно из e'_k будет плотным. По построению полный прообраз $F^{-1}(e'_k)$ на q_k принадлежит P. Он всюду плотен в q_k как прообраз плотного множества при непрерывном и нигде не постоянном отображении F. Но тогда $P \supset q_k$, т.е. P содержит внутренние точки, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие доказывает ее.

Теорема об инвариантности области. *Гомеоморфный образ области есть область.*

Доказательство. Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — гомеоморфизм. Прежде всего докажем, что образ $D_1 = f(D)$ содержит внутренние точки. Тогда из теоремы 6 § 5 и замечания перед ней будет следовать, что степень $\gamma(z)$ в каждой точке $z \in D$ равна ± 1, а отсюда и выведем ниже, что образ каждой точки D будет внутренней точкой для $D_1 = f(D)$.

Предположим, что D_1 не содержит внутренних точек.

Возьмем произвольный замкнутый круг $Q : |z - z_0| \leq r$ в области D. По условию его образ $Q_1 = f(Q)$ есть нигде не плотный континуум на w-плоскости. Можно предположить, что проекция Q_1 на ось Ou есть отрезок $[u_1, u_2]$. По теореме 1 найдем u_0, $u_1 < u_0 < u_2$ такое, что $Q_1(u_0) = Q_1 \cap \{u = u_0\}$ нульмерно и, очевидно, разбивает Q_1. Его прообраз $f^{-1}(Q_1(u_0))$ в силу гомеоморфизма f также нульмерен в круге Q, но которого он не может разбивать. Противоречие.

Завершит доказательство

Лемма. *Если отображение $f : D \to \mathbb{C}$ изолированно и некоторая точка $z_0 \in D$ переходит в граничную точку $w_0 \in D_1 = f(D)$, то $\gamma(z_0) = 0$.*

Доказательство. Возьмем круг $U(z_0)$, $\overline{U} \subset D$; ясно, что w_0 является граничной и для $\overline{U}_1 = f(\overline{U})$.

Образ окружности ∂U есть компакт $f(\partial U)$, не содержащий точки $w_0 = f(z_0)$, поэтому найдется круг $V(w_0)$, такой, что $\overline{V}(w_0) \cap f(\partial U) = \emptyset$. Но w_0 является граничной точкой компакта $\overline{U}_1$ поэтому внутри $V(w_0)$ найдется точка w_1, внешняя для $\overline{U}_1$; первую точку пересечения радиуса $w_1 w_0 \subset V$ с $\overline{U}_1$ обозначим через $\tilde{w}$. Из построения следует, что в каждой точке $\tilde{z} \in f^{-1}(\tilde{w})$ степень $\gamma(\tilde{z}) = \gamma(f(\partial U), \tilde{w}) = 0$: невозможен полный обход вокруг $\widetilde{W}$ для образов достаточно малых окружностей с центром $\tilde{z}$; степень же в силу изолированности f не зависит от выбора любой такой окружности.

Так как, по построению, точки $\tilde{w}$ и $\tilde{w}_0$ принадлежат одной компоненте дополнения $\mathbb{C} \setminus f(\partial U)$, то и $0 = \gamma(f(\partial U))$. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

На рис. 14 представлен один из нетривиальных случаев условий этой леммы, где $B(x+iy) = x+i|y|$, f — гомеоморфизм, сохраняющий полуокружность и начало координат, $w = \xi^2$.

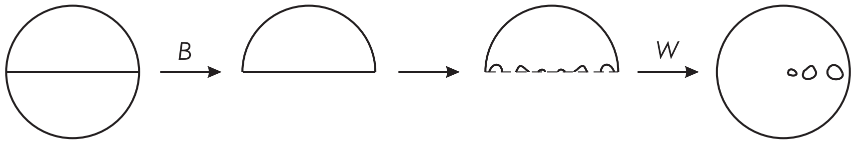

Рис. 14

8. Независимость функций и нульмерные отображения

Если нам задана на плоскости нигде не постоянная непрерывная функция $F(x, y)$, то стало уже привычным с равенством $F(x, y) = c$ увязывать представление о некоторой кривой на плоскости; и, в самом деле, это замкнутое множество, по определению, нигде не плотно и наше первое представление о нем в первом приближении можно считать приемлемым.

Но, конечно, при ближайшем рассмотрении мы убеждаемся, что и не таким простым может оказаться уровень функции F. В самом деле, пример — функция расстояния до произвольного нигде не плотного замкнутого множества P; более того [2], подобную функцию можно взять бесконечно дифференцируемой на плоскости.

Теперь начнем с определений.

Определение 1. Две функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, определенные в замкнутой области $\overline{D}$ плоскости (x, y), назовем зависимыми в $\overline{D}$, если существует нигде на плоскости (u, v) не постоянная непрерывная функция $F(u, v)$, такая, что $F[u(x, y), v(x, y)] \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Из самого определения сразу следует, что зависимость функций u, v равносильна тому, что образ области $\overline{D}$ при отображении $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ — нигде не плотен на плоскости (u, v).

Напомним только, что в случае непрерывной диференцируемости u, v и F, необходимым и достаточным условием зависимости u, v является обращение в нуль Якобиана

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

в $\overline{D}$; в этом случае образ $\overline{D}$ не только нигде не плотен, но и (жордановой) меры нуль.

Определение 2. Две функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, определенные в области G плоскости (x, y), называются зависимыми в этой области, если они зависимы в любой замкнутой подобласти в G.

Важным для нас будет следующее определение:

Определение 3. Непрерывное отображение $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ области $D \subset \mathbb{C}_z$ назовем нульмерным, если прообраз $f^{-1}(w)$ каждой точки $w \in \mathbb{C}_w$ нульмерен: $\dim f^{-1}(w) = 0$.

Если отображение $f : D \to \mathbb{C}$ нульмерно, то нетрудно доказать, что образ K_1 любого замкнутого круга $K \subset D$ содержит внутренние точки.

Действительно, предположим, что для некоторого K его образ $K_1 = f(K)$ есть нигде не плотный континуум диаметра $d > 0$. Пусть $w_0 \in K_1$ — произвольная точка и при $r < \frac{d}{2}$ множество $C_1(r) = K_1 \cap \{|w - w_0| = r\}$ нульмерно (см. §7). Так как отображение f нульмерно, то и прообраз $C(r) = f^{-1}[C_1(r)]$ нульмерен, а потому он не разбивает круга K, т. е. $K \setminus C(r)$ связно; с другой стороны, образ этого связного множества есть явно связное множество $K_1 \setminus C_1(r)$, чего не может быть в силу непрерывности f.

Итак, если отображение $f = u + iv$ нульмерно в области D, то образ <u>каждой</u> подобласти в D не может быть нигде не плотным, другими словами функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, так сказать, <u>абсолютно</u> независимы всюду в D.

Оказывается [3], что при нульмерном отображении произвольных метрических пространств размерность их подмножеств не понижается. Но повыситься может: например, канторово совершенное множество отображается непрерывно на компакт любой размерности.

Приведем некоторые следствия из доказанного нами.

1. Гомеоморфный образ плоского нигде не плотного компактного множества также нигде не плотен: ведь гомеоморфизм есть нульмерное отображение.

2. Степень гомеоморфизма области равна ± 1. В самом деле, в §6 было показано, что если гомеоморф плоской области D содержит внутренние точки, то простыми средствами доказывается это утверждение.

3. Нульмерный образ $f(D)$ <u>всей</u> области D есть резидуальное подмножество в своем замыкании $\overline{f(D)}$, и, тем более, в себе.

В самом деле, образ $f(D)$ содержит плотное в нем, а потому и в $\overline{f(D)}$, открытое на плоскости множество, а дополнением к нему в $\overline{f(D)}$ служит множество, замкнутое и нигде не плотное в $\overline{f(D)}$.

Отметим некоторые примеры нульмерных отображений:

1. Если u, v гладкие, то — произвольные отображения $f = u + iv$ с неравным нулю якобианом $J(u, v)$.

2. Отображение вида $f = \varphi(x) + i\psi(y)$, где φ, ψ — нульмерные (§4, гл. V) функции одного переменного.

Для нас одним из главных примеров явятся непостоянные аналитические функции в области D.

Подчеркнем еще, что все приведенные нами понятия и утверждения о них очевидным образом переносятся на случай функций любого числа переменных.

9. Открытые отображения

О п р е д е л е н и е. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ для метрических X, Y называется открытым, если образ каждого открытого в X множества является открытым в Y.

Это — очередной наряду с нульмерным важный класс отображений в топологии.

Введенное понятие легко локализируется: именно, отображение $f : X \to Y$ назовем открытым в точке $x_0 \in X$, если образ каждой окрестности $U(x_0)$ содержит некоторую окрестность $V(y_0)$ образа $y_0 = f(x_0)$. При этом, в общем случае, образ U сам может не быть открытым. Тем не менее (как это было в гл. I) для открытости f в целом необходимо и достаточно открытости ее в каждой точке.

Опять-таки — что касается плоских отображений — и здесь наиболее важными примерами открытых отображений явятся для нас непостоянные аналитические функции.

Мы хотим в дальнейшем увязать два введенных понятия: нульмерные отображения и открытые.

Чуть позже мы убедимся, что произвольное нульмерное отображение $f : D \to \mathbb{C}$ плоских областей во многих точках оказывается открытым. Но "взаимности"здесь не возникает.

Прежде всего, нетрудно привести пример открытого, но не нульмерного отображения. Именно, рассмотрим сначала отображение плоскости $\mathbb{C}$

$$w = f(z) = x + ix\mathrm{arctg}y \ (z = x + iy, \ w = u + iv)$$

при котором вся ось Oy стягивается в точку (а вне ее f — локальный гомеоморфизм) и в целом образ C представляет пару вертикальных углов, ограниченных прямыми $v = \pm\frac{\pi}{2}u$. Взяв теперь дополнительное отображение хотя бы вида $w_1 = w^3$, мы достигнем открытости и в точках оси Oy.

Обычный метод сгущения особенностей подсказывал бы здесь мысль, что для открытого отображения стягиваться в точку могло бы не очень большое по мощности множество континуумов.

Но оказалось, что это не так. Именно, построено [4] открытое отображение расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на плоскость, при котором <u>каждой</u> точке в образе соответствует невырожденный континуум — равномерно больших диаметров! И еще к этому примеру — подавляющее большинство этих континуумов принадлежит к классу так называемых наследственно неразложимых [5], не содержащих, в частности, ни одной простой дуги.

В общем, наверное, неудивительно, что в построении нужного здесь контрпримера должны были возникнуть какие-то монстры.

Мы уже указывали выше, что зависимость функций u, v в случае их гладкости равносильна обращению якобиана $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ в нуль. С другой стороны, если функции u, v осуществляют нульмерное отображение

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y),$$

то они "абсолютно"независимы всюду в области. Так как в определенном смысле роль якобиана (вернее, его знака) в общем случае отображения $f = u + iv$ играет понятие локальной степени, то не слишком удивительной явится следующая теорема:

Теорема 8. *Если отображение $f = u + iv$ в области D нульмерно, то локальная степень $\gamma(z)$ не может существовать всюду и равняеться нулю.*

Доказательство. В открытом подмножестве из $f(D)$ возьмем некоторый круг $V(w)$, $\overline{V} \subset f(D)$, с центром w; и пусть $U(z)$, $\overline{U} \subset D$ — компонента прообраза $f^{-1}(V)$, содержащая точку z, для которой $f(z) = w$. Из нульмерности f следует, что при достаточно малом диаметре V такая компонента U найдется, причем в круге произвольно малого радиуса.

Легко видеть, что для границы ∂U и окружности ∂V имеем включение: $f(\partial U) \subset \partial V$; в самом деле, если бы существовала точка

$z' \in \partial U$, такая, что $w' = f(z') \in \mathrm{Int}V$, то из определения U следовало бы, что $z' \in \mathrm{Int}U$.

Возьмем замыкание $\overline{U}$ области U. Его дополнение относительно расширенной плоскости $\mathbb{C}_z$ есть некоторое открытое множество; так как $\overline{U}$ — континуум, то все компоненты этого множества односвязны. неограниченную компоненту из них — т. е. содержащую точку $z = \infty$ — обозначим через H; легко видеть, что граница ∂H (это — континуум) есть часть границы ∂U.[1] Из построения следует, что образ $f(U)$ лежит внутри круга V, образ $f(H \cap D)$ — вне его, а образ $f(\partial H)$ границы ∂H есть некоторая дуга l окружности ∂V.

Возьмем две произвольные точки $w_1, w_2 \in l$ с непересекающимися круговыми окрестностями K_1, K_2; произвольные соответствующие им точки на границе ∂H обозначим через z_1, z_2 и с такими кругами k_1, k_2, что $f(k_1) \subset K_1$ и $f(k_2) \subset K_2$.

Внутри k_1, k_2 выберем точки z_1', z_2' из U и точки z_1'', z_2'' из $H \cap D$; первые соединим в U ломаной λ', а вторые — в $H \cap D$, ломаной λ''.

Наконец, соединим внутри k_1 точки z_1', z_1'', а внутри k_2 точки z_2', z_2'' ломаными так, чтобы в результате возникла простая замкнутая ломаная λ.

Так как образ λ' лежит внутри круга V, а образ λ'' — вне его, то из построения следует, что найдется точка w_0 из $f(U)$, порядок которой относительно кривой $f(\lambda)$ отличен от нуля: $\gamma(f(\lambda), z_0, f(z_0)) \neq 0$, $z_0 \in U$, $w_0 = f(z_0)$.

Пусть (λ) — область в D, ограниченная построенной нами ломаной λ. Если теперь в каждой точке $z \in f^{-1}f(z_0)$, лежащей внутри λ, степень $\gamma_\varepsilon(z) = 0$ при $\varepsilon < \varepsilon(z)$, то применив построение леммы §1 гл. IX, мы заключим множество $f^{-1}f(z_0) \cap (\lambda)$ в конечную систему замкнутых многоугольников $U_p = U(z_p)$ $(p = 1, 2, \dots, p_0)$, $z_p \in f^{-1}f(z_0)$, попарно не пересекающихся и таких, что диаметр U_p меньше $\varepsilon(z_p)$; следовательно, $\gamma(\partial U_p, f, f(z_0)) = 0$. Но тогда и

$$\gamma(\lambda, f, f(z_0)) = \sum_{p=1}^{p_0} \gamma(\partial U_p, f, f(z_0)) = 0,$$

что противоречит доказанному выше.

Теорема доказана.

Из нее сразу вытекает, что для нульмерного отображения $f : D \to \mathbb{C}$ существует всюду плотное в D множество точек z, в каждой из которых $\gamma_\varepsilon(z) \neq 0$ для бесконечной последовательности (зависящей

[1] Отметим лишь, что континуум ∂H может оказаться совместной границей даже счетного множества различных областей [6].

от z) значений ε, стремящихся к нулю; в частности, в этих точках отображение f открыто.

Оказывается, что указанное множество не просто плотно, но и резидуально[2].

В следующей главе мы переносим на случай плоских отображений все теоремы первой главы. Возможность такого переноса убеждает в том, что внутренние отображения являются естественным (и в определенном смысле полным) аналогом строго монотонных функций на прямой. В конце главы мы приводим также обобщение одного известного результата [7] о существовании корня k-й степени ($|k| > 1$) из комплексной функции.

---

[2]См. Дополнение...

Глава 8

Внутренние отображения

1. Лемма о простой дуге

Ранее мы познакомились с нульмерными отображениями и их свойствами и слегка затронули отображения открытые. Здесь мы соединим оба этих качества и убедимся в том, что возникает прекрасный гибрид.

Что ж, требуется определение:

Определение. Отображение $f : D \to \mathbb{C}$ называется внутренним (по Стоилову), если оно открыто и нульмерно.

И, конечно же, как и ранее, примерами таких отображений явятся в первую очередь непостоянные аналитические функции. Оказывается, что в определенном смысле этими примерами и придется ограничиться: каждое внутреннее отображение есть топологическая деформация некоторой аналитической функции; это верно не только для случая плоских областей D, но и для произвольных двумерных многобразий (которые могут оказаться и не ориентируемыми) — это и есть главная теорема Стоилова. Но нам в таком глобальном смысле эта теорема не потребуется; для нас достаточным будет его утверждения о локальном обращении внутреннего отображения. Этим мы и займемся.

Прежде всего нам потребуется в дальнейшем одна важная лемма о простой дуге.

Рассмотрим произвольную точку $z_0 \in D$, ее (круговую) окрестность $U(z_0)$ и множество $D_{z_0} = f^{-1}f(z_0)$. $D_{z_0} \subset D$ — замкнуто и нульмерно, причем очевидно, что $z_0 \in D_{z_0}$. Пусть $l \subset U(z_0)$ — произвольная простая замкнутая кривая, содержащая z_0 внутри, и $l \cap D_{z_0} = \emptyset$. Образ жордановой области δ, ограниченной кривой l, есть открытое множество $\Delta = f(\delta)$, содержащее $w_0 = f(z_0)$ внутри; так как $\rho(w_0, f(l)) > 0$, то найдется окрестность $V(w_0)$, не пересекающаяся с кривой $f(l)$. Компонента δ_0 из $f^{-1}(V)$, содержащая точку z_0, очевидно, обладает следующими свойствами: 1) она компактна в $U(z_0)$, а значит, в D и 2) образ границы $\partial\delta_0$ принадлежит границе области

$\Delta_0 = f(\delta_0)$; в этом случае говорят, что f замкнуто в δ_0. Область в D, обладающую этими свойствами, временно назовем нормальной.

Фактически мы доказали, что для внутреннего отображения $f : D \to \mathbb{C}$ в любой окрестности каждой точки $z_0 \in D$ найдется нормальная область, содержащая z_0 внутри.

Так же легко доказывается, что если δ_0 — нормальная область, $\Delta_0 = f(\delta_0)$ и Δ_0' — компактная подобласть в Δ_0, то все компоненты $f^{-1}(\Delta_0')$, принадлежащие δ_0, также нормальны (и совокупность их непуста), причем этих компонент конечное число. Действительно, если бы $O = f^{-1}(\Delta_0')$ содержало бесконечное множество компонент δ_j $(j = 1, 2, \ldots)$, то из того, что $f(\delta_j') = \Delta_0'$, и равномерной непрерывности f в $\bar{\delta}_0$, следовало бы, что диаметры δ_j',- больше некоторого $\varepsilon > 0$. В силу теоремы о сходимости множеств [1] можно считать, что области $\bar{\delta}_j$ сходятся к некоторому континууму $\bar{\delta}'$. Так как в любой окрестности каждой точки из $\bar{\delta}'$ находятся точки всех δ_j' начиная с некоторого j, то $\bar{\delta}'$ — нигде не плотный континуум и $\bar{\delta}' \subset \partial O$. Но $f(\bar{\delta}_j) = \overline{\Delta}_0'$, поэтому и $f(\bar{\delta}') = \overline{\Delta}_0'$, что противоречит соотношениям

$$f(\bar{\delta}') \subset f(\partial O) = \partial\Delta_0' = \overline{\Delta}_0' \setminus \Delta_0'.$$

Докажем следующую лемму.

Лемма (о простой дуге). *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — внутреннее отображение, $\delta_0 \subset D$ — нормальная область и $\Delta_0 = f(\delta_0)$. Тогда каждой простой дуге $L = \overline{w_0 w} \subset \Delta_0$ и каждой точке $z_0 \in f^{-1}(w_0)$ соответствует простая дуга $l = \overline{z_0 z} \subset \delta_0$, выходящая из точки z_0 и такая, что $f(l) = L$, и отображение $f\,|_l$ есть гомеоморфизм.*

Доказательство. Пусть дуга L определена гомеоморфизмом $\varphi : I \to L$, $I \equiv [0, 1]$. Разделим отрезок I на 2^n равных частей и введем обозначение $w_n^p = \varphi\left(\frac{p}{2^n}\right)$ $(p = 0, 1, \ldots, 2^n;\ w_n^0 = w_0, \ldots, w_n^{2^n} = w)$. Заключим каждую дугу $w_n^{p-1} w_n^p \subset L$ $(p = 1, 2, \ldots, 2^n)$ внутрь замкнутой области $\Delta_n^p \subset \Delta_0$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $\Delta_n^p \cap \Delta_n^q = \emptyset$ при $|p - q| \geq 2$;

2) $\overline{\Delta}_{n+1}^p \subset \Delta_n^{p'}$, если аналогичное включение выполняется для соответствующих дуг на L;

3) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup\limits_{p}^{2^n} \overline{\Delta}_n^p \right) = L$.

Для построения областей Δ_n^p достаточно взять круг радиусом $\rho_n < \frac{1}{2} \min \rho(w_n^p, w_n^q)$ и заставить его центр описывать дугу L; при этом следует выбрать $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Множество областей Δ_n^p, соответствующих одному значению n, назовем цепочкой $\{\Delta_n^p\}$. Каждую цепочку $\{\Delta_n^p\}$ сопоставим с цепочкой областей $\{\delta_n^p\}$, $\delta_n^p \subset \delta_0$, где δ_n^p — компонента из $f^{-1}(\Delta_n^p)$.

Строим по индукции. Пусть $n = 1$. Тогда имеем две области D_1^1 и D_1^2, покрывающие L. Пусть d_1^1 — компонента из $f^{-1}(D_1)$, содержащая точку z_0; так как d_1^1 нормальна, то $f(d_1^1) = D_1^1$. Поэтому d_1^1 содержит точки из $f^{-1}(w_1^2)$; обозначим через z_1^1 одну из них: $f(z_1^1) = w_1^1$. Из (конечного) числа компонент $f^{-1}(D_1^2)$ выберем компоненту d_1^2, содержащую z_1^1.

Пусть для некоторого n построена цепочка $\{d_n^p\}$ $(p = 1, 2, \ldots, 2^n)$, образом которой является $\bigcup\limits_p^{2^n} D_n^p$; построим $\{d_{n+1}^p\}$ $(p = 1, 2, \ldots, 2^{n+1})$. Через d_{n+1}^1 обозначим компоненту $f^{-1}D_{n+1}^1$, содержащую точку z_0; область d_{n+1}^1 нормальна, поэтому $f(d_{n+1}^1) = D_{n+1}^1$. Выберем произвольно точку $z_{n+1}^1 \in d_{n+1}^1$, для которой $f(z_{n+1}^1) = w_{n+1}^1$ и из (конечного) числа компонент $f^{-1}(D_{n+1}^2)$ ту, которая содержит z_{n+1}^1; обозначим ее d_{n+1}^2. Продолжая это построение, мы и придем ко всей цепочке $\{d_{n+1}^p\}$, очевидно, принадлежащей предыдущей цепочке $\{d_n^p\}$.

Множество $l_n = \bigcup\limits_p^{2^n} \overline{d_n^p}$ есть связный компакт; поэтому мы имеем монотонно убывающую последовательность $\{l_n\}$, $l_n \supset l_{n+1}$, континуумов, пересечение которых $l = \bigcap\limits_n l_n$ следовательно, также есть либо континуум, либо одна точка. Покажем, что l — континуум.

В самом деле, пусть w — концевая точка дуги L. Тогда каждое множество $l_n = \bigcup\limits_p^{2^n} \overline{d_n^p}$ содержит хотя бы одну точку z_n, для которой $f(z_n) = w$. Любая предельная точка z последовательности $\{z_n\}$ удовлетворяет условию $f(z) = w$ и принадлежит l; следовательно, l не может состоять из одной точки.

Из условия 3) следует, что $f(l) \subset L$, а так как $f(l)$ связно и содержит концевые точки w_0 и w дуги L, то $f(l) = L$. Для того чтобы доказать, что $f\,|_l$ — гомеоморфизм, в силу компактности l достаточно установить, что $f\,|_l$ — взаимно однозначно.

Пусть $z_1, z_2 \in l$, $z_1 \neq z_2$, для которых $f(z_1) = f(z_2) = w'$. Из условия 1 вытекает, что при любом n области d_n^p, содержащие z_1 и z_2, либо соседние, либо совпадают. В обоих случаях замыкания их образуют континуум $\varkappa_n$, причем последовательность $\{\varkappa_n\}$ монотонно убывает; следовательно, $\varkappa = \bigcap_n \varkappa_n$ также есть континуум, притом невырожденный, так как содержит различные точки z_1, z_2. С другой стороны, $f(\varkappa) \subset \bigcap\limits_{v} f(\varkappa_n) = w'$ что противоречит нульмерности f. Лемма доказана.

2. Изолированность внутреннего отображения

Нашей целью здесь будет доказать изолированность любого внутреннего отображения (см. [2]). Докажем сначала лемму:

Лемма. *В области δ_0 из любой точки $z_0 \in f^{-1}(w_0)$ выходит лишь конечное число дуг l, удовлетворяющих условиям леммы §1.*

Доказательство. Заметим сначала, что различные такие дуги l_1 и l_2, исходящие из одной и той же точки z_0, не могут иметь второй общей точки z', если они не совпадают между z_0 и z'. В противном случае части дуг l_1 и l_2 образовали бы простую замкнутую кривую, ограничивающую жорданову область d; образ $f(\bar{d})$ был бы компактной областью с границей, состоящей из части простой дуги L, что невозможно.

Поэтому если в δ_0 существует бесконечное множество различных дуг $l_1, l_2, ..., l_n, ...$, выходящих из точки z_0, то их концы $z_1, z_2, ..., \ldots z_n, \ldots$ должны быть различными. Из нормальности δ_0 следует, что все предельные точки этих концов лежат внутри δ_0; пусть ζ_o — одна из них. Очевидно, что $f(\zeta_0) = w$.

Построим внутри δ_0 два замкнутых непересекающихся круга $K(z_0)$ и $K(\zeta_0)$ с центрами z_0 и ζ_0 и радиуса $\varepsilon > 0$. Найдутся две дуги $l_1 = z_0 z_1$, $l_2 = z_0 z_2$, начальные точки которых принадлежат $K(z_0)$. Соединив z_1 и z_2 внутри $K(\zeta_0)$ дугой λ, получим, что кривая $l_1 \cup l_2 \cap \lambda$ или часть ее является простой замкнутой кривой, определяющей жорданову область d. Образ $f(d)$ этой области есть область, граница которой принадлежит кривой $L \cup f(\lambda)$. Так как $\varepsilon > 0$ может быть взято произвольно малым, то можно предположить, что кривая $f(\lambda)$ лежит в заранее заданной окрестности точки w. Но тогда граница (ограниченной) области $f(d)$ не может содержаться в $L \cup f(\lambda)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 1. *Внутреннее отображение $f : d \to \mathbb{C}$ является изолированным.*

Доказательство. Пусть, вопреки утверждению, для некоторой точки $w_0 \in \mathbb{C}$ (замкнутое и нульмерное) множество $f^{-1}(w_0)$ имеет предельную точку z_0 и пусть $\delta \subset D$ — нормальная область, содержащая z_0 внутри. Тогда и $w_0 = f(z_0)$ лежит внутри области $\Delta = f(\delta)$.

Выбирая внутри Δ дугу L с концами w_0, w и применяя лемму о простой дуге, построим для каждой точки из $f^{-1}(w_0)$ соответствующие дуги l. Так как z_0 — предельная точка из $f^{-1}(w_0)$, то множество дуг l бесконечно. По лемме настоящего пункта каждая дуга $l = z_0'z_1'$ может пересекаться лишь с конечным числом дуг l; в противном случае, используя отрезки этих дуг l, мы получили бы бесконечное множество дуг, выходящих из одной точки z_0' и соответствующих одной дуге L.

Пусть l_1 — одна из этих дуг, соответствующих L. Существует бесконечное множество дуг l, не пересекающихся с l_1; пусть l_2 — одна из них. Существует бесконечное множество дуг l_1, не пересекающихся ни с l_1 ни с l_2; пусть l_3 — одна из них. Продолжая, получаем последовательность $\{l_n\}$ попарно непересекающихся дуг l_n с одним и тем же (гомеоморфным) образом L. Рассуждая, как при доказательстве той же леммы §1, приходим к противоречию. Теорема доказана.

3. Теорема о локальном обращении внутреннего отображения

Т е о р е м а 2. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — внутреннее отображение. Тогда в любой окрестности каждой точки $z_0 \in D$ существует замкнутая жорданова область $\delta_0 \subset D$, содержащая z_0 внутри, являющаяся нормальной областью и обладающая следующими свойствами:*

1) $f\,|_{\bar{\delta}_0 \setminus z_0}$ есть локальный гомеоморфизм;

2) образ $D_0 = f(\delta_0)$ есть замкнутая жорданова область;

3) существует конечное число n простых дуг, исходящих из точки z_0 и оканчивающихся на границе $\partial\delta_0$, которые разбивают $\bar{\delta}_0$ на n секторов, образы замыканий которых совпадают с $\overline{D}_0 = f(\delta_0)$ и внутри каждого f является гомеоморфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как f изолированно в D, то пусть $U(z_0)$ — окрестность, в которой z_0 — единственная точка из $f^{-1}f(z_0) = f^{-1}(w_0)$[1]. Для нормальной области $\bar{\delta}$, содержащей точку z_0 внутри, рассмотрим образ $\overline{\Delta} = f(\bar{\delta})$; внутри δ возьмем круг $\overline{D}_0$ с центром w_0 и на его граничной окружности $S = \partial D_0$ выберем точку w. Из построения следует, что $f^{-1}(\overline{D}_0)$ содержит в $\bar{\delta}$ одну-единственную компоненту $\bar{d}_0$, которая является нормальной областью.

[1]Будем говорить, что z_0 есть точка единственности отображения f внутри U.

По теореме 1 в $\bar{\delta}'$ существует лишь конечное число точек z_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ прообраза $f^{-1}(w)$ и все они принадлежат границе ∂d_0 области d_0.

Так как $\bar{d}_0$ — нормальная область, то существует исходящая из z_1 простая дуга s_1 с конечной точкой z_2 (которая может и совпадать с z_1) такая, что $f\,|_{s_1 \setminus (z_1 \cup z_2)}$ есть гомеоморфизм на $S \setminus w$. Чтобы убедиться в этом, достаточно разложить S на две взаимно дополнительные дуги $w\tilde{w}$ и $\tilde{w}w$, $\tilde{w} \in S \setminus w$, и применить последовательно два раза лемму о простой дуге.

Предположим, что $z_2 \neq z_1$. Пусть тогда s_2 — дуга, аналогичная s_1, исходящая из z_2, и пусть z_3 — ее конец. Продолжая таким же образом далее, мы получаем не более чем через n шагов простую замкнутую кривую $s \subset d'$. Действительно, из построения и нормальности d' следует, что если какие-либо дуги s_j имеют общую внутреннюю точку, то они совпадают, поэтому две последовательные дуги s_j в окрестности их общего конца имеют его единственной общей точкой. Когда ζ описывает s в некотором направлении, точка $\omega = f(\zeta)$ описывает $m \leq n$ раз S все время в одном и том же направлении. (Чуть ниже мы докажем, что $m = n$).

Пусть $\bar{\delta}$ — замкнутая жорданова область, ограниченная кривой s. Ее образ $f(\bar{\delta})$ есть ограниченная область, граница которой принадлежит окружности S круга D_0; следовательно, $f(\delta) = D_0$ и $f(\bar{\delta}) = \overline{D}_0$, значит, δ — нормальная область. А так как $f^{-1}(D_0)$ содержит единственную компоненту d_0 (внутри δ'), то $\delta \equiv d_0$. В частности, из того что ∂d_0 есть простая замкнутая кривая s и все n точек z_j прообраза $f^{-1}(w)$ должны принадлежать s, следует, что при описании s в некотором направлении образ S описывается n раз, т. е. $m = n$.

Пусть сначала $n = 1$. Покажем, что в этом случае $f\,|_{d_0}$ есть гомеоморфизм. Действительно, в противном случае внутри d_0 существовали бы две точки z_1' и z_2', для которых $f(z_1') = f(z_2') = w'$. Через w_0, w' и w проведем простую дугу $L \subset \overline{D}_0$ так, что $L \setminus w \subset D_0$.

По лемме §1 в $\bar{d}_0$ существуют две простые дуги, исходящие соответственно из z_1' и z_2', которые функцией f гомеоморфно отображаются на дугу $w'w \subset L$, и две аналогичные дуги, исходящие из тех же точек, которые отображаются на дугу $v'w_0$. Действительно, $z_1 \in s$ и z_0 являются точками единственности отображения $f\,|_{d_0}$, т. е. первые две дуги имеют своим концом z_1 а вторые — z_0. Поэтому существует жорданова область $\bar{h}$, ограниченная этими дугами или их частями. Но тогда граница компактной области $f(\bar{h})$ принадлежит L, что невозможно. Следовательно, z_1' должно совпадать с z_2'. С другой стороны, $f\,|_{\partial d_0}$ тоже гомеоморфизм в силу леммы §1 (использованной при построении кривой s) и предположения, что $n = 1$.

Пусть теперь $n > 1$. Обозначим через L радиус $w_0 w$ круга $\overline{D}_0$. Пусть z_1 и z_2 — две точки z_j, а l_1 и l_2 — две простые дуги, исходящие соответственно из z_1 и z_2, гомеоморфно отображающиеся на L. За исключением точек z_1 и z_2, эти две дуги лежат внутри d_0. Это следует из того, что $z_0 \in \bar{d}_0$ — точка единственности f, а дуги l_1, l_2 не пересекают $s = \partial d_0$. Докажем, что эти дуги не имеют других общих точек, кроме z_0.

Действительно, пусть $\tilde{z}$ — их первая точка пересечения при движении, например, вдоль l_1 начиная от z_1. Дуги $z_1\tilde{z}$ и $z_2\tilde{z}$ образуют вместе с каждой из дуг $z_1 z_2$ кривой s жорданову область, содержащуюся в d_0. Если $z \neq z_0$, то одна из этих областей, скажем $\bar{h}$, не содержит z_0. Но $f(\bar{h})$ — компактная область с границей, принадлежащей L и S, поэтому она совпадает с $\overline{D}_0$; в частности, $\bar{h}$ должна содержать точку из $f^{-1}f(z_0)$. Это противоречие доказывает, что $\tilde{z}$ не может отличаться от z_0.

Если теперь z_1 и z_2 — две последовательные точки z_j на s, то замкнутая жорданова область, ограниченная дугами l_1, l_2 и дугой $z_1 z_2 \subset s$, на которой нет других точек z_j, отображается на $\overline{D}_0$ так же, как и указанная выше область $\bar{h}$. При этом внутренность этой области гомеоморфно отображается на круг с разрезом $D_0 \setminus L$, гомеоморфизмы $f\,|_{l_1}$, $f\,|_{l_2}$ отображают l_1, l_2 на L, а (открытая) дуга $z_1 z_2$ (между ее концами) гомеоморфно отображается на $s \setminus w$. Все это доказывается с помощью рассуждений, аналогичных проведенным в случае $n = 1$.

Теорема доказана. Из нее видно, что с топологической точки зрения локальное обращение внутренних отображений осуществляется так же, как обращение аналитических функций.

4. Внутренние отображения и аналитические функции

Отметим следующие выводы, вытекающие из теоремы обращения:

1) внутреннее отображение

$$f : D \to \mathbb{C} \tag{1}$$

является локальным гомеоморфизмом в любой точке $z \in D$, за исключением некоторого множества изолированных точек D;

2) в окрестности этих точек z_0 отображение (17) топологически эквивалентно отображению $w = \zeta^n$, где $n \geq 2$ — целое, т. е. существует гомеоморфизм $z = t(\zeta)$ некоторой окрестности $U(z)$ на круг

$|\zeta| < 1$ такой, что $z_0 = t(0)$ и $w = f[t(\zeta)] = \zeta^n$. Точки z_0 называются точками ветвления отображения f.

Оказывается, что аналитическая характеристика внутренних отображений имеет не только локальный смысл. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если отображение $w = f(z)$ области $D \subset \mathbb{C}_z$ является внутренним, то существует такой гомеоморфизм $z = T(\zeta)$ другой плоской области $\Delta \subset \mathbb{C}_\zeta$ на D, что композиция $f \circ T = f[T(\zeta)]$ есть аналитическая функция в Δ.*

Это — частный случай общей теоремы С. Стоилова, доказанной им в 1928 г. для внутренних отображений $f : V \to \overline{\mathbb{C}}$ произвольных ориентируемых двумерных многообразий V. Из нее следует, что класс внутренних отображений $f : V \to \overline{\mathbb{C}}$ топологически эквивалентен классу аналитических (точнее, мероморфных) функций, определенных на V.

О некоторых обобщениях внутренних отображений и утверждениях о них см. [3], [4].

5. Еще о графике многозначного отображения

Здесь мы докажем недостававшую нам в главе V одну из теорем о связности для случая комплексной функции. Доказательство использует построение, как в лемме Стоилова о простой дуге; поэтому, так сказать, по свежим следам мы и помещаем его в этой главе.

Мы уже знаем, что если, например, для непрерывной действительной функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, одного переменного совокупность $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_x^+ \subset \mathfrak{m}_x^-$ всех производных чисел в каждой точке x связна, то график многозначного отображения $x \to \mathfrak{m}_x$ в плоскости также связен; в частности, если $f(x)$ дифференцируема всюду на $[a, b]$, то график ее производной $f'(x)$ связен. Оказывается, что переход к функциям комплексным резко меняет ситуацию. Например, для дифференцируемой функции $\varphi(t) = t^2 e^{i\frac{1}{t}}$, $t \in [0, 1]$, образ отрезка $[0, 1]$ при отображении $\varphi'(t)$ несвязен.

То же оказывается и при переходе к комплексным функциям на плоскости. Несмотря на то, что в каждой точке $z \in D$ множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ всегда связно, указанная теорема для действительных функций в общем случае и здесь не верна. Вот пример [5]: пусть $\varphi(x)$ — действительная непрерывная функция на отрезке $[-1, 1]$, для которой $\mathfrak{m}_x(\varphi) \subset \{-1, 1\}$ для $x \neq 0$, а $\mathfrak{m}_0(\varphi) = 0$; такие функции легко построить. Положим $f(z) = \varphi(x) + i\varphi(y)$; тогда для $z \neq 0$ и

$\Delta z = |\Delta z| e^{i\alpha}$

$$\left|\frac{\Delta f}{\Delta z}\right| = \left|e^{-i\alpha}\left(\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}\cos\alpha + i\frac{\Delta\varphi(y)}{\Delta y}\sin\alpha\right)\right| = 1,$$

и, следовательно, $\mathfrak{M}_z(f)$ принадлежит единичной окружности $|\zeta| = 1$; в то же время $\mathfrak{M}_0(f) = 0$.

Тем не менее, докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 3. *Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ непрерывная и $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция в области. Тогда*

$$W_\Phi = \{(z, \zeta) : z \in D, \quad \zeta \in \mathfrak{M}_z(f)\}$$

— связное подмножество $\mathbb{C}^2(z, \zeta)$ ($\Phi : z \to \mathfrak{M}_z$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть F — открыто-замкнутое подмножество W_Φ и $\emptyset = F \neq W_\Phi$ и отметим, что оно состоит из целых множеств $\mathfrak{M}_z(f)$. Положим, что $A = \Phi^{-1}(F)$. Из связности D следует, что $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{D \setminus A} \neq \emptyset$. Так как функции f_z и $f_{\bar{z}}$ первого класса Бэра, то сужения $f_z|\mathrm{Fr}(A)$ $f_{\bar{z}}|\mathrm{Fr}(A)$ обладают множеством всюду второй категории точек непрерывности; поэтому найдется точка z_0 их одновременной непрерывности. Поскольку F и $W \setminus F$, а, следовательно, A и $D \setminus A$ удовлетворяют тем же предположениям, можно считать, что $z_0 \in A$, и потому $z_0 \in A \cap \overline{D \setminus A}$.

Множество $A = \Phi^{-1}(A)$ содержит окрестность точки z_0 относительно множества $\mathrm{Fr}(A)$, так как $\Phi|\mathrm{Fr}(A)$ непрерывна в точке z_0 и F — окрестность $\Phi_{z_0}(z_0) = \mathfrak{M}_{z_0}(f)$; поэтому существует число $\varepsilon > 0$ такое, что из условий $z \in \mathrm{Fr}(A)$ и $|z - z_0| < \varepsilon$ следует, что $z \in A$. Пусть z_1 — точка множества $D \setminus A$ такая, что $|z_1 - z_0| < \varepsilon$ (в соответствии о условием $z_0 \in \overline{D \setminus A}$). Следовательно, $z_1 \notin \mathrm{Fr}(A)$, а потому $z_1 \in D \setminus \bar{A}$. Соединим точки z_0 и z_1 отрезком $[z_0, z_1]$. Выберем такой круг K с центром в точке z_1, чтобы $\bar{K} \subset D \setminus \bar{A}$. Перемещаем K вдоль отрезка $[z_0, z_1]$ до первой его точки касания с множеством $\mathrm{Fr}(A)$. Точку касания снова обозначим через z_0.

Из $\mathbb{R}$-диффервнцируемости функции $f(z)$ следует, что множество $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ может быть:

1) окружностью;

2) точкой.

Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ — окружность.

Докажем, что расстояние между множествами $\bigcup\limits_{z \in K} \mathfrak{M}_z(f)$ и $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ равно нулю, и это будет искомым противоречием.

Предположим, что это расстояние отлично от нуля. Тогда, если проектировать множества $\bigcup\limits_{z\in K} \mathfrak{M}_z(f)$ и $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ на плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, то расстояние между их проекциями будет положительно. Заключим окружность $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ в настолько тонкое круговое кольцо T, чтобы оно не пересекалось с $\bigcup\limits_{z\in K} \mathfrak{M}_z(f)$. Легко видеть, что при любом расположении $\bigcup\limits_{z\in K} \mathfrak{M}_z(f)$ и $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$, взяв точку $\zeta_0 \in T$ внутри окружности $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$, либо вне ее, можно добиться того, чтобы для отображения ψ, осуществляемого функцией $w = f(z) - \zeta_0 z = \psi(z)$, внутри K обязательно существуют точки, знак якобиана $\mathfrak{I}_\psi(z)$ в которых противоположен знаку якобиана $\mathfrak{I}_\psi$ в точке z_0. Так как при этом $\mathfrak{I}_\psi(z)$ внутри K нигде не обращается в нуль, то отображение ψ является изолированным и открытым в каждой точке K, т. е. является внутренним отображением круга K. По теореме Стоилова всюду в K знак $\mathfrak{I}_\psi(z)$ постоянен.

Из предыдущего следует, что мы можем считать $\mathfrak{I}_\psi(z)$, $z \in K$, положительным; тогда в точке z_0 якобиан $\mathfrak{I}_\psi(z_0)$ — отрицателен.

Дифференциал отображения ψ в точке z_0 есть линейное отображение с отрицательным определителем, поэтому существует у него два собственных вектора, один — с положительным собственным значением, другой — с отрицательным. Прямую, содержащую первый вектор, обозначим через l^+, прямую, содержащую второй вектор, обозначим через l^-. При этом указанное линейное отображение осуществляет зеркальное отображение относительно прямой l^-. При этом все прямые, параллельные l^-, переходят в себя с обращением ориентации.

В силу того, что $\mathfrak{I}_\psi(z_0)$ граница ∂K круга K переходит в некоторую кривую w-плоскости при отображении ψ, имеющую определенную касательную l в точке $w_0 = \psi(z_0)$. Возможны два случая:

а) l совпадает с l^+;

б) l не совпадает с l^+.

В случае а) выберем пару (достаточно тонких) вертикальных углов V с общей вершиной w_0 и с биссектрисой l. Если круг Δ с центром в точке w_0 достаточно мал,то только один из секторов $\Delta\backslash V$ содержит точки образа $\psi(K)$; обозначим его через Δ'.

В случае б) вертикальные углы V выберем столь тонкими, чтобы они не пересекались с l^+ (за исключением точки w_0), а в остальном такими же,как в случае а).

Выберем круг k_0 с центром в точке z_0, чтобы $\Phi|_{k_0}$ было изолировано, что можно сделать в силу $\mathfrak{I}_\psi(z_0) \neq 0$ Вышеуказанный круг Δ

выберем теперь так, чтобы $\Delta \cap \psi(\partial k_0) \neq \emptyset$. Обозначим через δ компоненту прообраза $\psi^{-1}(\Delta)$, содержащую точку z_0б а через $\delta' = \delta \cap K$. Область δ' может и не быть нормальной областью, т. е. ее образ может не совпадать со всем кругом Δ. Но легко видеть, что $\psi(\delta')$ содержит весь Δ'. В самом деле, образ $\psi(\delta')$ содержит точки круга Δ внутри, причем часть границы $\partial\delta'$ может переходить только в границу $\partial\Delta$, так как при этом дуга $\bar{\delta} \cap \partial K$ (общая граница δ' и K) отображается внутрь углов V, то отсюда следует наше утверждение. В Δ' рассмотрим отрезок $[w_0, w']$ радиуса r, не лежащий на l^+. Докажем, что найдется простая дуга σ, выходящая из точки z_0 и лежащая с концами в Δ' такая, что $\psi(\sigma) = [w_0, w]$ и $\psi|\sigma$ — гомеоморфизм.

Схема доказательства этого факта повторяет доказательство леммы Стоилова о простой дуге. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ построим цепи (Δ_n^ν), $\nu = 0, 1, \ldots, 2^{\nu_n}$, замкнутых кругов Δ_n^ν, покрывающих отрезок $[w_0, w']$.

Именно, цепь Δ_1^ν, $\nu = 1, 2, \ldots, 2^{\nu_1}$ строим следующим образом. Берем произвольный круг $\Delta_1^0 \subset \Delta$, с центром в точке w_0 радиуса $r_0 < 1$ такой, чтобы окружность $\partial\Delta_1^0$ пересекала отрезок $[w_0, w']$ в некоторой точке w''. Отрезок $[w'', w']$ покрываем замкнутыми кругами Δ_1^ν, $\nu = 1, 2, \ldots, 2^{\nu_1}$ так, чтобы

1) $\Delta_1^\nu \cap V \neq \emptyset$, $\nu = 1, 2, \ldots, 2^{\nu_1}$;

2) $\Delta_1^\nu \subset \Delta'$, $\nu = 1, 2, \ldots, 2^{\nu_1}$.

При $n > 1$ цепи (Δ_n^ν) строятся так же, исходя из произвольных кругов (Δ_n^0), с центрами в w_0 и радиусами r_n меньше $\frac{1}{n}$, покрывающие соответственно отрезки $[w^{(n+1)}, w']$ с условиями I) и 2), а также с общими условиями:

3) $\Delta_n^p \cap \Delta_n^q \neq \emptyset$, если $|p - q| \geq 2$, $p, (q) = 1, 2, \ldots, 2^q, (2^p)$;

4) $\Delta_{n+1}^\nu \Delta_n^\nu$, если отрезок, заключенный в Δ_{n+1}^ν, является частью $[w_0, w']$, заключенного в Δ_n^ν, для любого ν и n;

5) когда $n \to \infty$, радиусы $r_n \to 0$.

Каждой цепи (Δ_n^ν) мы поставим в соответствие цепи областей (δ_n^ν) таких, чтобы для каждого $\nu > 0$, δ_n^ν являлся компонентой прообраза $\psi^{-1}(\Delta_n^\nu)$. Для этого сначала Δ_n^0 поставим в соответствие в δ' компоненту δ_n^0, содержащую точку z_0 такую, что $\psi(\delta_n^0) \subset \Delta_n^0$. Она может быть и ненормальной областью, но в ней найдется, по крайней мере, одна точка z_0 такая, что $\psi(z_1) = w_1$, где w_1 — точка отрезка $[w_0, w']$. Множество $\psi^{-1}(w_1)$ замкнуто и компактно в δ_n^0. Окружим каждую $z_1 = \psi^{-1}(w_1)$ кругом γ столь малого радиуса, чтобы $\psi(\gamma)$находилось внутри Δ_n^1, что возможно, так как w_1 лежит внутри этой области и отображение ψ непрерывно. На основании леммы Бореля-Лебега можно выбрать конечное число кругов γ, покрывающих $\psi^{-1}(w_1)$. Тогда областей (Δ_n^1, z_1) будет конечное число. В качестве Δ_n^1 возьмем любую из (Δ_n^1, z_1) и она уже будет нормальной, поскольку лежит в δ'.

С каждым Δ_n^1 проделаем то же самое, что с Δ_n^0, заменив точку w_1 точкой w_2. Таким образом, получим конечное число цепей (δ_n^V), каждая из которых обладает вышеуказанными свойствами. Далее, следуя схеме доказательства леммы Стоилова, приходим к последовательности цепей

$$(\delta_n^1), (\delta_n^2), \dots (\delta_n^V), \dots .$$

каждая и которых заключена во всех предыдущих и содержит все последующие. Множество такой последовательности суть ограниченные континуумы, и пересечения σ этих континуумов есть, как известно, континуум, отличный от точки. Так как цепи Δ_n^V стремятся к $[w_0, w']$ при $n \to \infty$, то $\psi(\sigma) \subset [w_0, w']$ и, таким образом, $\psi(\sigma) = [w_0, w']$. Докажем теперь, что $\psi|\sigma$ — гомеоморфизм. Пусть $z', z'' \in \sigma$ и $z' \neq z''$ такие, что

$$\psi(z') = \psi(z'') = w.$$

В силу условия 2) две области Δ_n^p, Δ_n^q содержат точку w, если $|p - q| \geq 2$ (для одного и того же n), то области δ_n^ν, содержащие z' и z'', либо совпадают, либо соседние. Значит, они всегда образуют континуум c_n, и множества последовательности $\{c_n\}$ вложены одно в другое точно так же, как множество последовательности (δ_n^ν). Пересечение $\bigcap\limits_n c_n = c$ является континуумом, так как оно должно содержать точки z' и z'', которые по предположению различны. Но $\psi(c)$ может быть лишь точкой w, так как $\psi(c_n)$ не имеют, кроме w, других общих точек. Это противоречит свойству внутреннего отображения, при котором континуумы не отображаются в единственную точку.

Но так как, с другой стороны, дифференциал отображения ψ есть линейное отображение с отрицательным определителем, то образ части дуги σ вблизи z_0 расположен по другую сторону от l^+, что невозможно, так как только что было доказано, что $\psi|\sigma$ — гомеоморфизм. Полученное противоречие доказывает теорему в случае, когда $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ — окружность.

В случае, когда $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ является точкой, далекой от $\bigcup\limits_{z\in K} \mathfrak{M}_z(f)$, вводим вспомогательную функцию $w = f(z) - \varepsilon\bar{z}$; при достаточно малом $\varepsilon > 0$ окружность $\mathfrak{M}_{z_0}(w)$ также будет далеко от $\bigcup\limits_{z\in K} \mathfrak{M}_z(f)$ и все сводится к предыдущему.

Пользуясь доказательством теоремы 3, можно доказать более сильное утверждение.

Т е о р е м а 4. *Пусть $f(z)$ — непрерывная и $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция в области $D \subset C_z$ и z_0 — произвольная точка D. Тогда для произвольной точки $\zeta \in \mathfrak{M}_{z_0}(f)$ и произвольного угла S с вершиной z_0 существует последовательность $\{z_n\} \to z_0$, $z_n \in S$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что*

$$\rho(\mathfrak{M}_{z_n}, \zeta) \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Это означает, что для достаточно близких к z_0 точек имеем: $\rho(\mathfrak{M}_z(f), \zeta) > 0$ при $z \in U(z_0) \cap S(z_0)$, где $U(z_0)$ — некоторая окрестность точки z_0.

Ясно, что при любом расположении $\bigcup\limits_{z \in U \cap S} \mathfrak{M}_z(f)$ и $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$, как и выше для некоторой функции вида $w = f(z) - \zeta_0 z = \psi(z)$, можно достичь того, чтобы якобиан $\mathfrak{I}_\psi(z)$ был положителен внутри S и отрицателен в точке z_0. Тогда ψ осуществляет внутреннее отображение $\mathrm{Int}(S)$.

Дифференциал отображения ψ в точке z_0 есть линейное отображение с двумя собственными векторами на прямых l^+ и l^-; он обладает теми же свойствами, что и в теореме 3.

В силу того, что $\mathfrak{I}_\psi(z_0) \neq 0$, образ угла S есть некоторый криволинейный угол w-плоскости, не равный нулю, имеющий в точке $w_0 = \psi(z_0)$ две полукасательные l_1 и l_2.

Возможны два случая:

а) l^+ содержит один из лучей l_1, l_2;

б) l^+ не содержит лучей l_1, l_2.

В случае а) выберем пару достаточно тонких углов V_1, V_2 с общей вершиной в точке w_0 и биссектрисами соответственно l_1 и l_2, чтобы между ними был сектор V', содержащий точки образа $\psi(S)$.

В случав б) выбираем углы V_1, V_2 столь тонкими, чтобы они не пересекались с l^+ за исключением точки w_0 ,а в остальном такими же, как в случае а).

Далее рассмотрим произвольный отрезок $[w_0, w']$ в V', не лежащий на l^+. Легко видеть, что рассуждения при доказательстве предыдущей теоремы проходят и здесь; из них следует, что этому отрезку при отображении ψ соответствует простая дуга σ, выходящая из точки z_0 и лежащая в S и такая, что $\psi|\sigma$ — гомеоморфизм.

Но это снова, как и выше, приводит к противоречию.

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что из теоремы 4 снова следует связность графика многозначного отображения

$$\Phi : z \to \mathfrak{M}_z(f)$$

в пространстве $\mathbb{C}^2(z, \zeta)$.

Глава 9

Топологические теоремы о продолжении внутренних отображений

1. Локальная степень нульмерного отображения

Всюду в этой главе $f : D \to \mathbb{C}$ ($\equiv \mathbb{C}_w$) будет непрерывным и нульмерным отображением плоской области $D \subset \mathbb{C}_0$ ($\equiv \mathbb{C}_z$), при этом указанные плоскости и, значит, все их области будем считать положительно ориентированными.

Пусть g, ($\bar{g} \subset D$) — некоторая жорданова область; точка $w \in \mathbb{C}_w$ называется (f, g)-допустимой, если $w \notin f(\partial g)$.

Определение 1. Порядок кривой $f(\partial g)$ относительно такой точки w назовем степенью отображения f области g в этой точке и обозначим ее через $\Gamma(w, f, g) = \Gamma(w, f)$, т. е.

$$\Gamma(w, f) = \nu(f(\partial g), w).$$

Из свойства аддитивности порядка кривой (теорема 1, гл. VII) легко следует такая теорема.

Теорема (свойство аддитивности степени). *Пусть* $(g_0, g_1, \ldots, g_m)$ *— многосвязная жорданова область, причем* $g_j \subset \mathrm{Int} g_0$ *для всех* $j = 1, 2, \ldots, m$ *и* g_j, g_k *при* $j \neq k$ *не имеют общих внутренних точек. Если точка* $w \in \mathbb{C}_w$ *такова, что* $f^{-1}(w) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} g_j$, *и точка* w *является* (f, g_j)*-допустимой для* $j = 1, 2, \ldots, m$, *то*

$$\Gamma(w, f, g_0) = \sum_{j=1}^{m} \Gamma(w, f, g_j).$$

Пусть теперь $z \in D$ произвольно. Тогда $D_z = f^{-1}f(z)$ замкнуто и нульмерно в D. Выберем в окрестности $U(z, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, определенную открыто-замкнутую (значит, и компактную) часть $Q_z^{(\varepsilon)} \subset D_z$, содержащую z, и пусть $g^{(\varepsilon)} \subset U(z, \varepsilon)$ — жорданова область, граница $\partial g^{(\varepsilon)}$

которой не пересекает D_z и которая отделяет $Q_z^{(\varepsilon)}$ от остальной части $D_z \setminus Q_z^{(\varepsilon)}$ множества D_z.

Определение 2. Степень $\Gamma(f, g^{(\varepsilon)}, f(z))$ отображения области $g^{(\varepsilon)}$ в точке $w = f(z)$ для краткости назовем (не совсем однозначно) ε-степенью отображения f в точке z и обозначим так:

$$\Gamma(f(z), f, g^{(\varepsilon)}) = \Gamma(w, f, g^{(\varepsilon)}) = \gamma_\varepsilon(z).$$

Легко доказать, что так определенная степень зависит лишь от выделенной открыто-замкнутой порции $Q_z^{(\varepsilon)}$ и не зависит от выбора области $g^{(\varepsilon)}$. Действительно, пусть $g_1^{(\varepsilon)}$ — другая жорданова область, для которой $g_1^{(\varepsilon)} \cap D_z = Q_z^{(\varepsilon)}$ и $\partial g_1^{(\varepsilon)} \cap D_z = 0$, $\rho(Q_z^{(\varepsilon)}, \partial g, \partial g_1) = 2\varepsilon_0 > 0$. Заключим $Q_z^{(\varepsilon)}$ в конечное число дисков δ_k $(k = 1, 2, \ldots, k_0)$, диаметры которых меньше ε_0. Тогда для обеих систем областей $g = g^{(\varepsilon)}$, $\{\delta_k\}$ и $g_1 = g_1^{(\varepsilon)}$, $\{\delta_k\}$ выполняются все условия теоремы 1 гл. VII и мы имеем

$$\Gamma(w, g) = \sum_{k=1}^{k_0} \Gamma(w, \delta_k) = \Gamma(w, g_1),$$

что и нужно.

Лемма 1. *Если для некоторой точки $z \in D$, $\gamma_{\varepsilon_k}(z) \neq 0$, где $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, то f открыто в этой точке.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для некоторой окрестности $U(z)$, $\overline{U} \subset D$, точка $w = f(z)$ явится граничной для компакта $\overline{V}' = f(\overline{U})$. Выберем настолько малое $\varepsilon = \varepsilon_k$, чтобы $g = g^{(\varepsilon)} \subset U$ (см. определение 2); ясно, что точка $w = f(z)$ и подавно будет граничной для образа $\bar{g}^{(\varepsilon)}$. Обозначим $f(\bar{g})$ через $\overline{V} : \overline{V} = f(\bar{g})$. Так как точка w не принадлежит компакту $f(\partial g)$, то найдется круг $V_0(w)$, такой, что $\overline{V}_0 \cap f(\partial g) = \emptyset$. Но w является граничной точкой компакта $\overline{V}$, поэтому внутри $\overline{V}_0(w)$ найдется точка w_1 внешняя для $\overline{V}$; первую точку пересечения отрезка $\overline{w_1 w} \subset V_0$ с $\overline{V}$ обозначим через w_0. Очевидно, что $f^{-1}(w_0)$ компактно в g, причем из построения следует, что

$$\Gamma(w_0, g) = \nu(\partial g, w_0) = 0 :$$

невозможен полный обход вокруг w_0 для образов достаточно малых замкнутых кривых вблизи каждой из точек $f^{-1}(w_0)$.

С другой стороны, значения $\nu(\partial g, w)$ для точек w и w_0, принадлежащих одной компоненте дополнения $\mathbb{C} \setminus f(\partial g)$, совпадают, но по условию леммы $\nu(\partial g^{(\varepsilon)}, w) \neq 0$. Полученное противоречие доказывает ее утверждение.

Определение 3. Скажем, что отображение f имеет в точке $z \in D$ степень $\gamma(z)$, если существуете $\varepsilon(z) > 0$, такое, что при всех ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon(z)$, величина $\gamma_\varepsilon(z)$ не зависит от ε и $\gamma_\varepsilon(z) = \gamma(z)$.

Очевидно, что степень $\gamma(z)$ существует, например, в случае, когда f изолировано в точке z.

Определение 4. Скажем, что отображение f положительно (соответственно отрицательно) ориентированно в точке $z \in D$, если существует $\varepsilon(z) > 0$ такое, что при всех $\varepsilon < \varepsilon(z)$ ε-степень $\gamma_\varepsilon(z) \geq 0$ ($\gamma_\varepsilon(z) \leq 0$). Если это имеет место в каждой точке $z \in D$, то говорим о положительной (отрицательной) ориентированности отображения f в области D.

Лемма 2. *Пусть f — положительно ориентированно во всех точках множества $D_z = f^{-1}f(z)$, $z \in D$. Тогда подмножество всех точек $z' \in D_z$, в каждой из которых $\gamma_\varepsilon(z') > 0$ для бесконечной последовательности (зависящей от z) значений ε, стремящихся к нулю, является изолированным в D.*

Доказательство. Покажем сначала, что в условиях леммы имеет место следующее свойство: если $D'_z \subset D_z$ — открыто-компактное подмножество и d — жорданова область с границей ∂d, отделяющей D'_z от $d_z \setminus D'_z$, то $\Gamma(f(z), f, d) \geq 0$.

Для каждой точки $z' \in D'_z$ возьмем окрестность $U(z', \delta(z'))$ при

$$\delta(z') = \min\left\{\frac{1}{4}\varepsilon(z'), \frac{1}{2}\rho(z', \partial d')\right\},$$

где $\varepsilon(z')$ — число, фигурирующее в определении 4. Из полученного покрытия множества F'_z выберем конечное подпокрытие

$$\{U(z_p)\},\ z_p \in F'_z\ (p = 1, 2, \ldots, p_0).$$

Пусть нумерация такова, что для точек z_p: $\varepsilon(z_1) \geq \varepsilon(z_2) \geq \ldots \geq \varepsilon(z_{p_0})$. Заключим компакт d'_z в конечную систему дисков d_n ($n = 1, 2, \ldots, n_0$) диаметра, меньшего $\frac{1}{4}\varepsilon(z_{p_0})$ и расположенных внутри d'. Возьмем круг $\overline{U}(z_1)$ и обозначим через V_1 совокупность всех дисков d_n, пересекающих этот круг и не содержащих остальных точек z_p ($p \geq 2$); через V_2 совокупность всех оставшихся дисков, пересекающих круг $\overline{U}(z_2)$ и не содержащих точек z_p ($p \geq 3$), и т. д. Из построения следует, что $z_p \in V_p$ и диаметр V_p меньше $\frac{3}{4}\varepsilon(z_p)$ ($p = 1, 2, \ldots, p_0$).

Легко видеть, что $\Gamma(f(z), V_p) \geq 0$, где слева просто обозначена сумма значений степени Γ по составляющим V_p дискам. В самом деле, соединяя между собой составляющие V_p диски внутри круга $\overline{U}(z_p)$ узкими полосками без общих точек, не пересекающими (нульмерного) множества D_z, получаем, что порядок ν возникающей простой замкнутой ломаной (диаметра, меньшего $\varepsilon(z_p)$!) будет ≥ 0; устремляя ширину проведенных полосок к нулю, мы докажем наше неравенство. Но тогда из свойства аддитивности получаем

$$\Gamma(f(z), d) = \sum_{p=1}^{p_0} \Gamma(f(z)) \geq 0,$$

что и требовалось.

Пусть теперь, вопреки утверждению леммы, $z_0 \in D_z$ является предельной для точек $z_m \in D_z$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и $\gamma_\varepsilon(z_m) \geq 1$ при $\varepsilon = \{\varepsilon_k^m\}$, $\varepsilon_k^m \to 0$ при $k \to \infty$; и $\gamma_\varepsilon(z_0) \geq 0$ при $\varepsilon < \varepsilon(z_0)$. Возьмем жорданову окрестность U точки z_0 диаметра, меньшего $\varepsilon(z_0)$, граница ∂U которой не пересекает $F_z = f^{-1}f(z)$. Тогда $\Gamma_0 = \gamma(\partial U, f(z)) \geq 0$ вполне определено. Зафиксируем число $M > \Gamma_0$ и внутри U возьмем M точек последовательности $\{z_m\}$ для каждой из них выберем жорданову окрестность U_m $(m = 1, 2, \ldots, M)$ так, чтобы $\overline{U}_{m'} \cap \overline{U}_{m''} = \emptyset$ при $m' \neq m''$ и $\Gamma(f(z), U_m) \geq 1$ — из условий леммы следует возможность такого выбора.

Точки D_z, лежащие внутри U и вне всех U_m $(m = 1, 2, \ldots, M)$, образуют, очевидно, открыто-компактное подмножество D'_z, которое заключим внутрь жордановой области $\Delta' \subset U$, отделяющей D'_z от остальной части $D_z \setminus D'_z$ (вместе с $\bigcup\limits_{m=1}^{M} U_m$). Тогда

$$\Gamma_0 = \Gamma(U, f(z)) = \sum_{m=1}^{m} \Gamma(U_m, f(z)) + \Gamma(d', f(z)) \geq M,$$

так как по доказанному выше $\Gamma(d', f(z)) \geq 0$. Но это неравенство противоречит выбору числа M. Лемма 2 доказана.

Заметим, что из леммы ни в коем случае не вытекает, что точка, в которой $\gamma_\varepsilon(z) \neq 0$ (для некоторых $\varepsilon > 0$), обязательно изолирована в множестве D_z. В одномерном случае (см. гл. 1) мы уже строили примеры функций $\varphi(x)$, показывающие, что это не так; отображение $w = \varphi(x) + iy$ тогда доставит подобный пример и для плоского случая.

Все же имеют место такие следствия из доказанной леммы.

Следствие 1. В условиях леммы 2 во всех точках $z' \in D_z$ кроме некоторого его изолированного в D подмножества, отображение f имеет степень $\gamma(z') = 0$. Отсюда вытекает, что степень существует во всех точках D_z.

Следствие 2. Если во всех точках $z' \in D_z$ величина $\gamma_\varepsilon(z') > 0$ (при $\varepsilon < \varepsilon(z')$), то D_z есть изолированное множество в D, при этом в каждой точке $z' \in D_z$ отображение f имеет определенную степень $\gamma(z') > 0$. В условиях следствия 2 из свойства аддитивности степени отображения области вытекает следующая формула ("принцип аргумента"):

$$\Gamma(O) = \Gamma(f(z), O) = \sum_{z' \in O \cap f^{-1}(f_z)} \gamma(z'),$$

где O, $\overline{O} \subset D$ — открыто. Эта формула показывает, что $|\Gamma(O)|$ есть "число"точек в $O \cap D_z$ если считать такие точки со своими "кратностями".

2. Топологическая теорема о продолжении

Теорема 1. *Пусть в расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}_0$ ($\equiv \overline{\mathbb{C}}_z$) задан произвольный компакт P и $f : \overline{\mathbb{C}}_0 \to \mathbb{C}$ ($\equiv \mathbb{C}_w$) — непрерывное ограниченное (т. е. $f(\overline{\mathbb{C}}_0)$ компактно в $\mathbb{C}_w$) отображение, причем в каждой компоненте дополнения $\mathbb{C}_0 \setminus P$ является внутренним отображением, сохраняющим локальную ориентацию, т. е. $\gamma(z) > 0$ для всех $z \in \mathbb{C}_0 \setminus P$. Тогда $f(P) \supset f(\overline{\mathbb{C}}_0 \setminus P)$, т. е. все значения, которые функция f принимает вне P, она принимает и на P.*

Доказательство. Пусть $f(\infty) = w_0 \in \mathbb{C}_w$; покажем сначала, что любое свое значение $w' \neq w_0$ f принимает на P. Предположим противное. Тогда, во-первых, найдется столь большой круг $U \subset \mathbb{C}_z$, что $\Gamma(f, U, w') = 0$, и, во-вторых, множество $f^{-1}(w')$ содержит лишь точки вне P и притом в конечном числе, так как в противном случае предельные его точки (принадлежащие $f^{-1}(w')$) должны были бы принадлежать P. Искомое противоречие дает принцип аргумента: $\Gamma(w') = \sum_{z \in f^{-1}(w')} \gamma(z)$, где $\Gamma(w') = 0$, а слагаемые в правой части — положительны. Итак, образ $f(P)$ содержит множество $f(\overline{\mathbb{C}}) \setminus \{w_0\}$; но так как P — компакт, то его образ совпадает с $f(\overline{\mathbb{C}}_0)$. Теорема доказана.

Определение. Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывно и существует нигде не плотное замкнутое множество $P \subset D$ такое, что: 1) в каждой компоненте дополнения $D\setminus P$ f является внутренним отображением, сохраняющим локальную ориентацию, т. е. $\gamma(z)>0$ для всех $z\in D\setminus P$ и 2) ни в какой окрестности каждой точки из P f не является внутренним. Тогда скажем, что f есть отображение с особым множеством P; точки множества $D\setminus P$ назовем регулярными.

В качестве примеров таких отображений f можно взять функции вида (см. гл. XII)

$$f(z)=\iint\limits_P \frac{\varphi(\zeta)d\sigma_\zeta}{\zeta-z},\ \mathrm{Mes}P>0,\ \varphi\in L_p(P)\ (p>2);$$

заметим лишь, что, вообще говоря, не все точки из P здесь будут особыми в смысле нашего определения. Ниже мы приведем примеры подобных функций и для некоторых множеств P меры нуль.

Точно так же, как теорема 1 настоящего параграфа является аналогом одномерной теоремы 3 гл. V как по формулировке, так и в доказательстве, следующие теоремы 2, 3 являются полными аналогами теорем 4,5 гл. V; поэтому мы приведем их уже без доказательства.

Теорема 2. *Пусть* $f:\overline{\mathbb{C}}_0\to\mathbb{C}$ *: — непрерывное отображение с особым компактным множеством* P *и* $f(\overline{\mathbb{C}}_0)=H\subset\mathbb{C}_w$. *Тогда на* H *существует плотное множество* E *типа* $\mathcal{G}_\delta$ *такое, что* $E'=f^{-1}(E)\cap P$ *также плотно на* P *и типа* $\mathcal{G}_\delta$, *причем если* $z_0\in E'$, *то найдется последовательность регулярных точек* $\{z_k\}$, $z_k\to z_0$ *для которых* $f(z_k)=f(z_0)$ $(k=1,2,\ldots)$. *Заметим, что по сравнению с теоремой 3 гл. V здесь не нужно соглашения о склейке точек* a, b *— мы уже имеем сферу* $S^2=\overline{\mathbb{C}}_0$, *зато каждую точку ветвления (которых нет в одномерном случае) следует считать соответствующей кратности.*

Теорема 3. *Пусть* $D\subset\overline{\mathbb{C}}_0$ *— область,* $P\subset\overline{D}$ *— нигде не плотное замкнутое множество (в частности, граница области* D*) и* $\overline{D}\to\mathbb{C}$ *— непрерывно, причем в каждой компоненте дополнения* $D\subset P$ *степень* $\gamma(z)$ *либо только положительна, либо только отрицательна (в разных компонентах допускаются различные ориентации* f*). Тогда если* $\mathrm{Int}\,f(P)\neq\emptyset$, *то существует плотное на* Intf(P) *множество* $\mathcal{E}$ *типа* $\mathcal{G}_\delta$ *такое, что для всех* $z_0\in\mathcal{E}'=f^{-1}(\mathcal{E})\cap P$ *(которое также типа* $\mathcal{G}_\delta$ *и плотно на некоторой открытой порции* P*) найдется последовательность регулярных точек* $\{z_k\}$, $z_k\to z_0$ *для которых* $f(z_k)=f(z_0)$ $(k=1,2,\ldots)$.

Основной здесь является следующая теорема о продолжении.

Теорема 4. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — непрерывно и нульмерно, причем $\gamma(z) > 0$ всюду в D, кроме, возможно, множества точек $H \subset D$, такого, что $f(D) \setminus f(H)$ всюду плотно в $f(D)$. Тогда f — внутреннее отображение и $\gamma(z) > 0$ для всех $z \in D$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно на основании леммы 2 показать, что ε-степень $\gamma_\varepsilon(z_0) > 0$ при любом $\varepsilon > 0$ в каждой точке $z_0 \in H$.

Пусть $d^{(\varepsilon)} \equiv d \subset D$ — произвольная жорданова область, содержащая z_0 внутри, а точка $w_0 = f(z_0)$ — (f, d)-допустимая (т. е. $\partial d \cap f^{-1} f(z_0) = \emptyset$). Возьмем круг $V(w_0) = V$ с центром w_0, такой, что $\overline{V} \cap f(\partial d) = \emptyset$. Тогда во всех точках $w \in V$ порядок $\nu(f(\partial d), w)$ есть величина постоянная.

По условию теоремы внутри круга V найдется точка $w' \in f(D) \setminus f(H)$, которой соответствует прообраз $f^{-1}(w') \subset D \setminus E$. Поэтому в каждой точке $z' \in f^{-1}(w')$ степень $\gamma(z') > 0$, т. е. $f^{-1}(w')$ есть изолированное множество в D. Так как $\overline{V} \cap f(\partial d) = \emptyset$, то прообраз $f^{-1}(V) = O$ лежит строго внутри $D : \overline{O} \subset D$, следовательно, множество $f^{-1}(w')$ должно содержать лишь конечное число точек и по принципу аргумента

$$\Gamma(w', d) = \Gamma(w') = \sum_{z \in d \cap f^{-1}(w')} \gamma(z') > 0.$$

Поэтому $\Gamma(w_0, d) = \Gamma(w', d) > 0$, что, как мы указывали выше, и завершает доказательство теоремы.

Приведем некоторые следствия этой теоремы, которые сформулируем в виде самостоятельных теорем.

Теорема 5. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — непрерывно и нульмерно и $P \subset D$ — замкнутое нигде не плотное множество. Если:*

1) в каждой компоненте дополнения $D \setminus P$ f является внутренним отображением, причем $\gamma(z) > 0$ в каждой точке $z \in D \setminus P$;

2) образ $P_1 = f(P)$ первой категории в $\mathbb{C}$ (в частности, нигде не плотен), то f является внутренним всюду в D и степень $\gamma(z) > 0$ для всех $z \in D$.

Отметим важный частный случай этой теоремы.

Теорема 6. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ - непрерывно и $P \subset D$ — замкнутое нигде не плотное множество. Если в каждой компоненте дополнения $D \setminus P$ f является внутренним отображением, сохраняющим локальную ориентацию и $f|_P$ — гомеоморфизм, то f —*

внутреннее отображение всей области D и степень $\gamma(z) > 0$ всюду в D.

Теорема 7. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — непрерывно и нульмерно, $P \subset D$ — замкнуто и нигде не плотно, причем $\gamma(z) > 0$ для $z \in D \setminus P$. Тогда образ множества P содержит внутренние точки или нет, смотря по тому, существует или нет точка $z_0 \in P$ бесконечной регулярной кратности.*

Эта теорема обобщает один результат Волибнера [1]. Выведем из теоремы 2 еще одно простое и все же необычное следствие.

Теорема 8. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — нульмерное отображение с особым множеством P. Если $z_0 \in P$ — точка бесконечной регулярной кратности, то, во-первых, степень $\gamma(z_0)$ не существует и, во-вторых, более того, существует последовательность $\{l_k\}$ простых замкнутых ломаных, содержащих z_0 внутри и стягивающихся к z_0, таких, что $\nu(f(l_k), f(z_0)) \to -\infty$ при $k \to \infty$).*

Доказательство. Пусть $U(z_0)$ — произвольная окрестность, а $l \subset U$ — простая замкнутая ломаная, не пересекающая нульмерного множества $D_{z_0} = f^{-1}f(z_0)$ и $\{z_m\}$, $z_m \in D \setminus P$ такие, что $f(z_m) = f(z_0)$. Выберем внутри l произвольное число M точек z_m: $z'_1, z'_2, \dots, z'_M$ и пусть попарно не пересекающиеся круги $U'_m = \overline{U}(z'_m)$ внутри l такие, что $P \bigcap \left(\bigcup\limits_{m=1}^{M} \overline{U}(z'_m) \right) = \emptyset$. Заключим оставшуюся (открыто-компактную) порцию множества D_{z_0} внутрь простой замкнутой ломаной l'; она содержит, очевидно, и точку z_0 внутри. По свойству аддитивности

$$\nu(f(l), f(z_0)) = \sum_{m=1}^{M} \nu(f(\partial u'_m), f(z_0)) + \nu(f(l'), f(z_0)).$$

Здесь в левой части — фиксированное число; первое слагаемое в правой части не меньше M; выбирая M достаточно большим, можем сделать $\nu(f(l'), f(z_0))$ сколь угодно большим по модулю отрицательным числом. Ясно, что в этих условиях $\gamma(z_0)$ не существует. Теорема доказана.

Наконец, приведем еще одно утверждение, которое легко вывести из теоремы о продолжении ([2]).

Теорема 9. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — непрерывно, нульмерно, почти всюду дифференцируемо, обладает N-свойством и пусть якобиан* *этого отображения неотрицателен. Тогда f — внутреннее отображение.*

3. Корень k-й степени от комплексной функции

Если нульмерное отображение $w = g(z)$ имеет в точке z_0 локальную степень $\gamma(z_0) = 1$, то почти очевидно, что отображение $w = [g(z) - g(z_0)]^k$ ($k > 0$ целое) имеет в той же точке локальную степень, равную k. Оказывается, это утверждение можно обратить. Нашей целью здесь будет доказательство следующей теоремы.

Т е о,р е м а 10. *Пусть для нульмерного отображения $f : D \to \mathbb{C}$ локальная степень $\gamma(z_0) = k \neq 0$ в какой-либо точке $z_0 \in D$. Тогда в некоторой окрестности $U(z_0)$ этой точки найдется однозначная функция $g(z)$ такая, что $f(z) - f(z_0) = [g(z) - g(z_0)]^{|k|}$ для всех $z \in U(z_0)$.*

При доказательстве этой теоремы, конечно, можем предположить, что $f(z_0) = g(z_0) = 0$, и ставить вопрос о существовании однозначного корня $g(z)$ k-й степени от комплексной функции $f(z)$ вблизи точки z_0. Нетрудно показать (ср. [3]), что если такой корень $g(z)$ существует, то любой другой корень той же k-й степени от $f(z)$ имеет вид $\varepsilon g(z)$, где ε — корень k-й степени из единицы.

В гл. VII мы познакомились с бесконечнолистной (универсальной) накрывающей поверхностью $\Sigma(z_0)$ для проколотой конечной плоскости $\mathbb{C} \setminus z_0$; здесь нам понадобятся конечнолистные накрывающие $\Sigma_k(0) \equiv \Sigma_k$ проколотой конечной плоскости $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, которую нам будет удобно считать w-плоскостью.

Нужная нам модель для Σ_k строится следующим образом: берем k одинаковых экземпляров плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль некоторого луча l с начальной точкой $w = 0$; учитывая положительное направление вращения вокруг $z = 0$, отмечаем, нижний и верхний "берега" $l^- \setminus \{0\}$ и $l^+ \setminus \{0\}$ разреза l. Занумеруем эти экземпляры числами $, 1, 2, \ldots, k-1$; для каждого $n \leq k-2$ склеим нижний берег $l_n^- \setminus \{0\}$ n-го экземпляра ("листа") с верхним берегом $l_{n+1}^+ \setminus \{0\}$ $(n+1)$-го листа; наконец, склеим (отождествим) верхний берег $l_0^+ \setminus \{0\}$ "нулевого" листа с нижним берегом $l_{k-1}^- \setminus \{0\}$ последнего $(k-1)$-го листа. Возникающая риманова поверхность Σ_k (не содержащая точек, лежащих над $z = 0$ и $z = \infty$) и есть известная модель k-листного накрытия для $\mathbb{C} \equiv \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Важным для нас свойством поверхности Σ_k является то, что на ней многозначная функция $\sqrt[k]{w}$ является однозначной; это означает, что если в некоторой точке $z \in \Sigma_k$ зафиксировать какое-нибудь значение корня

$$\sqrt[k]{w} = \sqrt[k]{|w|}\left(\cos\frac{\arg w + 2\pi n}{k} + i\sin\frac{\arg w + 2\pi n}{k}\right)\ (n = 0, 1, \ldots, k-1),$$

то непрерывным продолжением сможем определить $\xi = \sqrt[k]{w}$ как однозначную функцию уже на всей поверхности Σ_k; при этом она гомеоморфно (и конформно) отображает эту поверхность на проколотую конечную плоскость $\mathbb{C}_\xi \setminus \{0\}$.

Обозначим через Σ либо логарифмическую поверхность $\Sigma(0)$, либо одну из построенных здесь поверхностей Σ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Пусть $f : D \to \mathbb{C}_0$, $D \subset \mathbb{C}_z$ непрерывно; пусть, кроме того, $z_0 \in D$ и $w_0 = f(z_0) \in \mathbb{C}_0$. Оказывается, что для любой точки $e_0 \in \Sigma$, удовлетворяющей равенству $p(e_0) = w_0$, имеет место следующая

Теорема о накрывающем отображении. *Для отображения f тогда и только тогда существует такое отображение $\tilde{f} : D \to \Sigma$, что $\tilde{f}(z_0) = e_0$ и $p \circ \tilde{f} = f$, когда образ гомоморфизма $f_* : \pi(D, z_0) \to \pi(\mathbb{C}_0, w_0)$ содержится в образе гомоморфизма $p_* : \pi(\Sigma, e_0) \to \pi(\mathbb{C}_0, w_0)$. При этом отображение $\tilde{f}$, удовлетворяющее этим условиям, определяется единственным образом.*

Доказательство. Необходимость очевидна: если отображение $\tilde{f} : (D, z_0) \to (\Sigma, e_0)$, для которого $p \circ \tilde{f} = f$, существует, то $p_*\tilde{f}_* = f_*$, а потому $\mathrm{im} f_* \subset \mathrm{im} p_*$.

Существование. Пусть условие теоремы выполнено. Чтобы построить отображение $\tilde{f}$, рассмотрим произвольную точку z области D и путь $\alpha' : I \to D$ такой, что $\alpha'(0) = z_0$ и $\alpha'(1) = z$. Для пути $\alpha = f \circ \alpha' : I \to \mathbb{C}_0$ по теореме о накрытии (см. гл. VII) существует один и только один путь $\tilde{\alpha} : I \to \Sigma$ поверхности Σ, для которого $\tilde{\alpha}(0) = e_0$ и $p\tilde{\alpha} = \alpha$.

Покажем, что точка $\tilde{\alpha}(1) \in E$ не зависит от выбора $\alpha' : I \to D$. Пусть $\beta' : I \to D$ — любой другой путь области D, соединяющий точки z_0 и z, и пусть $\tilde{\beta} : I \to \Sigma$ — такой (однозначно определенный) путь поверхности E, что $\tilde{\beta}(0) = e_0$, и $p\tilde{\beta} = f\beta'$. Докажем, что $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. Пусть $[\lambda] \in \pi(D, z_0)$ — класс петли $\lambda = \alpha'\beta'^{-1} : I \to D$. Так как по условию класс $f_*([\lambda])$ принадлежит подгруппе $p_*[\pi\Sigma e_0]$, то в точке e_0 существует такая петля $\mu : I \to \Sigma$, что $p\mu = f\lambda$. Так как $\lambda = \alpha'\beta'^{-1}$, то ввиду единственности накрывающего пути для любого $t \in I$ имеют место равенства $\tilde{\alpha}(t) = \mu\left(\frac{1}{2}t\right)$, $\tilde{\beta}(t) = \mu\left(1 - \frac{1}{2}t\right)$.

В частности, $\tilde{\alpha}(1) = \mu\left(\frac{1}{2}\right) = \bar{\beta}(1)$. Тем самым независимость точки $\tilde{\alpha}(1)$ от выбора пути $\alpha'(1)$ доказана полностью.

В силу этой независимости формула $\tilde{f}(z) = \tilde{\alpha}(1)$, $z \in D$, однозначно определяет некоторое отображение $\tilde{f} : D \to \Sigma$, обладающее, очевидно, тем свойством, что $\tilde{f}(z_0) = e_0$ и $p \circ \tilde{f} = f$.

Непрерывность. Для доказательства непрерывности $\tilde{f}$ выберем произвольную точку $z_1 \in D$ покажем, что в ее окрестности отображение $\tilde{f}$ совпадает с некоторым непрерывным отображением.

Пусть $w_1 = f(z_1)$, $e_1 = f(z_1)$, $Q \subset \Sigma$ — круг с центром e_1 и $p\,|_Q$ — гомеоморфизм. Обозначим через W пересечение круга $p(Q)$ с образом $f(D)$ области D:

$$W = p(Q) \cap f(D).$$

Пусть $q : W \to Q$ — инъективное отображение, такое, что $pq(w) = w$ до для любой точки $w \in W$. Полагая $U = f^{-1}(w)$, определяем (непрерывное) отображение $h : U \to \Sigma$ формулой $h(z) = qf(z)$, $z \in U$. Очевидно, что $h(z_1) = e_1$ и $ph = f\,|_U$. Докажем, что отображения f и h совпадают в некоторой окрестности точки z_1. Так как, по построению, U открыто, то найдется круг $V(z_1) \subset D$ с центром z_1; докажем, что $\tilde{f}(z) = h(z)$ для любой точки $z \in V$.

Радиальный отрезок $\overline{z_1 z}$ представим как путь $\eta : I \to V$, где $\eta(0) = z_1$, $\eta(1) = z$. Далее, существует путь $\xi : I \to D$, соединяющий точки z_0 и $z_1 : \xi(0) = z_0$, $\xi(1) = z_1$. Пусть $\pi = \xi\eta : I \to D$ и $\rho = f\xi$, $\sigma = f\pi$. Возьмем (единственный) накрывающий путь $\tilde{\rho} : I \to \Sigma$, для которого $\hat{\rho}(0) = e_0$ и $p\tilde{\rho} = \rho$. Из построения $\tilde{f}$ сразу следует, что $\tilde{\rho}(1) = \tilde{f}(z_1) = e_1$; аналогично $h(z_1) = e_1$. Следовательно, положив

$$\tau(t) = \begin{cases} \hat{\rho}(2t) & \text{для} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ h\eta(2t-1) & \text{для} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

получим путь $\tau : I \to \Sigma$, для которого $\tau(0) = \tilde{\rho}(0) = e_0$ и $\tau(1) = h(z)$. С другой стороны, так как $p\tilde{\rho} = \rho = f\xi$ и $ph\eta = f\eta$, то $p\tau = \sigma$, а потому согласно определению отображения справедливо равенство $\tau(1) = \tilde{f}(z)$. Тем самым доказано, что $f(z) = h(z)$ для любой точки $z \in V$, т. е. $\tilde{f}$ непрерывно.

Единственность. Пусть $\tilde{f}$ и $\tilde{f}'$ — такие отображения области D в Σ, что $p\tilde{f} = f = p\tilde{f}'$ и $\tilde{f}(z_0) = e_0 = f'(z_0)$. Покажем, что $\tilde{f} = f'$, т. е. покажем, что для любой точки $z \in D$ имеет место $\tilde{f}(z) = f'(z)$. Возьмем путь $\pi : I \to D$, соединяющий точки z_0 и z. Пусть $\sigma = f\pi$, $\tau = \tilde{f}\pi$ и $\tau' = \tilde{f}'\pi$. Тогда $p\tau = \sigma = p\tau'$ и $\tau(0) = e_0 = \tau'(0)$. В силу единственности накрывающего пути $\tau = \tau'$. В частности,

$$f'(z) = \tau(1) = \tau'(1) = f'(z).$$

Теперь мы в состоянии доказать теорему 1.

Итак, пусть $f : D \to \mathbb{C}_w$ — нульмерное отображение, имеющее в точке z_0 локальную степень $\gamma(z_0) = k \neq 0$, причем $f(z_0) = 0$. Будем предполагать $k > 0$, в противном случае операцией сопряжения мы привели бы рассмотрение к этому случаю. Возьмем окрестность $V(z_0)$, в которой на каждой положительно ориентированной простой замкнутой кривой, не пересекающей $f^{-1}f(z_0) = f^{-1}(0)$ и содержащей внутри точку z_0, отображение f имеет порядок, равный k. Положим $D = V \setminus f^{-1}(0)$, $E = \Sigma_k$ и покажем, что для них выполнено условие теоремы о накрывающем отображении.

Прежде всего, в силу гомеоморфизма поверхности Σ_k проколотой конечной плоскости $\mathbb{C}_0$, фундаментальная группа $\pi(\Sigma) = \mathbb{Z}$; роль образующей может играть k-листное накрытие любой окружности $|w| = r > 0$.

Рассмотрим произвольный замкнутый путь в $V \setminus f^{-1}(0)$ с некоторой начальной точкой z_1. Легко видеть, что он гомотопен произведению конечного числа простых замкнутых путей, содержащих или не содержащих внутри точку z_0. Для каждого из путей первого типа порядок его образа равен $\pm k$, второго — нулю. Другими словами, образ нашего пути гомотопен некоторой степени k-листного накрытия окружности $|w| = 1$, а это и означает, что $\mathrm{Im} f_* \subset \mathrm{Im} p_*$. Так как по теореме о накрывающем отображении f можно поднять на поверхность Σ_k, а на этой поверхности функция $\sqrt[k]{w}$ однозначна, то отсюда и следует, что существует однозначное значение $g(z) = \sqrt[k]{f(z)}$ в круге V. Теорема 1 доказана.

Приведем некоторые утверждения и для случая логарифмической функции $\mathrm{Ln} w$.

Теорема 11. *Для того чтобы в области D для функции $f(z)$ существовала однозначная ветвь функции $\mathrm{Ln} f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого замкнутого пути в $D \setminus f^{-1}(0)$ порядок его образа относительно точки $w = 0$ был равен нулю.*

Теорема 12. *При выполнении условия теоремы 11 для любого целого $k > 0$ в области D существует однозначная ветвь функции $\sqrt[k]{f(z)}$.*

Это следует из того, что вместе с однозначной ветвью $\mathrm{Ln} f(z)$ определяется и однозначная ветвь $\mathrm{Arg} f(z)$, а потому и

$$\sqrt[k]{f(z)} = \sqrt[k]{|f|}\left(\cos\frac{\mathrm{Arg} f(z)}{k} + i\sin\frac{\mathrm{Arg} f(z)}{k}\right).$$

Т е о р е м а 13. *Заключения теорем 11 и 12 имеют место локально в точке z_0, где отображение f имеет степень $\gamma(z_0) = 0$.*

Ранее мы сформулировали ряд частных случаев теоремы о накрывающем отображении. Из теоремы 12 мы выведем так называемую теорему о существовании корней. Пусть граница (в общем, многосвязной) области $D = \{g_0, \ldots, g_m\}$ состоит из непрерывных кривых и $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ — непрерывное отображение. Если степень

$$\Gamma(f\mid_{\partial D}, w_0) = \nu(f\mid_{\partial g_0}, w_0) - \sum_{k=1}^{m} \nu(f\mid_{\partial g_k}, w_0)$$

отлична от нуля, то существует точка $z_0 \in D$, для которой $f(z_0) = w_0$.

В самом деле, если бы такой точки не было, то, превратив D в односвязную область D_1 некоторыми дополнительными разрезами, мы смогли бы получить однозначную ветвь $\mathrm{Ln}(f(z) - w_0)$, а, значит, и $\mathrm{Arg}(f(z) - w_0)$ в $\overline{D}_1$ а потому имели бы

$$\mathrm{Arg}(f(z) - w_0)\mid_{\partial D_1} = 0.$$

Так как при прохождении границы ∂D_1 дополнительные разрезы описываются дважды в противоположных направлениях, то левая часть этого равенства должна равняться $\Gamma(f\mid_{\partial D}, w_0) \neq 0$, что противоречит нашему условию.

Отметим, что эта теорема необратима: корни уравнения $f(z) = w_0$ могут быть и при условии, когда $\Gamma(f\mid_{\partial D}, w_0) = 0$. Простым примером может служить функция

$$f(z) = \begin{cases} z \text{ при } \mathrm{Im} z \geq 0, \\ \bar{z} \text{ при } \mathrm{Im} z \leq 0. \end{cases}$$

в области $D \equiv \{|z| < 1\}$.

Из принципа аргумента для аналитических функций и теоремы Стоилова следует, что он имеет место и для внутренних отображений плоских областей D, т. е. для внутренних отображений теорема о существовании корней обратима. Легко убедиться, что обратимость этой теоремы для случая нульмерных отображений в определенном смысле имеет место только для внутренних отображений.

Именно, справедливо следующее утверждение: если для нульмерного отображения $f : D \to \mathbb{C}$ и любой жордановой подобласти $\bar{d} \subset D$ корни уравнения $f(z) = w_0$ существуют в d только в случае, когда $\Gamma(f\ |_{\partial d}, w_0) \neq 0$, то f является внутренним отображением области D, причем $|\Gamma|$ в точности равно числу этих корней (считая, каждый корень столько раз, какова его кратность; кратность же корня z_0 для внутреннего отображения f, конечно, считаем равной $|\gamma(f, z_0)|$, где γ — локальная степень отображения f в точке z_0). В самом деле, из высказанного условия легко следует открытость f в каждой точке $z \in D$.

Глава 10

Геометрические теоремы о продолжении

1. Первая теорема о продолжении

Нашей целью здесь будет доказательство двух теорем о продолжении для отображений, обладающих определенными локально-геометрическими свойствами в точках своего возможного особого множества. Введем следующее понятие.

Определение 1. Скажем, что непрерывное отображение $f : D \to \mathbb{C}$ или, иначе, $w = f(z)$, обладает свойством T в точке z_0, если из этой точки исходят два луча t_1, t_2 такие, что:

1) они принадлежат различным прямым;

2) образ t_k $(k = 1, 2)$ есть кривая l_k в w-плоскости, обладающая определенной полукасательной T_k в точке $w_0 = f(z_0)$;

3) T_1 и T_2 принадлежат различным прямым.

Первая теорема, о которой мы говорили, формулируется следующим образом:

Теорема 1. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — непрерывное отображение и $P \subset D$ — замкнутое нигде не плотное множество. Пусть f является внутренним отображением в каждой компоненте дополнения $D \setminus P$ с сохранением ориентации в каждой точке (т. е. $\gamma(z) > 0$ при $z \in D \setminus P$).*

Если отображение f нульмерно на P и обладает свойством T в каждой точке множества P, исключая не более чем счетное его подмножество, то оно является внутренним всюду в D.

Доказательство этой теоремы мы выведем из двух основных лемм, аналогичных ранее упомянутым уже нами леммам Д.Е. Меньшова.

Заметим сначала, что в условиях теоремы направления лучей $t_k(z)$, входящих в определение свойства T, могут как угодно меняться от точки к точке. Конечно, простейшим является случай, когда эти направления просто одинаковы и образы их имеют одинаковые направления. Лемма 1, которую мы собираемся доказать, и сводит в некотором смысле самый общий случай к этому простейшему.

Лемма 1. *Пусть отображение $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывно и $P \subset D$ — произвольное замкнутое множество; пусть f обладает свойством T во всех точках множества $N \subset P$ не первой категории на P.*

Тогда найдутся порция $P' \subset P$ и числа $\sigma, \delta > 0$ такие, что из каждой точки $z \in P'$ исходят два луча $\tau_k(z)$, $(k = 1, 2)$, обладающие следующими свойствами:

1) $[\widehat{\tau_k(z'), \tau_k(z'')}]$ для любых точек: $z', z'' \in P$;

2) $100\sigma < [\widehat{\tau_1(z), \tau_2(z)}] < \pi - 100\sigma$ для каждой точки $z \in P'$;

3) расстояние $\rho(P', \partial D) > \delta$;

4) если $P_1' = f(P')$, то каждая точка $w = f(z) \in P_1'$ является вершиной двух углов $\Omega_k(w)$ $(k = 1, 2)$ раствора 4σ каждый, полученных параллельным переносом фиксированной пары углов $\Omega_k(w)$ с общей вершиной, и обладающих тем свойством, что образ $\lambda_k(w)$ отрезка $\tau_k(z)$ $(k = 1, 2)$, имеющего длину δ (при отображении $w = f(z)$, расположен внутри угла $\Omega_k(w)$); при этом $100\sigma < [\widehat{\Omega_1, \Omega_2}] < \pi - 100\sigma$, если понимать $[\widehat{\Omega_1, \Omega_2}]$ как угол между биссектрисами углов Ω_1, Ω_2.

Доказательство. В z- и w-плоскостях фиксируем определенные лучи t и T соответственно и обозначаем через $N(n_1, n_2, \nu_1, \nu_2, p, q) = N(n_k, \nu_k, p, q)$ множество точек $z \in N$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $\left|\{\widehat{t, t_k}(z)\} - \frac{n_k}{400p}\right| < \frac{1}{400p}$ (k=1,2),

где через $\{\widehat{t, t_k}\}$ обозначена величина угла, отсчитываемого в положительном направлении от t, заключенная между 0 и 2π (включая 0);

б) $\frac{2}{p} < [\widehat{t_1(z), t_2(z)}] < \pi - \frac{2}{p}$;

в) угол $\Omega_k'(w)$ $(k = 1, 2)$ с вершиной $w = f(z)$ раствора $1/100p$ содержит образ отрезка луча $t_k(z)$ длины $\frac{1}{q}$;

г) $\left|\{T, \Omega_k'(w)\} - \frac{\nu_k}{200p}\right| < \frac{1}{200p}$ $(k = 1, 2)$;

д) $\frac{2}{p} < [\widehat{\Omega_1'(w), \Omega_2'(w)}] < \pi - \frac{2}{p}$.

Из определения свойства T и условий леммы следует, что

$$\cup N(n_k, \nu_k, p, q) = N,$$

где суммирование распространено на всевозможные целые положительные значения чисел n_k, ν_k, p, q. Так как N — не первой категории на P, то найдутся определенные значения n_k, ν_k, p, q такие, что соответствующее им множество $N(n_k, \nu_k, p, q)$ всюду плотно на некоторой порции $P' \subset P$, причем $P' = P \cap D'$, где D' — круг. Очевидно, можно предположить, что расстояние от P' до границы области D больше $\frac{1}{q}$. Для этих чисел положим

$$N(n_k, \nu_k, p, q) = N',\ \frac{1}{100p} = \sigma,\ \frac{1}{q} = \delta. \tag{1}$$

Докажем, что для множества P' и так определенных чисел $\sigma, \delta > 0$ имеют место все свойства, указанные в лемме.

Для этого определим в точках $z \in P'$ лучи $\tau_k(z)$ $(k = 1, 2)$ следующим образом: положим $\tau_k(z) = t_k(z)$ для точек $z \in P' \cap N'$, а для точек $z \in P' \setminus N'$ в качестве $\tau_k(z)$ возьмем одно из предельных положений лучей $t_k(z')$ когда точки $z' \in N'$ сходятся к z; такое определение возможно в силу плотности $N' \cap P'$ на P'.

Из неравенства "а"следует теперь, что

$$[\widehat{\tau_k(z'), \tau_k(z'')}] \leq \frac{1}{200p}\ (k = 1, 2)$$

для всех точек $z', z'' \in P'$, а из неравенств "б"получаем, что

$$\frac{2}{d} \leq [\widehat{\tau_1(z), \tau_2(z)}] < \pi - \frac{2}{p} \text{ для всех } z \in P'.$$

Отсюда и из определения числа σ следуют свойства 1 и 2 леммы. Так как расстояние от P' до границы области D больше $1/p$, то имеем и свойство 3.

Докажем свойство 4. Возьмем произвольную точку $z_0 \in N' \cap P'$ и построим углы $\Omega_k(w_0)$ $(k = 1, 2)$, $w_0 = f(z_0)$ раствора 4σ каждый, которые имеют общие биссектрисы с углами $\Omega'_k(w)$ (раствора σ). Из неравенства "а"следует, что углы $\Omega_2(w_0)$, $\Omega'_k(w)$. перенесеные паралельно в любую точку $w \in P'_1$, содержат соответственно углы $\Omega_1(w_0)$. Отсюда и из "в"следует, что образ $\lambda_k(w')$ отрезка $t_k(z')$ $(k = 1, 2)$, $z' \in N'$, $w' = f(z)$, имеющего длину $1/q = \delta$, при отображении f будет принадлежать $\Omega_k(w)$. В силу непрерывности f и определения $\tau_k(z)$ для $z \in P' \setminus N'$ сразу следует свойство 4 леммы.

Двойное неравенство леммы для угла $[\widehat{\Omega_1, \Omega_2}]$ вытекает из "д", Лемма 1 доказана.

Предположим теперь, что теорема 1 неверна. В этом случае мы можем считать (непустое) множество P минимальным в смысле возможности продолжения внутреннего отображения $f\,|_{D|P}$, т. е. что ни в какой окрестности любой его точки отображение f уже не является внутренним. Тогда очевидно, что искомое противоречие заключается в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы 1 (непустая) порция* $P' = P \cap D'$ *обладает свойствами 1-4 леммы 1. Тогда отображение* $f\,|_{D'}$ *является внутренним.*

Так как свойство быть внутренним отображением локально, то из нульмерности f следует (см. §1, гл. VIII), что при доказательстве теоремы 2 мы можем считать, что D' — круг и $f\,|_{D'}$ замкнуто.

Очевидно, мы можем также считать диаметр круга D' меньшим числа $\frac{1}{2}\delta \sin 90\sigma$. В этом случае если для некоторых точек $z_1, z_2 \in P' \cap D'$ их разноименные лучи пересекаются, то точка пересечения $\tilde{z}$ отстоит от каждой из z_1, z_2 меньше чем на δ, т. е. принадлежит (первоначальной) области D. В самом деле, пусть, например, пересекаются лучи $\tau_2(z_1)$ и $\tau_1(z_2)$ (рис. 13). из свойств 1 и 2 леммы 1 вытекает, что

$$90\sigma < [\widehat{\tau_1(z_2), \tau_2}(z_1)] < \pi - 90\sigma. \tag{2}$$

Из треугольника $z_1 z_2 \tilde{z}$ с углами θ_1, θ_2, $\tilde{\theta}_3 = [\widehat{\tau_1(z_2), \tau_2}(z_1)]$ и имеем $\sin\tilde{\theta}_3 > \sin 90\sigma$, а потому $|z_1 - \tilde{z}| = \frac{\sin\theta_2}{\sin\tilde{\theta}_3}|z_1 - z_2| < \frac{1}{\sin 90\sigma}|z_1 - z_2| < \frac{\delta}{2}$. Аналогично $|z_2 - \tilde{z}| < \frac{\delta}{2}$.

Возьмем произвольную точку $z \in P'$. Ее лучи $\tau_1(z)$, $\tau_2(z)$ образуют угол $\widehat{\tau_1, \tau_2}(z)$, $100\sigma < \widehat{\tau_1, \tau_2}(z) < \pi - 100\sigma$, направление биссектрисы которого примем за направление оси Ox, причем ось Oy выберем так, чтобы этот угол был расположен справа от прямой, проходящей через z параллельно оси Oy (считая ось Oy направленной вертикально вверх, а ось Ox — вправо). Из свойств 1 и 2 леммы 1 следует, что если параллельно перенести так выбранные оси координат в любую точку $z' \in P'$, то один из ее лучей $\tau_k(z')$ будет лежать в нижней полуплоскости (именно, в IV квадранте), а другой — в верхней (в I квадранте). Из тех же свойств 1 и 2 следует, что все нижние (соответственно верхние) лучи имеют одинаковый индекс $k = 1, 2$; будем обозначать нижние лучи через τ_1, а верхние — через τ_2.

Точно так же на w-плоскости в качестве направления оси абсцисс Ou возьмем направление биссектрисы угла $[\widehat{\Omega_1, \Omega_2}]$, $100\sigma < [\widehat{\Omega_1, \Omega_2}] < \pi - 100\sigma$, а ось ординат Ov выберем так, чтобы этот угол (вместе $\Omega_k, k = 1, 2$) располагался справа от прямой, проходящей через его вершину параллельно оси Ov. Тогда один из углов $\Omega_k(w)$ любой точки $w \in P_1'$ будет нижним, другой — верхним. В силу свойства 4 леммы 1 образ луча $\tau_k(z)$, $z \in P'$, с одним и тем же индексом k принадлежит всегда либо только нижним углам Ω, либо только верхним. Ниже всюду под f мы будем понимать $f\,|_{\overline{D'}}$.

Лемма 2. *Пусть G — открытый выпуклый многоугольник w-плоскости такой, что $\overline{G} \cap f(\partial D') = \emptyset$, причем граница ∂G области G есть объединение ломаных l_1, l_2 таких, что если в произвольную точку $w \in l_k$ $(k = 1, 2)$ параллельно перенести оба угла Ω_1, Ω_2, то один из углов $\Omega_k(w)$ окажется вне замкнутой области $\overline{G}$.*

Тогда компоненты открытого множества $O = f^{-1}(G) \subset D'$ суть жордановы области.

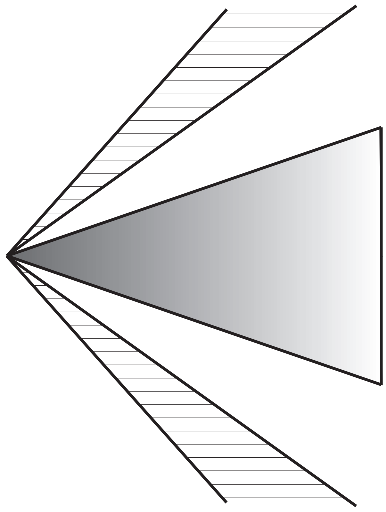

Рис. 15

Доказательство. Из условия леммы следует, что $\overline{O} \subset D'$ причем граница $\partial O = \overline{O} \setminus O$ отображается в границу ∂G; ясно, что $f(\overline{O}) \subset G$.

1. Так как, по условию, отображение f на G замкнуто, то граница ∂G может отображаться только в границу ∂O: $f(\partial G) \subset \partial O$.

2. Покажем, что множество O не имеет "внутренних"граничных точек, т. е. граничных точек, являющихся внутренними точками замыкания $\overline{O}$. Пусть J — множество таких точек. Легко видеть, что $J \subset P'$: если бы в окрестности некоторой точки $z_0 \in J$ отображение f было внутренним, то образ этой окрестности был бы окрестностью $w_0 = f(z_0)$, а образ J — нигде не плотным в ней; но ни одна точка $w_0 \in \partial G$ таким свойством обладать не может.

Если $z_0 \in \overline{J}$ и окрестность $U(z_0) \subset \overline{O}$, то образы отрезков лучей $\tau_1(z_0)$, $\tau_2(z_0)$, лежащих в U, должны принадлежать $\overline{G}$, что противоречит свойству границы ∂G (ведь $w_0 = f(z_0) \in \partial G$).

Итак, в любой окрестности каждой граничной точки множества $O = f^{-1}(G)$ имеются точки, внешние относительно O.

Покажем теперь, что замыкание $\bar{g}$ любой компоненты $g \subset O$ не разбивает z-плоскости.

Допустим противное. Так как $\bar{g} \subset D'$, то существует лишь одна неограниченная компонента дополнения $\mathbb{C} \setminus \bar{g}$, которая к тому же содержит граничный контур $\partial\overline{D'}$; поэтому найдется ограниченная компонента $g' \subset \mathbb{C} \setminus \bar{g}$, лежащая строго внутри D'. Область g' может содержать точки из O; но так как вблизи каждой граничной точки

∂O (в частности, $\partial g' \subset \partial g$) находятся точки, внешние для O, то (открытое) множество $g' \setminus \overline{O} \neq \emptyset$. Пусть $\tilde{g}$ — какая-либо ее компонента. Из построения следует, что образ $\tilde{g}'$ области $\tilde{g}$ полностью расположен вне многоугольника G, а потому граничные точки континуума $\tilde{g}_1$ отличные от точек ∂G, должны соответствовать внутренним точкам $\tilde{g}$, т. е. некоторым точкам из $P' \cap \tilde{g}$.

Построим наименьший многоугольник G_0, содержащий G и подобный ему относительно произвольной внутренней точки (из G), содержащий образ $\bar{\tilde{g}}_1$. Пусть $w_0 \in \bar{\tilde{g}}_1 \cap \partial G_0$ и ее какой-либо прообраз $z_0 \in \tilde{g}$. По предыдущему, $z_0 \in P'$. Но опять-таки начальные отрезки обоих лучей $\tau_1(z_0)$, $\tau_2(z_0)$ лежат полностью внутри $\tilde{g}$ и их образы в силу нульмерности f должны быть невырожденными континуумами в $\Omega_k(w_0)$, что противоречит свойству ∂G, а потому и ∂G_0.

Тем самым мы показали, что все компоненты из $O = f^{-1}(G)$ односвязны.

3. То, что каждая компонента $g \subset O$ является жордановой областью, вытекает из достижимости каждой точки границы ∂g — изнутри или извне — что означает, что ∂g есть непрерывная кривая, а из отсутствия для g "внутренних" граничных точек, — что у нее нет кратных точек.

Первое следует из того, что если граничная точка g не принадлежит P', то она принадлежит некоторой простой дуге на ∂g в окрестности которой f является внутренним отображением; причем f на ней является гомеоморфизмом, даже если она содержит точки ветвления f: это — из изолированности таких точек и гомеоморфизма f на каждом интервале смежности к ним.

Если же граничная точка g — из P', то образ одного из лучей τ, выходящих из нее, оказывается вне g.

Лемма 2 доказана.

Для завершения доказательства теоремы 2 нам остается показать лишь, что в ее условиях отображение f открыто.

Мы предположим, что этого нет. Тогда найдется круг d, $\bar{d} \subset D$ и внутренняя его точка z', образ которой $w' = f(z')$ является граничной для компакта $K = f(\bar{d})$; ясно, что $z' \in P'$. Можем считать, что w' не принадлежит образу $f(\partial d)$ граничной окружности; в противном случае мы бы заменили d на жорданову окрестность точки z', деформируя окружность ∂d так, чтобы возникающая замкнутая простая кривая не пересекала нульмерного множества $f^{-1}(w')$.

Из построения ясно, что найдется окрестность $V(w')$ вне образа $f(\partial d)$ граничной окружности круга d. Порядок всех точек из

$k = K \cap V(w')$ относительно $f(\partial d)$ равен нулю: иначе все точки V принадлежали бы образу $f(\bar{d})$ круга $\bar{d}$; это означает, в частности, что все точки из k являются образами точек из P'. Так как k содержит и образы регулярных точек (т. е. из $d \setminus P'$), близких к P', вместе с их окрестностями, то k содержит внутренние точки.

Компакт $\bar{k}$ не заполняет собой всю окрестность $V(w')$: ведь w' — его граничная точка. Покажем, что в $V \setminus \bar{k}$ нет горизонтального отрезка λ (т. е. параллельного оси абсцисс Ou) с концами на $\bar{k}$. Если бы такой отрезок существовал, то движением влево вдоль него (так мы выбрали системы координат) достаточно малого круга из $V \setminus \bar{k}$ и с центром на λ мы дошли бы до первой его точки $\tilde{w}$ касания с $\bar{k}$. Эта точка — граничная для k, поэтому она также (вместе с w') является образом некоторой внутренней точки z из P'. Лучи $\tau(\tilde{z})$, выходящие из этой точки, отображаются внутрь углов $\Omega_1(\tilde{w})$, $\Omega_2(\tilde{w})$, по построению которых начало одного из них должно попасть внутрь нашего круга, чего нет.

Отсюда легко следует, что граничные точки $\bar{k}$ лежат на графике однозначной относительно оси ординат Ov непрерывной функции (и даже с условием Липшица); и все точки справа от этого графика в круге V принадлежат k.

Проведем в V прямоугольник S со сторонами, параллельными осям координат так, чтобы левая вертикальная сторона его не пересекала $\bar{k}$, а правая — полностью принадлежала бы $\bar{k}$, причем содержала бы резидуальное (а, значит, несчетное) множество бесконечнократных точек отображения f; это возможно, в силу теоремы 2 гл. IX.

Почти очевидно, что к нашему прямоугольнику применима лемма 2 и прообразы его являются жордановыми областями $\{s_m\}$. Найдется область, у которой некоторый интервал границы отображается в правую вертикальную сторону S и содержащую бесконечное множество точек из P' с одним образом. Но в наших условиях для жордановой кривой в случае трех произвольных таких точек по крайней мере для двух из них обязательно пересекаются разноименные лучи; в то же время образы этих точек в S совпадают и разноименные углы Ω_k не пересекаются.

Это доказывает, что $f\,|_{D'}$ — действительно, является внутренним отображением: желаемое противоречие.

Вместе и теорема 1 о продолжении доказана.

Подчеркнем один момент. При выборе системы координат в z- и w-плоскостях мы нигде не требовали, чтобы нижние лучи τ_1 отображались именно в нижние углы Ω_1, а верхние τ — в верхние Ω. Доказанное нами говорит о том, что этого наперед и не нужно требовать: нужную ориентацию здесь индуцирует внутреннее отображение всего дополнения $D \setminus P$.

Выше (в гл. V, §6) мы уже ввели понятие функции с особенностью: это — непрерывная на отрезке функция, строго возрастающая (или только строго убывающая) на каждом интервале смежности к некоторому нигде не плотному совершенному множеству на этом отрезке; при этом если функкция не является монотонной на всем отрезке, то существует "большое"множество регулярно бесконечно-кратных ее значений. Все это мы сейчас и используем.

Определение 2. *Замкнутое в области $D \subset \mathbb{R}^n$ множество E назовем простым, если для каждой точки $x \in E$ найдется окрестность, в замыкании которой соответствующая часть множества E является либо $(n-1)$-мерным многобразием, либо имеет размерность $\leqslant n-2$.*

В случае $n = 2$ типичными примерами простых множеств можно назвать произвольные замкнутые подмножества простой дуги; это и подсказало общее название. Нашей целью будет доказательство следующей теоремы:

Теорема 3. *Пусть в области $Q \subset \mathbb{R}^n$ заданы простое множество E и непрерывная функция $F(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y)$, обладающие следующим свойством: пересечение $l \cap E$ каждой „вертикали" $l : x_1 = x_1^0, ..., x_{n-1} = x_{n-1}^0$ с E нигде не плотно на l, а функция $F(x_1, ..., x_{n-1}, y) = F(x, y)$ возрастает на каждом интервале смежности к $l \cap E$; при этом Q — выпукла в направлении оси $0y$. Тогда для каждого x функция $F(x, y)$ — возрастающая.*

Прежде всего, отметим, что без дополнительных ограничений на множестве E теорема, в общем случае, не имеет места. В самом деле, взяв функцию $F(x, y) = y - \theta(y)$ в кубе $I^n = I^{n-1} \times I$, убедимся, что для нее множество $I^{n-1} \times P_0$ ($(n-1)$-мерный „канторов гребешок") является существенной особенностью; но и простым в смысле нашего определения не является: нет локальной связности.

Конечно, нашу теорему достаточно доказать для случая, когда Q — это параллелепипед вида $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$. Более того, достаточно также доказать ее лишь в предположении, что $n = 2$, ибо нетрудно будет убедиться далее, что все основные построения при этом доказательстве дословно переносятся на случай любой размерности.

Оказывается, что в случае $n = 2$ можно сформулировать и доказать теорему при несколько более общих предположениях.

Назовем — специально для случая $n = 2$ — нигде не плотный компакт E простым, если для каждой точки $x \in E$ найдется окрестность, в замыкании которой соответствующая часть множества E является либо нульмерной, либо локально связной.

Еще раз подчеркнем, что все главные наши дальнейшие построения и выводы легко переносятся на случай произвольного n, когда возникают возможные $(n-1)$-многообразия.

Итак, мы доказываем теорему для прямоугольника $Q \equiv [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ с простым множеством $E \subset Q$ и непрерывной функцией $F(x, y)$, такой, что на каждой вертикали $l : x = x_0$ $(a \leqslant x_0 \leqslant b)$ она представляет функцию с возможной особенностью, принадлежащей пересечению $E \cap l$.

Произведем дальнейшие сведéния.

Если для плотного множества значений x на $[a, b]$ функция $F(x, y)$ возрастает (по y), то — так как предельный переход сохраняет монотонность — в этом случае заключение теоремы очевидно. Поэтому, предполагая теорему неверной, и выбирая, если нужно, меньший прямоугольник, можно считать, что $F(x, y)$ ни для одного x не является монотонной (по y); в частности, это означает, что каждая вертикаль $x = x'$, $x' \in [a, b]$, пересекает множество E.

Возьмем произвольную прямую $x = x'$, $a < x' < b$. По построению $F(x', y)$ есть функция с „особым множеством" (относительно свойства монотонности), содержащемся в $E_{x'} = E \cap \{x = x'\}$; найдутся тогда точки $y', y'' \notin E_{x'}$ на прямой $x = x'$ такие, что $F(x', y') = F(x', y'') = c'$ (§ 6 гл. V). Точки (x', y'), (x', y'') в прямоугольнике Q не принадлежат E, поэтому в их окрестностях для $F(x, y)$ справедлива теорема о неявной функции. Поэтому легко построить криволинейный „прямоугольник" над некоторым отрезком $[\alpha, \beta] \ni x'$, такой, что на нижней и верхней части его (криволинейных) сторонах вида $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ функция F принимает равные значения (отсюда также следует что каждая вертикаль в q пересекает E). Будем считать, что эти значения совпадают с нулевым: иначе рассмотрели бы функцию $F - c'$.

Рассмотрим отображение

$$\Phi : \begin{cases} u = x \\ v = F(x, y), \end{cases} \qquad (x, y) \in Q.$$

Легко видеть, что образ $\Phi(q)$ есть также криволинейный „прямоугольник" q' над отрезком $[\alpha, \beta]$ оси абсцисс $0u$ с криволинейными „горизонталями" $v = \varphi_1(u)$ и $v = \psi_1(u)$, где $\varphi_1(u) = \min\limits_I F(u, y)$ и $\psi_1(u) = \max\limits_I F(u, y)$ (напомним, что $u = x$); при этом для всех u имеем: $\varphi_1(u) < 0$ и $\psi_1(u) > 0$, так как вблизи всех точек нижней стороны $\{y = \varphi(x)\}$ F положительна – из-за строгого возрастания, — а вблизи верхней $\{y = \psi(x)\}$ – отрицательна.

Беря теперь вспомогательные гомеоморфизмы (сохраняющие вертикали), во-первых, квадрата $Q \equiv [0, 1] \times [0, 1]$ на q (например, вида

$$\begin{cases} \xi = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \\ \eta = \frac{y-\varphi(x)}{\psi(x)-\varphi(x)} \end{cases}$$

– положительного линейного гомеоморфизма для каждого фиксированного x), и, во-вторых, q' на прямоугольник $R \equiv [0, 1] \times [-1, 1]$, мы можем считать, что в условиях нашей теоремы функция $F(x, y)$ определена в квадрате Q, причем:

1) горизонтальные стороны $y = 0$ или 1, не содержат точек E и $F(x, 0) = F(x, 1) = 0$;
2) каждая вертикаль $x = x'$ пересекает E и единичный ее отрезок $[0, 1]$ содержит плотную систему отрезков строгого возрастания $F(x', y)$;
3) для каждого $x \in [0, 1]$:

$$\max_I F(x, y) = 1 \quad \text{и} \quad \min_I F(x, y) = -1.$$

Образом квадрата Q при отображении Φ (в комплексной записи):

$$\Phi(x, y) = x + iF(x, y) = u + iv$$

является весь прямоугольник $R \equiv [0, 1] \times [-1, 1]$, причем в горизонтальные стороны его $v = \pm 1$ отображаются только точки из E. Из утверждения I следует, что каждое множество $E_{x'} = E \cap \{x = x'\}$ отображается на весь отрезок $[-1, 1]$. Отображение Φ в точках $Q \backslash E$ является локальным положительным гомеоморфизмом.

Доказательство теоремы. Здесь нам потребуется одна лемма.

Для этого напомним понятие индекса плоского нигде не плотного компакта [1].

Индекс точки $x \in E$ есть наименьшее кардинальное число $\mathfrak{m}$, конечное или бесконечное, обладающее тем свойством, что при любом

$\varepsilon > 0$ существует множество B мощности $\mathfrak{m}$, которое ε-отделяет точку x (т.е. $E \setminus B$ — два открытых в E подмножества, одно из которых есть окрестность точки x).

Если точка x всегда может быть ε-отделена конечным множеством точек, мощность которого необходимо возрастает вместе с $\frac{1}{\varepsilon}$, то x называется точкой индекса ω.

Примем, что всегда $\aleph_0 > \omega > n$ при любом целом n ($\aleph_0$ — счетный кардинал).

Лемма. *Пусть для компакта E индекс в каждой его точке не более чем счетен. Тогда если $F(x, y)$ — непрерывна и нигде не постоянна в области $\overline{D} \supset E$, то на отрезке $[m, M]$ (m, M — $\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix} F$ в $\overline{D}$) найдется множество e всюду второй категории, такое, что для каждого $c \in e$ каждая компонента уровня $F(x, y) = c$ пересекает E по нигде не плотному на ней подмножеству. (ср. с теоремой гл. IX)*

Доказательство. Если это не так, то существует множество $e^{'} \subset [m, M]$ не первой категории значений c, таких, что какая-то из компонент уровня $F = c$ содержит целую открытую порцию, принадлежащую E.

Обозначим через e'_n множество таких c, для которых такая порция имеет диаметр $\geqslant \frac{1}{n}$.

Докажем, что e'_n — замкнуто. Пусть $c_k \in e'_n$ и $c_k \to c_0$. Можем предположить, что соответствующие континуумы (диаметра $\geqslant \frac{1}{n}$) сходятся к континууму K_0; ясно, что $F/K_0 = c_0$, а, в силу замкнутости E, $K_0 \in E$. Но это и доказывает нужное.

Очевидно, далее, что $e' = \bigcup\limits_n e'_n$. Тогда найдется отрезок $[c_1, c_2] \subset e'_n$ при некотором n. Но это и означает, что в E найдется несчетное множество непересекающихся континуумов диаметра $\geqslant \frac{1}{n}$, а, значит, и континуум несчетной конденсации, в точках которого, следовательно, индекс несчетен [1], чего не может быть по условию.

Отметим, что, например, для любого локально-связного континуума условие леммы выполняется.

Доказательство теоремы. Так как горизонтальные стороны $y = 0, 1$ квадрата Q не пересекаются с E, то найдутся равные прямоугольники g', g'', примыкающие к ним и также вне E; их гомеоморфные образы G', G'' мы можем также считать прямоугольниками в R: G' примыкает к отрезку $l \equiv \{0 \leqslant u \leqslant 1; v = 0\}$ снизу, а G''

– сверху. Открытый прямоугольник $G' \cup G'' \cup l$ обозначим через G и рассмотрим полный прообраз $\Phi^{-1}(G)$ в Q.

Можем считать, что для горизонтальных сторон G выполняется заключение леммы.

Прообраз $\Phi^{-1}(G)$ состоит из не более чем счетного множества (открытых) компонент:

$$\Phi^{-1}(G) = \bigcup_k g_k$$

Обязательно найдутся компоненты g_k, замыкания которых разбивают квадрат Q (т.е. они соединяют вертикальные его стороны): если бы таких не было, можно было бы соединить некоторой дугой λ нижнюю сторону g' с верхней стороной g'', не пересекая $\Phi^{-1}(G)$; в образе (внутри R) мы получили бы путь, соединяющий нижнюю сторону G' с верхней для G'', не пересекающий прямоугольник G, что, очевидно, невозможно по построению.

Мы и рассмотрим только такие компоненты. Каждая из этих компонент – которые и дальше будем обозначать через g_k – имеет верхнюю и нижнюю часть своей границы в Q; эти части суть континуумы, как совместные границы двух областей: g_k и дополнения $Q \setminus \bar{g}_k$ выше g_k и ниже. Эти континуумы также разбивают Q — соединяют некоторые точки его вертикальных сторон. Наконец, образ всей границы ∂g_k принадлежит границе прямоугольника G; при этом, очевидно, образы каждого из указанных выше континуумов совпадают с одной из граничных горизонтальных сторон ∂G.

Покажем, что в наших условиях таких разбивающих g_k — конечное число.

Прежде всего, ясно, что компонент g_k, которые отображаются на весь прямоугольник G — конечное число: следует просто из равномерной непрерывности Φ в Q.

Поэтому, если рассматриваемых g_k — бесконечное множество, то можно считать, что образ всей границы ∂g_k внутри R содержит лишь одну из горизонтальных сторон G (но и части его вертикальных сторон); это, в частности, означает, что каждая вертикаль $x = \text{const}$ внутри g_k пересекается с E. Так вот, если таких g_k — бесконечное множество, то — по известной теореме сходимости [1] — для некоторой подпоследовательности их (связных) замыканий существует предельный (и нигде не плотный) континуум K, конечно, также разбивающий Q. Ясно, что $K \subset E$; но из построения следует, что в каждой окрестности его точек множество E не является локально связным.

Итак, между прямоугольниками g', g'' внутри Q имеется лишь конечное число разбивающих компонент $g_k \subset \Phi^{-1}(G)$:

$$g_1, g_2, \dots, g_{k_0},$$

причем примем, что каждое g_{k+1} расположено <u>ниже</u> g_k.

Соединим нижнюю граничную сторону $\partial g'$ с верхней частью границы ∂g_1 дугой λ_1, не пересекающей $\Phi^{-1}(G)$. Далее, дугой λ_2 соединим нижнюю часть ∂g_1 с верхней — ∂g_2: $\lambda_2 \cap \Phi^{-1}(G) = \varnothing$ и т.д. Наконец, соединяем дугой λ_k нижнюю часть ∂g_k с верхней граничной стороной прямоугольника g''. Образы всех λ_k лежат вне прямоугольника G (кроме их концов).

Докажем сначала, что если верхняя часть границы ∂g_k отображается на нижнюю сторону ∂G, то она будет образом и нижней ее части.

В самом деле, если бы нижняя часть ∂g_k отображалась на верхнюю сторону ∂G, то образ g_k совпадал бы с G и со степенью „-1". Но добавив к $\bar{g}_k$ точку локального гомеоморфизма Φ, лежащую на ∂g_k, (а такие есть, в силу леммы), вместе с соответствующей окрестностью, получим, что степень отображения расширенной области g_k положительна, чего нет.

Возвращаясь к нашим областям g_k и дугам λ_k, получим последовательно, что верхняя часть границы ∂g_1 должна отображаться на нижнюю сторону ∂G, а, значит, туда же отображается и нижняя часть ∂g_k, то же – и для $g_2, \dots, g_{k_0}$. Но последняя дуга λ_{k_0}, соединяющая нижнюю часть ∂g_{k_0}, переходящую на <u>нижнюю</u> сторону ∂G, с верхней граничной стороной прямоугольника g'', переходящей в <u>верхнюю</u> сторону ∂G; т.е. образ λ_{k_0} должен был бы пересечь прямоугольник G, чего не должно быть по построению.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Заметим сразу, что для случая с „канторовым гребешком" и функции $F = y - \theta(y)$, легко, используя, например, точку y_0, для которой $F'(y_0) = -\infty$, построить прямоугольники g_k, у которых нижняя сторона переходит при отображении Φ в верхнюю сторону прямоугольника G, а верхняя — в нижнюю.

Дадим еще одно приложение доказанной теоремы.

Назовем (временно) непрерывную функцию $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ сингулярной, если существует такое замкнутое нигде не плотное множество $P \subset [a, b]$, в каждом интервале к которому функция f постоянна.

Конечно, классическими примерами такой функций являются: „канторова лестница" $y = \theta(x)$, функция меры совершенного нигде не плотного множества $P \subset [a, b]$ положительной меры, т.е.

интеграл $\int\limits_a^x c_P(t)dt$ от характеристической функции множества P: $c_P(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in P \\ 0 & \text{при} \quad x \in [a,b] \setminus P \end{cases}$ и др. Но это примеры монотонных сингулярных функций.

А вот общий прием построения сингулярных функций, у которых „особым" множеством служит канторово совершенное множество P_0: взяв произвольную непрерывную функцию $\varphi(y)$, $y \in [0,1]$, искомую функцию получим в виде $f(x) = \varphi[\theta(x)]$, $x \in [0,1]$.

Как следствие нашей теоремы, выведем следующее утверждение:

Пусть в кубе I^n задана непрерывная функция $F(x_1, ..., x_{n-1}, y) = F(x,y)$, сингулярная по y для каждого x. Если совокупное особое множество E этих сингулярностей является простым, то $F(x,y)$ постоянна для каждого x.

Другими словами, если задано непрерывное семейство $F(x,y)$ сингулярных функций и объединение их „особых" множеств принадлежит простому множеству $E \subset I^n$, то оно является семейством постоянных.

Пример функции $F(x,y) = \theta(y)$, $x \in I^{n-1}$ (с $(n-1)$-мерным „канторовым гребешком") показывает, что и здесь необходимы дополнительные предположения о структуре совместного особого множества E для того, чтобы утверждение имело место.

А само утверждение следует из рассмотрения вспомогательных функций $F \pm \varepsilon \cdot y$. Тогда, по нашей теореме, при любом $\varepsilon > 0$ функция $F + \varepsilon \cdot y$ будет возрастающей (по y) для каждого ε, а предельная – при $\varepsilon \to 0$ – функция F окажется неубывающей. Рассматривая $F - \varepsilon \cdot y$, придем к заключению, что F одновременно и невозрастающая. Отсюда – и утверждение.

2. Вторая теорема о продолжении

Теорема 1 §1 показывает, что введение пары линейно независимых направлений $\tau_1(z)$, $\tau_2(z)$ (для каждой точки $z \in P$) и с примерно такими же образами позволяет "стереть"произвольное нигде не плотное множество P возможных особых точек внутреннего отображения. Но если это условие не выполнено, т. е. лучи τ_1 и τ_2 либо совпадают, либо являются продолжениями одно другого, то простые примеры показывают, что утверждение этой теоремы в общем случае неверно. Например, для отображения $f(z) = x + i(y - \theta(y))$ единичного квадрата каждая горизонталь $y = \mathrm{const}$ тождественно отображается на некоторую другую горизонталь, в то же время канторов "гребешок"$P = P_0 \times I$ является здесь неустранимой особенностью (P_0 здесь — канторово множество на оси Oy).

Тем не менее для введенного нами выше класса простых множеств P и здесь можно привести свою теорему о продолжении

Определение 2. Скажем, что непрерывное отображение $w = f(z)$, $z \in D$ обладает свойством T' в точке z_0, если через эту точку проходит прямая $t(z_0) = t' \cup t''$ (где t', t'' — лучи, образующие продолжение один другого) такая, что образ ее есть кривая $l(w_0) = l' \cup l''$, $w_0 = f(z_0)$, с определенными полукасательными $\mathrm{T}'(w_0)$, $\mathrm{T}''(w_0)$ для l', l'' в точке w_0, объединение которых есть (касательная) прямая $\mathrm{T}(w_0)$.

Нашей целью будет доказательство следующей основной здесь теоремы:

Теорема 4. Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — непрерывное нульмерное отображение, являющееся внутренним и положительными в $D \setminus P$, где P — простое в D множество. Если f обладает свойством T' в каждой точке множества P, исключая не более чем счетное его подмножество, то оно является внутренним во всей области D

Доказательство здесь мы будем проводить примерно по той же схеме, что и в первой теореме о продолжении.

Прежде чем сформулировать аналог леммы 1 §1, сделаем одно замечание. В отношении свойства T' будем рассматривать прямую $t(z_0)$ (а тогда и $\mathrm{T}(w_0)$) как ориентированную прямую; для этого достаточно зафиксировать на ней некоторый луч с начальной точкой z_0, который мы временно назовем отмеченным и обозначим через $t_0(z_0)$.

Лемма 3. *Пусть отображение $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывно и $P \subset D$ — произвольное замкнутое множество; пусть, далее, f обладает свойством T' во всех точках множества $N \subset P$ не первой категории на P. Тогда найдутся порция $P' \subset P$ и числа $\sigma, \delta > 0$, такие, что через каждую точку $z \in P'$ проходит ориентированная прямая $\tau(z)$ с отмеченным лучом $\tau_0(z)$ и со следующими свойствами:*

1) $[\tau_0(z'), \tau_0(z'')] < \sigma$ для любых точек $z', z'' \in P'$;

2) $\rho(P', \partial D) > \delta$;

3) если $P_1' = f(P')$ то каждая точка $w = f(z) \subset P_1'$ является вершиной пары вертикальных углов $\Omega(w) = \Omega_0 \cap \Omega_1$ раствора 4σ, полученных параллельным переносом фиксированной пары углов $\Omega = \Omega_0 \cap \Omega_1$ и обладающих тем свойством, что образ $\lambda(w)$ отрезка прямой $\tau(z)$ с центром z и длины 2δ расположен внутри углов

$\Omega(w)$*: каждая половина — в своем угле; при этом образ отрезка из* $\tau_0(z)$ *принадлежит* $\Omega_0(w)$.

Доказательство этой леммы легко получить из доказательства леммы 1, если внести в него очевидные и много упрощающие изменения, поэтому мы приводить его не будем.

Предположим, что теорема неверна. Можем считать тогда множество P таким, что ни в какой окрестности любой его точки отображение f не является внутренним. Выделяя, если нужно, по лемме 1, соответствующую порцию, мы можем считать далее, что D — жорданова область и для P выполнены условия 1-3 леммы: f непрерывно в $\overline{D}$ и $f\ |_D$ замкнуто. Покажем, что в этой области отображение f оказывается внутренним, что и явится искомым противоречием.

Тем не менее, правую систему координат Oxy в z-плоскости выберем так, чтобы положительная полуось Ox была параллельной одному из отмеченных лучей $\tau_0(z')$ некоторой произвольно выбранной точки $z' \in P$. Точно так же в w-плоскости (правую) систему координат Ouv выберем так, чтобы ось Ou была параллельной биссектрисе угла $\Omega_0 \subset \Omega$.

Будем рассматривать системы $\{G\}$ выпуклых многоугольников (называя их допустимыми) со свойством: если в произвольную точку w границы ∂G параллельно перенести пару вертикальных углов $\Omega(w) = \Omega_0 \cap \Omega_1$, то один из этих углов окажется внутри G, а другой — вне; это — кроме, возможно вершин G.

И здесь справедливо утверждение, аналогичное лемме 2 §1:

Лемма. *Пусть* G *— допустимый многоугольник системы* $\{G\}$*, такой, что* $\overline{G} \cap f(\partial D) = \emptyset$*. Тогда компоненты открытого множества* $O = f^{-1}(G) \subset D$ *суть жордановы области.*

Доказательство. Прежде всего, легко видеть, что §1 в доказательстве леммы 2 полностью проходит и здесь и, следовательно, как и там, в наших условиях граничным точкам G могут соответствовать лишь граничные точки O, множество O не имеет "внутренних"граничных точек и замыкание $\bar{g}$ любой компоненты $g \subset O$ не разбивает плоскость, другими словами, каждая из этих компонент односвязна.

Теперь, как и в лемме 2 §1, то, что каждая компонента $g \subset O$ является жордановой областью следует из достижимости точек границы ∂g — в данном случае изнутри и извне: точки ∂g вне P' принадлежат простым дугам, а для точек из P' образы лучей соответствующих прямых τ оказываются: один — внутри g, другой — вне.

Лемма доказана.

Мы рассмотрим подробнее частный случай допустимых многоугольников, а именно, систему $\{\Delta\}$ равнобедренных треугольников w-плоскости, у каждого из которых: а) основание принадлежит вертикали $v = \mathrm{const}$; б) боковые стороны расположены влево от основания.

Пусть Δ — допустимый (равнобедренный) треугольник ABC с вершинами $A(b, c)$, $B(b, d)$, $C\left(a, \frac{c+d}{2}\right)$ $(a < b)$; остальные треугольники нашей системы явятся его частями. Если бы всегда для таких Δ каждая (жорданова) компонента $g \subset f^{-1}(\Delta)$ отображалась на все Δ, то отсюда легко следовала бы открытость отображения f в области.

Предполагая противное, найдем $g \subset f^{-1}(\Delta)$ такое, что $f(g) \neq \Delta$; мы хотим получить более полную характеристику такой компоненты.

Мы знаем, что в границу $\partial\Delta$ отображаются только граничные точки g. Следовательно, образ $f(\partial g)$ есть связная ломаная на границе Δ. Убедимся теперь в том, что $f(\partial g)$ не может содержать все вершины Δ.

Возьмем точку w внутри Δ, не принадлежащую $f(g)$, а значит, не принадлежащую $f(\bar{g})$ (в силу только что сделанного замечания относительно границ ∂g и $\partial\Delta$), и проведем через нее горизонтальную прямую $\lambda(w)$ $(v = \mathrm{const})$. Если (связное) множество $f(\partial g)$ на контуре треугольника ABC содержит все его вершины, то очевидно, что прямая $\lambda(w)$ пересекает его в некоторой точке w'; произвольно малым сдвигом точки со можно добиться, чтобы w' была внутренней точкой образа $f(\bar{g})$ относительно $\overline{\Delta}$ — это следует из того, что $f(\bar{g})$ есть компакт, двумерный в каждой точке (как нульмерный образ такого же компакта $\bar{g}$). Пусть для определенности точку w' содержит левый луч $\lambda_1(w)$ прямой $\lambda(w)$. Выходя из точки w, будем перемещать правый угол Ω_0 вдоль $\lambda_1(w)$ по направлению к w'. Найдется при этом первая точка $\tilde{w} \in \lambda_1(w)$ такая, что угол $\Omega_0(\tilde{w})$ будет иметь общую граничную точку w_0 с $f(\bar{g})$. Очевидно, что ей в g может соответствовать только внутренняя точка z_0 и притом только из P. По построению угол $\Omega_0(w_0) \subset \Omega_0(\tilde{w})$, $w_0 = f(z_0)$, и, следовательно, лежит вне $f(\bar{g})$, в то время как начальный отрезок луча $\tau_0(z_0)$ принадлежит внутренности g — противоречие: ведь невырожденный континуум $f(\tau_0(z_0)) \subset \Omega_0(w_0)$ (невырожденность — в силу нульмерности f).

Указанную здесь конструкцию с перемещением угла и отысканием граничной точки $w_0 \in f(\bar{g})$ назовем для краткости нахождением правой крайней точки образа $f(\bar{g})$: существование такой точки, как мы видели, невозможно (в наших условиях). Аналогично с понятием нахождения левой крайней точки.

Легко, например, с помощью этой конструкции доказать, что $f(\partial g)$ обязательно содержит одну из вершин Δ.

Покажем теперь, что образ $f(\partial g)$ должен обязательно содержать только либо вершину A, либо B и притом в качестве внутренней точки. В самом деле, если ломаная $f(\partial g)$ вообще не содержит ни A, ни B, то она должна содержать вершину C, но в этом случае легко найти крайнюю правую точку образа $f(\bar{g})$ внутри Δ. Точно так же убедимся, что A или B могут принадлежать $f(\partial g)$ только как внутренние точки.

Пусть для определенности $A \in f(\partial g)$. Тогда вершина B не может принадлежать ломаной $f(\partial g)$; в противном случае ей принадлежали бы вообще все вершины Δ, что легко доказать тем же методом нахождения крайних точек.

Мы докажем, что $f^{-1}(A)$ содержит ровно две точки на ∂g и, следовательно, пары боковых сторон допустимых треугольников AB_1C_1 внутри ABC, дающие расслоение последнего, в прообразе g дадут нам соответствующее расслоение его на простые дуги. Для четкости разобьем доказательство на пункты.

1. Окрестность точки A**.** Так как, очевидно, $\deg f\ |_{\bar{g}} = 0$, то образ $f(\bar{g}) = f(\bar{g} \cap P)$, и, в частности, $f(\partial g) = f(\partial g \cap P)$. Пусть $w_0 \in f(g) = f(g \cap P)$ — произвольная точка, а $z_0 \in g \cap P$ — один из ее прообразов. Ближайшие к z_0 точки пересечения прямой $\tau(z_0)$ с жордановой кривой ∂g и лежащие по разные стороны от z_0 обозначим через B_1' и C_1'. Их образы $B_1 = f(B_1')$, $C_1 = f(C_1')$ являются точками пересечения кривой $l(w_0) = f(\tau(z_0))$, лежащей внутри углов $\Omega(w_0)$, с контуром $\partial\Delta$; из геометрических соображений очевидно, что эти углы не содержат вершины A и каждый из них пересекает либо сторону AB, либо пару сторон $AC \cup CB$ треугольника Δ. Будем считать, что $C_1 \in AC \cap CB$ и $B_1 \in AB$, тем самым мы уславливаемся считать, что C_1' есть точка левого луча прямой $\tau(z_0)$, а B_1' - правого (Рис. 16).

Возникающие здесь две дуги на ∂g с концами C_1', B_1' содержат точки из $f^{-1}(A)$ — это следует из их связности и того, что образы их содержат точки C_1, B_1 и того, что вершина B не принадлежит $f(\partial g)$.

Через $\Delta' \subset \Delta$ обозначим ограниченную компоненту дополнения к кривой $l(w_0) \cup C_1AB_1$ для которой A является граничной точкой. Из нашего построения следует, что для каждой точки $w \in \Delta'$ для одной из жордановых областей $g', g'' \subset$, определяемых отрезком $C_1'B_1'$ прямой $\tau(z_0)$, имеем $\Gamma(w, f, g') = -1$, а для другой $\Gamma = +1$. В частности

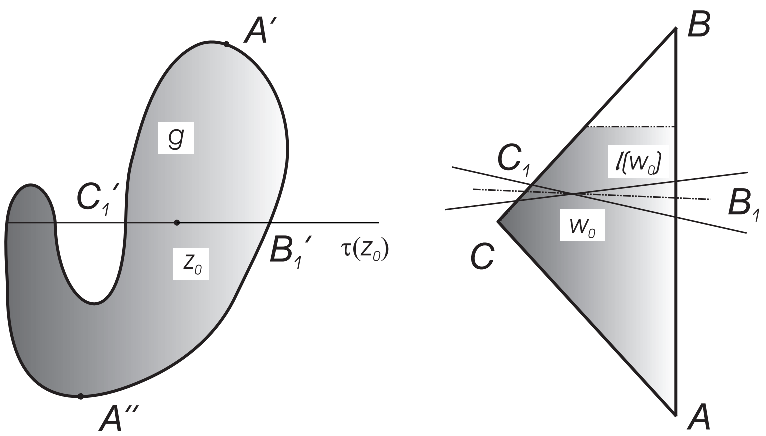

Рис. 16

(в силу $\Gamma \neq 0$ и теоремы существования корней (§3 гл. IX)), образы $f(g'), f(g'') \supset \Delta'$, т. е. эти образы содержат полную окрестность (относительно Δ) точки A.

2. $f^{-1}(A)$ **— не более чем из двух точек.** Из того что $\Gamma(w, f, g') = -1$, $w \in \Delta'$, следует, что $f(\overline{g'}) = f(\overline{g'} \cap P)$, в частности, найдется точка $A' \in P \cap f^{-1}(A)$. Покажем, что точек прообраза $f^{-1}(A)$, принадлежащих P, может быть не более двух.

Предположим, что имеются три точки $A', A'', A''' \in P \cap f^{-1}(A)$. Так как образы прямых $\tau(A')$, $\tau(A'')$, $\tau(A''')$ принадлежат вертикальным углам $\Omega(A)$, не пересекающим Δ, то и эти прямые не пересекают компоненту g. Каждая из ("почти"горизонтальных) прямых $\tau(A^{(k)})$ $(k = 1, 2, 3)$ делит плоскость на две полуплоскости, которые естественно назвать верхней и нижней. По крайней мере, для одной пары точек, пусть A' и A'', область g будет расположена в одноименных полуплоскостях, пусть нижних (определяемых, следовательно, прямыми $\tau(A')$, $\tau(A'')$).

Прямые $\tau(A')$, $\tau(A'')$ либо совпадают, либо пересекаются своими разноименными лучами: и в том и в другом случае можно говорить что одна из точек A', A'' находится правее другой; будем считать, что A'' правее A', Эти прямые вместе с дугой $A'A'' \subset \partial g$ ограничивают некоторую область h, расположенную вне g (или несколько таких областей, если прямые $\tau(A')$, $\tau(A'')$ могут касаться границы ∂g в других точках из $f^{-1}(A)$; мы берем одну из них).

Образ границы ∂h содержит не более двух отрезков сторон угла $A \in \bar{\Delta}$ и частей образов прямых $\tau(A')$, $\tau(A'')$, расположенных внутри углов $\Omega(A)$. Отсюда следует, что образ $f(h)$ самой области h обязательно содержит точки, расположенные между $\bar{\Delta}$ и $\Omega(A)$. Пусть, например, $w' \in f(h)$ — точка, лежащая между $\bar{\Delta}$ и $\Omega_0(A)$. Так как, очевидно, $\Gamma(w', f, h) = 0$, то найдется точка $z' \in P \cap h$, для которой $f(z') = w'$. Правый луч $\tau_0(z')$ прямой $\tau(z')$ должен пересечь либо область g, либо левый луч $\tau_1(A'')$ прямой $\tau(A'')$ (напомним, что A'' находится правее A'); но образ этого правого луча, расположенный в правом угле $\Omega_0(w')$, по построению не пересекает $\bar{\Delta}$, а также угол $\Omega_1(A)$, содержащий образ левого луча $\tau(A'')$. Аналогично разбирается случай, когда $f(h)$ содержит точки между $\bar{\Delta}$ и $\Omega_1(A)$.

Итак, мы показали, что на границе ∂g может быть не более двух точек из $f^{-1}(A)$, принадлежащих P.

3. $f^{-1}(A)$ **— точно из двух точек.** Если их в точности две — A' и A'', то из нашего доказательства следует, что область g расположена между ("почти"горизонтальными) прямыми $\tau(A')$ и $\tau(A'')$, при этом точка A' лежит выше точки A'' так как левой дуге $A'A'' \subset \partial g$ должна отвечать левая сторона $AC \subset \bar{\Delta}$: ведь у нас $\Gamma(f, g') = -1$. Покажем, что в этом случае ∂g больше не содержит никаких точек из $f^{-1}(A)$. Пусть, например, левая дуга $A'A''$ содержит точку $A_0 \in f^{-1}(A)$. Из предыдущего следует, что $A_0 \notin P$. На дополнительном к P интервале (α, β) из ∂g, содержащем точку A_0, отображение f гомеоморфно; отсюда легко следует, что концы его не могут совпадать ни с A', ни с A''. По крайней мере один из этих концов отображается в точку B' основания $AB \subset \bar{\Delta}$. Но конец этот — точка левой дуги $A'A''$, поэтому правый луч τ_0 ее должен пересекать область g, в то время как его образ, лежащий в правом угле $\Omega_0(B')$ треугольника, Δ не пересекает.

Пусть теперь $f^{-1}(A)$ содержит лишь одну точку из P; по построению это будет обязательно A', и область g расположится в нижней полуплоскости, определяемой прямой $\tau(A')$. Так как точка A разбивает ломаную $f(\partial g)$, то $f^{-1}(A)$ также разбивает замкнутую жорданову кривую ∂g, а потому, кроме A', должно содержать некоторое множество регулярных точек. Покажем, что это множество содержит одну-единственную точку.

Пусть оно содержит две регулярные точки: A_1 и A_2. Отобразим гомеоморфно замкнутую кривую ∂g на отрезок $I \equiv [0, 1]$ оси Ox, не различая при этом концевых точек отрезка, так, чтобы точка A' в образе не разделяла пары A_1, a_2, и распрямим образ — ломаную $f(\partial g)$ просто в отрезок I_1. Так как f сохраняет ориентацию вне P, то наше предположение приводит к следующему: на отрезке I существует функция φ с особым нульмерным множеством P, вне которого она возрастает, причем некоторый уровень $\varphi^{-1}(c)$ содержит две регулярные точки a_1, a_2 и единственную точку $a' \in P$, лежащую вне отрезка

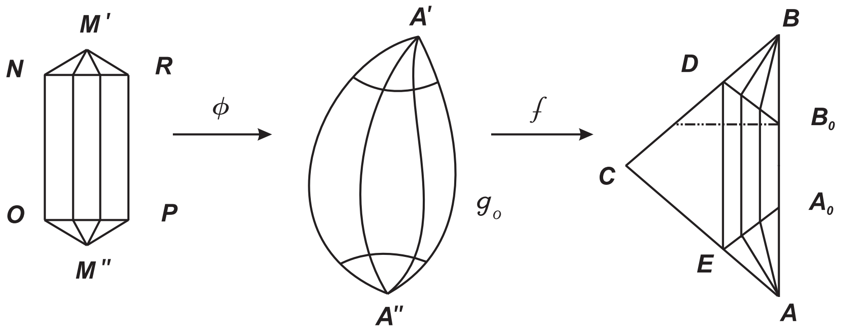

Рис. 17

$[a_1, a_2]$. Но это невозможно, так как легко видеть, что в этих условиях отрезок $[a_1, a_2]$ содержит обязательно и точку уровня $\varphi^{-1}(c)$, принадлежащую P.

4. Расслоение области g**.** Рассмотрим теперь семейство всех равнобедренных треугольников внутри $\triangle ABC$ с общим основанием AB и общей с ABC биссектрисой. Все они допустимы, к ним относится все нами доказанное для ABC. Каждому из них соответствуют в прообразе свои жордановы области; так как $f^{-1}(A)$ содержит ровно две точки A', A'', то для каждого из наших $\triangle ABC'$ одной из таких областей явится жорданова подобласть g', ограниченная, кроме дуги $f^{-1}(AB)$, еще и дугой внутри g, содержащей точки A', A'', и соответствующей боковым сторонам $\triangle ABC'$. Пары этих боковых сторон образуют (так сказать, "двузвенное") расслоение треугольника ABC; из наших построений следует, что ему соответствует и расслоение жордановой области g на простые дуги с концами A', A''. Отметим, что — из тех же построений — каждая из этих дуг пересекает множество P'.

Почти очевидно, что можно построить отображение φ какого-либо прямоугольника $KLMN$ из вспомогательной ω-плоскости ($\omega = \xi + i\eta$) со сторонами, параллельными осям координат на область $\bar{g}$ так, чтобы горизонтальные стороны его стягивались в точки A', A'', а внутренность гомеоморфно отображалась в $\mathrm{Int}\bar{g}$ так, что каждой вертикали $\xi = \mathrm{const}$ соответствовала своя дуга из расслоения g.

Так как при гомеоморфизме сохраняются локальная связность и нульмерность, то множеству P' внутри g соответствует в прямоугольнике $KLMN$ также простое множество P_0. При этом каждая вертикаль пересекает его, а на каждом интервале смежности к P_0 этой вертикали мнимая часть отображения $\Phi = f \circ \varphi$ строго возрастает —

это следует из локального сохранения ориентации вне P_0 (молчаливо уславливаясь, что все рассмотренные нами плоскости z-, w-, ω- — правоориентированы).

Но по теореме 3 Φ в этом случае должно быть гомеоморфизмом всего прямоугольника $KLMN$: а отсюда — гомеоморфизм $f\,|_g$, чего нет, ведь мы видели уже, что $f(\bar{g}) = f(\bar{g} \cap P')$, а это означает, в частности, что внутри g имеется много бесконечно-кратных точек.

Полученное противоречие доказывает, наконец, нашу теорему 4.

Глава 11

Дифференциальные свойства комплексных функций

1. Дифференцируемость открытых отображений

Когда говорят о дифференцируемости (почти всюду) открытых отображений, обычно ссылаются на Геринга и Лехто [1], которые доказали, что открытое отображение $w = f(z)$ плоской области $D \subset \mathbb{C}_z$ в $\mathbb{C}_w$ будет почти всюду дифференцируемым в D, если оно обладает почти всюду же конечными частными производными $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Но при этом забывают (или просто не знают), что еще гораздо раньше Д.Е. Меньшовым была доказана намного более общая теорема.

Мы приведем здесь ее формулировку и доказательство, а также в определенном смысле двойственную ей теорему.

Т е о р е м а 1. (Д.Е. Меньшов [2]). *Пусть отображение $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывно и открыто*[1]. *Пусть из каждой точки z измеримого множества $\mathcal{E} \subset D$ исходят ν лучей $t_\rho(z)$ $\rho = 1, 2, \ldots, \nu$, расположенные на различных прямых, причем*

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| < \infty,$$

где $z + h \in t_k(z)$ $(k = 1, 2)$.

Тогда f дифференцируема почти всюду на $\mathcal{E}$.

При доказательстве мы воспользуемся леммой 5 §4, гл. III — т.е. для случая $n = 2$ — и применительно к комплексной функции f: в этой лемме мы можем предположить, что $\sigma < \frac{\pi}{2000}$. Так как площадь единичного параллелограма Δ равна $\sin\alpha$, где α — угол между его соседними сторонами, и (в силу леммы) $\sin\alpha > 900\sigma \cdot 8$, то, как легко видеть, в нашем случае лемму 5 можно переформулировать следующим образом:

[1] У Д.Е. Меньшова здесь — предположение однолистности f, но его доказательство, как мы увидим, без изменений переносится на произвольные открытые отображения

Лемма 1. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — произвольное непрерывное отображение и $P \subset D$ — некоторое замкнутое множество. Пусть из каждой точки $z \in P$ исходят два луча $t_1(z)$ и $t_2(z)$, расположенные на различных прямых, причем*

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right| < \infty,$$

при $z + h \in t_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$. Тогда найдутся: порция $P' \subset P$, расположенная внутри области D, и положительное число σ, такие, что из каждой точки $z \in P'$ исходят два луча $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$, обладающие следующими свойствами:

1) $[\widehat{\tau_i(z'), \tau_i(z'')}] < \sigma$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ для любых точек $z', z'' \in P'$;

2) $100\sigma < [\widehat{\tau_i(z), \tau_j(z)}] < \pi - 100\sigma$ $(\sigma < \frac{\pi}{2000}$, $i \neq j)$ для каждой точки $z' \in P'$;

3) расстояние от множества P' до границы области D больше σ;

4) $\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right| < \frac{1}{\sigma}$ для каждой точки $z \in P'$ и всех $\zeta \in \tau_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$, удовлетворяющих неравенствам $0 < |\zeta - z| < \sigma$.

Выведем сразу из этой леммы одно следствие, которым воспользуемся несколько позже и которое сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.*Пусть в области D задана произвольная непрерывная функция $f(z)$ и $P \subset D$ — некоторое совершенное множество. Пусть из каждой точки z некоторого множества $N \subset P$ не первой категории на P исходят три луча $t_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$, расположенные на различных прямых, причем*

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right| < \infty, \text{ где } z+h \in t_i(z) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Тогда найдутся порция $P_0 \subset P$ и постоянная $L > 0$, такие, что

$$|f(z_2) - f(z_1)| < L|z_2 - z_1|$$

для произвольных точек $z_1, z_2 \in P_0$.

Доказательство. В силу леммы 1, взятой для нашего случая $\nu = 3$, найдутся порция $P' \subset P$ и число $\sigma > 0$, удовлетворяющие условиям 1-4 этой леммы. Возьмем произвольную точку $z \in P'$. Так как P' открыто относительно P, то существует круг $|z' - z| < r$ с центром в точке z такой, что порция P_0 множества P', определяемая этим кругом, является одновременно и порцией множества P.

Очевидно, можно считать, что этот круг расположен внутри концентрического круга

$$|z' - z| < \frac{1}{2}\sigma \sin 100\sigma. \tag{1}$$

Докажем для найденной порции $P_0 \subset P$ утверждение теоремы 1.

Рассмотрим произвольные точки $z_1, z_2 \in P_0$, $z_1 \neq z_2$. Могут представиться две возможности.

1. Одна из точек z_1, z_2 лежит на луче $\tau_i(z_1)$, $\tau_i(z_2)$ $(i = 1, 2, 3)$, соответствующем другой точке.

Тогда в силу свойства 4 леммы 1 будем иметь

$|f(z_2) - f(z_1)| < \frac{1}{\sigma}|z_2 - z_1|$.

2. Каждая из точек z_1 и z_2 лежит внутри одного из углов, образованных лучами $\tau_i(z_1)$, $\tau_i(z_2)$, соответствующими другой точке.

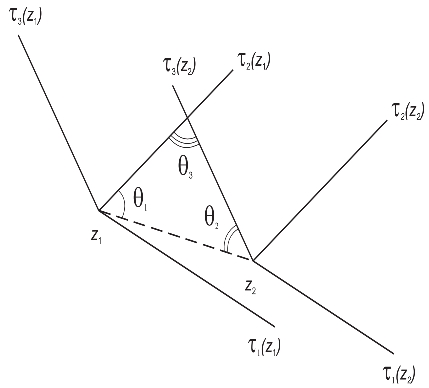

Рис. 18

Предположим для определенности, что точка z_2 лежит внутри угла, образованного лучами $\tau_i(z_1)$ и $\tau_i(z_2)$ (Рис. 18). Из свойств 1 и 2 лучей $\tau_i(z)$ (лемма 1) вытекает, что

$$100\sigma < [\widehat{\tau_i(z_1), \tau_j}(z_2)] < \pi - 100\sigma \tag{2}$$

при $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$; отсюда следует, что луч $\tau_3(z_2)$ обязательно пересекает один из лучей $\tau_1(z_1)$ и $\tau_2(z_2)$ в некоторой точке $\tilde{z}$ на плоскости. Пусть $\tilde{z} \in \tau_2(z_1)$.

Рассмотрим треугольник с вершинами в точках z_1, z_2, $\tilde{z}$ и соответственными углами η_1, η_2, $\tilde{\eta} \equiv [\widehat{\tau_2(z_1), \tau_3}(z_2)]$. Из (2) имеем $100\sigma < \tilde{\eta} < \pi - 100\sigma$, и, следовательно, $\sin\eta > \sin 100\sigma$. Легко находим

$$|z_1 - \tilde{z}| = \frac{\sin\eta_2}{\sin\eta}|z_2 - z_1| < \frac{1}{\sin 100\sigma}|z_2 - z_1|. \tag{3}$$

Но из (1) следует, что $|z_2 - z_1| < \sigma \sin 100\sigma$; поэтому в силу (3) $|z_1 - \tilde{z}| < \sigma$, т. е. точка $\tilde{z}$ принадлежит области D, что следует из свойства 3 леммы 1. Но тогда на основании свойства 4 той же леммы имеем

$$\left|\frac{f(z_1) - f(\tilde{z})}{z_1 - \tilde{z}}\right| < \frac{1}{\sigma}. \tag{4}$$

Аналогично получим неравенства

$$(5)\qquad |z_2 - \tilde{z}| < \frac{1}{\sin 100\sigma}|z_2 - z_1|, \qquad \left|\frac{f(z_2)-f(\tilde{z})}{z_2-\tilde{z}}\right| < \frac{1}{\sigma}.$$

Из (3) - (5) следует

$$\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}\right| \leq \frac{|f(z_2)-f(\tilde{z})| + |f(z_1)-f(\tilde{z})|}{z_2-z_1} <$$

$$< \frac{1}{\sin 100\sigma}\left|\frac{f(z_2)-f(\tilde{z})}{z_2-\tilde{z}}\right| + \frac{1}{\sin 100\sigma}\left|\frac{f(z_1)-f(\tilde{z})}{z_1-\tilde{z}}\right| < \frac{2}{\sigma \sin 100\sigma} < \frac{2}{\sigma^2}$$

($\sin 100\sigma > \sigma$, так как $\sigma < \frac{\pi}{2000}$). Объединяя рассмотренные случаи 1 и 2, заключаем, что для любых точек $z_1, z_2 \in P_0$ имеет место неравенство

$$|f(z_2) - f(z_1)| < L|z_2 - z_1|,$$

где $L = \frac{2}{\sigma^2} > \frac{1}{\sigma}$ — постоянная. Теорема 1 доказана.

По поводу доказанной теоремы сделаем одно почти очевидное замечание: если вместо лучей $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ взять произвольные дуги, выходящие из точки z, лежащие в непересекающихся углах и удовлетворяющие всем условиям леммы 1, то проведенное только что доказательство полностью проходит; фактически здесь достаточно рассмотреть вместо лучей (или дуг) содержащие их тонкие углы. Поэтому имеет место следующая теорема, которую сформулируем в виде, удобном для наших целей.

Теорема 3. *Пусть $z = \varphi(w)$ — непрерывная в области D_1 функция и $P_1 \subset D_1$ — совершенное множество. Пусть из каждой точки $w \in D_1$, как из вершины исходят три угла $\Omega)_i(w)$ $(i = 1, 2, 3)$, полученные параллельным смещением фиксированной тройки углов Ω_1, Ω_2, Ω_3 со следующими свойствами:*

1) раствор каждого из этих углов равен 4σ, $\sigma > 0$;

2) $100\sigma < [\Omega_i, \Omega_j] < \pi - 100\sigma$ $(i \neq j)$, где $[\Omega_i, \Omega_j]$ определяется как угол между биссектрисами Ω_i, Ω_j.

Наконец, пусть из каждой точки $w \in P_1$ исходят три простые дуги $L_i(w)$ $(i = 1, 2, 3)$, расположенные внутри соответствующих углов $\Omega_i(w)$, со следующими свойствами:

a) диаметры этих дуг $\geq \delta > 0$;

б) $\left|\frac{\varphi(w')-\varphi(w)}{w'-w}\right| < \frac{1}{\sigma}$ *для всех* $w' \in L_i(w)$ $(i = 1, 2, 3)$*, удовлетворяющих неравенствам* $0 < |w' - w| \leq \delta$*. Тогда найдутся порция* $P_1' \subset P_1$ *и положительное число* L*, такие, что* $|\varphi(w_2) - \varphi(w_1)| < L|w_2 - w_1|$ *для произвольных точек* $w_1, w_2 \in P_1$*.*

Доказательство теоремы 1. По теореме В. В. Степанова достаточно доказать, что в условиях теоремы 1

$$\Lambda(z) = \overline{\lim_{\Delta z \to 0}} \left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right| < \infty.$$

Предположим, от противного, что $\Lambda(z) = \infty$ на множестве $E' \subset E$ положительной меры. Пусть $P \subset E'$ — совершенное множество, каждая порция которого имеет положительную меру.

В силу леммы 1 мы можем считать, что для точек P имеют место свойства 1-3 этой леммы (при $\nu = 2$). Очевидно, можно предположить, что диаметр P меньше $\frac{1}{2}\sigma \sin 90\sigma$. В этом случае, если для некоторых точек P их разноименные лучи пересекаются, то они пересекаются в пределах области D.

Пусть z_0 — произвольная точка плотности множества P. По построению существует последовательность точек $\{z_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ таких, что

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0, \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} \right| = \infty. \tag{6}$$

Найдется, далее, такое r_0, что для всех $r \leq r_0$ имеет место неравенство

$$\text{mes} P_r > \pi r^2 (1 - \sigma^2), \tag{7}$$

где $P_r = P \cap \{|z' - z_0| \leq r\}$, а σ — число, фигурирующее в лемме 1.

Рассмотрим прямоугольную систему координат $x'y'$ с началом в точке z_0, направив положительную ось x' вдоль биссектрисы угла $[\widehat{\theta_1(z_0), \theta_2(z_0)}]$ где $\theta_1(z_0)$, $\theta_2(z_0)$ — лучи, выходящие из точки z_0. Из свойств 1 и 2 леммы 1 следует, что острые углы между осями координат zx', zy' и лучами $\theta_k(z')$ $(k = 1, 2, z' \in P)$ удовлетворяют неравенствам

$$40\sigma < [\widehat{\theta_k(z'), zx'}] < \frac{\pi}{2} - 40\sigma, 40\sigma < [\widehat{\theta_k(z'), zy'}] < \frac{\pi}{2} - 40\sigma. \tag{8}$$

Направив ось y' вертикально вверх, назовем один из лучей точки z_0 — пусть $\theta_1(z_0)$ — нижним, если он лежит в нижней полуплоскости $y' \leq 0$, а другой - пусть $\theta_2(z_0)$ — верхним. В силу (8) и свойства 1 леммы 1 для всех остальных точек $z' \in P$ естественно определить нижние — это будут всегда $\theta_1(z')$ — и верхние — $\theta_2(z')$.

Рассмотрим два концентрических круга K_r и k_r с центром z_0 и соответствующими радиусами $r \le r_0$ и $20r\sigma$. В силу выбора σ, $\sigma < \frac{\pi}{2000}$, имеем $20r\sigma < \frac{r}{3}$.

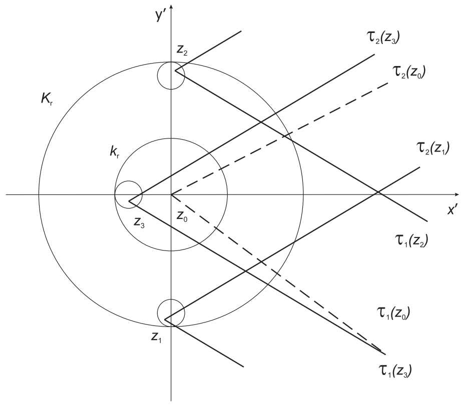

Рис. 18

Построим три круга радиуса $r\sigma$: два из них внутри круга K_r с точками касания (с K_r) на оси y', третий внутри k_r с точкой касания на отрицательной полуоси x'. Из (7) следует, что в каждом из построенных кругов находятся точки множества P; выберем в них по одной такой точке, обозначив их соответственно z_l, z_2, z_3. Будем считать, что z_1 лежит в нижней полуплоскости $y' < 0$. В силу 2 леммы 1 верхний луч точки z_l, т. е. $\theta_2(z_1)$, пересекает нижний луч $\theta_1(z_2)$ точки z_2 (Рис. 18).

В силу (8) лучи $\theta_k(z_3)$ $(k = 1, 2)$ третьей точки z_3 пересекают обе полуоси y' в точках, отстоящих от z_0 не более чем на $\frac{r}{2}$, и, следовательно (в силу (8)), пересекают указанные выше лучи $\theta_1(z_1)$, $\theta_2(z_2)$ точек z_1 и z_2. Эти четыре луча при пересечении образуют замкнутую ломаную (четырехугольник) q_r. Из построения ло маной q_r следует, что внутри нее содержится точка z_0 и расстояние от z_0 до q_r больше $(\sigma \sin 40\sigma)r = L_1(\sigma)r$.

Мы уже знаем (см. теорему 1), что если некоторые разноименные лучи точек $z, z' \in P$ пересекаются, то точка пересечения z находится от каждой из них на расстоянии, меньшем чем $\frac{1}{\sin 90\sigma}|z - z'|$. Так как попарные расстояния между точками z_l, z_2, z_3 меньше $2r$, то отсюда и из свойства 4 леммы 1 следует, что образ замкнутой ломаной q_r имеет диаметр, меньший

$$\frac{8}{\sigma \sin 90\sigma} r = L_2(\sigma)r.$$

Обозначим $\delta_n = 2|z_n - z_0|$, где z_n — одна из точек последовательности (6). Подберем $r = C\delta_n$ так, чтобы возникающий четырехугольник q_r содержал круг (z_0, δ_n). Для этого нужно, чтобы

$$\rho(z_0, g_r) > L_1(\sigma)r = L_1(\sigma)C\delta_n > \delta_n.$$

Для этого достаточно взять $C = \frac{2}{L_1(\sigma)}$. Так как $|z_n - z_0| \to 0$ (при $n \to \infty$), то, начиная с некоторого n, $C\delta_n = \frac{2}{L_1(\sigma)}\delta_n$ будет меньше r_0, поэтому для соответствующих значений r, равных $\frac{2}{L_1(\sigma)}\delta_n$, мы получим замкнутую ломаную q_r, содержащую внутри круг $K(z_0, \delta_n)$. Образ этой ломаной имеет диаметр, меньший $L_2(\sigma)r$. Другими словами, $|f(z') - f(z)| < L_2(\sigma)r$ для любых $z, z' \in q_r$. Так как отображение f открыто, то последнее неравенство, верное для граничных точек области с границей q_r, тем более имеет место для произвольных внутренних ее точек, в частности,[2]

$$|f(z_n) - f(z_0)| < L_2(\sigma)r.$$

Но у нас

$$r = \frac{2}{L_1(\sigma)}\sigma_n = \frac{2}{L_1(\sigma)}|z_n - z_0|.$$

Из последнего неравенства получаем

$$\left|\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}\right| < \frac{4L_2(\sigma)}{L_1(\sigma)}$$

для всех значений n, начиная с некоторого (а именно: для тех n, для которых $\frac{2}{L_1(\sigma)}\delta_n \leq r_0$). Но написанное неравенство противоречит соотношению (6). Теорема доказана.

Двойственная теорема. Мы докажем сейчас теорему, в определенном смысле двойственную предыдущей теореме Д. Е. Меньшова. Это фактически утверждение об отображениях со свойством T (см. §1, гл. XI); сформулируем ее так, чтобы ее (двойственная) связь с теоремой 1 была видна наиболее отчетливо.

Теорема 2. *Пусть отображение $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывно и открыто. Пусть из каждой точки z измеримого множества $E \subset D$ исходят два луча $t_1(z)$ и $t_2(z)$, расположеные на различных прямых, причем существуют пределы*

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{Arg}\frac{f(z+h) - f(z)}{h},\ z + h \in t_1(z),\ t_2(z),$$

причем разность этих пределов $\neq \alpha(z)$, $(\mathrm{mod} 2\pi)$, где $\alpha(z)$ — наименьший угол между лучами $t_1(z)$ и $t_2(z)$. Тогда f дифференцируемо почти всюду на E.

[2]В этом месте Д. Е. Меньшов использовал гомеоморфизм отображения f, хотя все его рассуждения, как мы видим, без изменения переносятся на произвольные открытые отображения.

З а м е ч а н и е, Из условия теоремы для f в точке $z \in E$ следует свойство T.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Проводя доказательство от противного, как и в теореме 1, придем к совершенному множеству $P \subset E$ положительной меры, для которого имеют место все свойства 3–4 леммы 1 §1, гл. XI. Очевидно, можно предположить, что диаметр P меньше $\frac{1}{2}\sigma \sin 90\sigma$; в этом случае если для некоторых точек P их разноименные лучи пересекаются, то это происходит в пределах области D.

Выберем системы координат Oxy, Ouv в z- и w-плоскостях, как и при доказательстве теоремы 1 §1, гл. XI. В силу такого выбора и свойства 4 леммы 1 §1, гл. XI образ луча $\tau_k(z)$, $z \in P$, с одним и тем же индексом k принадлежит всегда либо только нижним углам $\Omega(w)$, либо только нерхним. Взяв, если потребуется, вместо f сопряженное $\bar{f}$, будем считать, что образы нижних (верхних) лучей τ_1 (τ_2) принадлежат нижним (верхним) углам Ω_1 (Ω_2).

Возьмем произвольное вертикальное сечение $P \cap \{x = \text{const}\}$ линейной положительной меры и выберем на нем три точки z', z, z'' в порядке возрастания ординаты. Тогда лучи $\tau_2(z')$, $\tau_1(z'')$ пересекают соответственно разноименные им лучи $\tau(z)$. Для достаточно малой (круговой) окрестности $U(z)$ для точек порции $P_0 \subset P \cap U(z)$ это свойство все еще будет иметь место. Очевидно, можем выбрать U так, чтобы лучи $\tau_2(z')$, $\tau_1(z'')$ находились вне U.

Наименьший угол в правой полуплоскости $u \geq 0$, содержащий оба угла Ω_1 и Ω_2, обозначим через Ω.

1. Докажем, что образ угла $\omega(z) = \widehat{\tau_1 \tau_2}(z)$, $z \in P_0$ взятого в пределах круга U, принадлежит углу $\Omega(w)$, $w = f(z)$.

Лучи $\tau_2(z')$, $\tau_1(z'')$ при пересечении со сторонами угла $\widehat{\tau_1 \tau_2}(z)$ образуют четырехугольник q', образ внутренности которого есть область G' w-плоскости, граница которой принадлежит образу границы q' (в силу открытости f). Этот же образ принадлежит системе углов $\Omega_2(w')$, $\Omega_1(w'')$ и $\Omega_1(w)$, $\Omega_2(w)$. Эти ("заполненные") углы разбивают плоскость; единственную ограниченную компоненту этого разбиения обозначим через G. Легко видеть, обходя контур q', что степень отображения его относительно точек G равна $+1$, поэтому $G' \supset G$. Покажем, что вне угла $\Omega(w)$ нет точек G'. Но такие точки могут "просочиться"изнутри G лишь внутрь угла $\Omega_2(w')$ или $\Omega_1(w'')$, пересекая при этом один из углов $\Omega(w)$, а, значит, и образ одного из лучей $\tau(z)$. Поэтому прообраз такой части G' внутри угла $\omega(z)$ должен был бы примыкать лишь не более чем к двум из его сторон. Но дополнение к сторонам любого угла не может содержать ограниченных компонент — противоречие. Круг $U \supset P_0$ был выбран так, что лучи $\tau_2(z')$, $\tau_1(z'')$ лежат вне его, поэтому пересечение $U \cap q'$ совпадает с $U \cap \omega(z)$.

Наше утверждение доказано.

Обозначим через α точную верхнюю грань абсолютного значения углов, образованных лучами $\tau_k(z)$, $z \in P_0$ $(k = 1, 2)$, с осью Ox, а через β — половину угла Ω. Пусть $K = \operatorname{tg}\alpha$ и $K_1 = \operatorname{tg}\beta$. Сохраняющее ориентацию невырожденное линейное отображение $w = L(z) = Kx + iK_1y$ сохраняет направление осей координат Ox, Oy и переводит направления с углами $\pm\alpha$ в направления сторон угла Ω.

2. Рассмотрим отображение $w = F(z) = f(z) + L(z)$, $z \in D_0$. Пусть $z \in P_0$. Покажем, что для некоторой константы $l > 0$, не зависящей от z,

$$|F(z') - F(z)| > l|z' - z| \tag{9}$$

для каждой точки z' угла $\omega(z) = \widehat{\tau_1\tau_2}$.

Введем обозначение

$$K_0 = \min\left|\frac{L(z + \Delta z) - L(z)}{\Delta z}\right| = \min(K, K_1).$$

Точки $f(z') - f(z)$ и $L(z') - L(z)$ принадлежат углу $\Omega(0)$, а потому и точка $F(z') - F(z) = [f(z') - f(z)] + [L(z') - L(z)]$ принадлежит тому же углу. Углы треугольника с вершинами 0, $f(z') - f(z)$, $F(z') - F(z)$ обозначим через γ_1, γ_2, γ_3; тогда

$$\frac{|L(z') - L(z)|}{\sin\gamma_1} = \frac{|F(z') - F(z)|}{\sin\gamma_2} = \frac{|f(z') - f(z)|}{\sin\gamma_3}. \tag{10}$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $|f(z') - f(z)| \geq K_0|z' - z|$. Если γ_2 — тупой угол, то $|F(z') - F(z)| > |f(z') - f(z)|$; если γ_2 — угол острый, то по свойству 2 леммы 1 §1, гл. XI он больше 90σ, а потому второе равенство из (10) дает

$$|F(z') - F(z)| > K_0 \sin 90\sigma |z' - z_0|.$$

2. Пусть $|f(z') - f(z)| < K_0|z' - z|$. Снова: если γ_2 — тупой угол, то $|F(z') - F(z)| > |L(z') - L(z)| \geq K_0|z' - z|$. Для острого угла γ_2, как и выше, $\sin\gamma_2 > \sin 90\sigma$ и первое равенство из (10) дает

$$|F(z') - F(z)| > K_0 \sin 90\sigma |z' - z|.$$

Объединяя все сказанное, убеждаемся в справедливости (9) во всех случаях, если положить $l = K_0 \sin 90\sigma$.

3. Покажем, наконец, что неравенство вида (9) имеет место для каждой пары точек $z, z' \in P_0$.

Если одна из этих точек лежит внутри или на сторонах угла ω другой точки, то это следует из (9). Если же каждая из точек не принадлежит углу ω другой, то некоторые их разноименные лучи пересекаются; пусть, для определенности, пересекаются лучи $\tau_1(z)$ и $\tau_2(z')$ в точке $\tilde{z}$. Соответствующие им точки на w-плоскости при отображении $w = f(z)$ обозначим через w, w', $\tilde{w}$. В треугольнике $z\tilde{z}z'$ углы при соответствующих вершинах обозначим через φ, $\tilde{\varphi}$, φ'; аналогично углы треугольника $w\tilde{w}w'$ обозначим через ψ, $\tilde{\psi}$, ψ'. Имеем

$$\begin{gathered}\frac{|z'-z|}{\sin\tilde{\varphi}} = \frac{|\tilde{z}-z|}{\sin\varphi'} = \frac{|z'-\tilde{z}|}{\sin\varphi},\ \sin\tilde{\varphi} > \sin 90\sigma,\\ \frac{|w'-w|}{\sin\tilde{\psi}} = \frac{|\tilde{w}-w|}{\sin\psi'} = \frac{|w'-\tilde{w}|}{\sin\psi},\ \sin\tilde{\psi} > \sin 90\sigma.\end{gathered} \tag{11}$$

Отсюда

$$|w'-w| > \{\sin 90\sigma|\tilde{w}-w|,\ \sin 90\sigma|\tilde{w}-w'|\}.$$

Но из (9) получаем

$$|\tilde{w}-w| > l|\tilde{z}-z|,\ |\tilde{w}-w'| > l|\tilde{z}-z'|.$$

Поэтому

$$|w'-w| > \{l\sin 90\sigma|\tilde{z}-z|,\ \sin 90\sigma|\tilde{z}-z'|\}. \tag{12}$$

При $\varphi < 90\sigma$ (учитывая, что $\sigma < \frac{\pi}{2000}$) $\sin\varphi' = \sin(\varphi+\varphi') > \frac{1}{2}\sin 90\sigma$, поэтому из соотношений (11) и (12) следует, что

$$|w'-w| > \frac{l}{2}\sin^2 90\sigma|z'-z|.$$

Если же $\varphi > 90\sigma$, то оно одновременно в силу свойств 1,2 леммы 1 §1, гл. XI будет меньше $\pi - 50\tau$. Снова, используя (11) и (12), имеем

$$|w'-w| > l\sin^2 90\sigma|z'-z|.$$

Резюмируя все нами здесь доказанное, приходим к следующему выводу.

Предполагая теорему 4 неверной, мы нашли совершенное множество $P_0 \subset E$ положительной меры такое, что:

1) в каждой его точке z

$$\Lambda(z) = \varlimsup_{\Delta z\to 0}\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\right| = \infty;$$

2) для него имеют место все свойства 1-4 упомянутой леммы 1;

3) функция вида $F(z) = f(z) + L(z)$ ($L(z)$ — линейная функция) удовлетворяет условию

$$|F(z') - F(z)| > l_0|z' - z| \tag{13}$$

для любых $z, z' \in P_0$ ($l_0 > 0$ — константа). Завершим теперь доказательство теоремы 4. Из условия (13) следует, что F осуществляет гомеоморфизм множества P_0 на некоторое совершенное множество Q_0 w-плоскости, также положительной меры, причем обратное отображение удовлетворяет условию Липшица. Поэтому оно дифференцируемо почти всюду на Q_0. Из доказательства основной теоремы о множествах моногенности следует дифференцируемость функции $F\,|_{P_0}$, а с ней и функции $f\,|_{P_0}$, почти всюду на множестве P_0. Следовательно, выбирая в случае необходимости другое совершенное множество, можем считать, что на P_0 функция f удовлетворяет условию Липшица $|f(z') - f(z)| \leq L_0|z' - z|$ для всех $z, z' \in P_0$.

Будем теперь следовать построениям теоремы 1, в результате чего в каждом круге K_r, $r \leq r_0$, с центром в точке плотности $z_0 \in P_0$ находим три точки $z_1, z_2, z_3 \in P_0$, лучи $\tau_1(z_2)$, $\tau_2(z_2)$ и $\tau_1(z_3)$, $\tau_2(z_3)$ которых при пересечении образуют замкнутую ломаную q_r содержащую z_0 внутри, причем $\rho(z_0, q_r) > L_1(\sigma)r$.

Если некоторые разноименные лучи точек $z, z' \in P_0$ пересекаются в точке $\tilde{z}$, то, рассматривая образы w, w', $\tilde{w}$ этих точек при отображении $w = f(z)$, из равенств (11) мы получаем, что

$$|w - \tilde{w}|,\ |w' - \tilde{w}| < \frac{1}{\sin 90\sigma}|w' - w|.$$

Отсюда и из (11) легко выводим, что образ ломаной q_2 имеет диаметр, меньший $\frac{4L_0}{\sin 90\sigma}r = L_2(\sigma)r$. Но этого достаточно, чтобы, как и в теореме 1, привести наше предположение к противоречию. Теорема 2 доказана.

2. Условие Липшица

Мы начнем со следующей важной и самой по себе теоремы:

Т е о р е м а 3. *Пусть функция f голоморфна в открытом компактном в $\mathbb{C}^n$ множестве D, $\overline{D} \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, и непрерывна в $\overline{D}$. Если она удовлетворяет условию Липшица на границе $\partial D = \overline{D} \setminus D$:*

$$|f(\zeta_2) - f(\zeta_1)| \leq L|\zeta_2 - \zeta_1|,\ \zeta_1, \zeta_2 \in \partial D, \tag{14}$$

то она удовлетворяет этому условию и на всем замыкании $\overline{D}$ (и с той же константой).

Доказательство. Очевидно, теорему достаточно доказать для случа я $n = 1$, так как любые две точки из $\overline{D}$ можно соединить аналитической прямой (т. е. подходящей действительной двумерной плоскостью).

Итак, пусть $\overline{D} \subset \mathbb{C}$; дополнение $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ есть некоторое открытое множество O. Продолжим произвольно функцию $f\mid_{\partial D}$ на это множество (см. [3]) с сохранением условия Липшица (14). Тем самым определим некоторую комплексную функцию $f_1(z)$ на всей плоскости $\mathbb{C}$.

Легко видеть, что теорема будет доказана, если покажем, что в каждой внутренней точке $z \in D$ производная $f'(z) = f_1'(z)$ ограничена числом $L : |f'(z)| \leq L$.

Пусть, напротив, в некоторой точке $z_0 \in D$ имеем: $f'(z_0) = Ae^{i\alpha}$, $A = L + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим отображение плоскости $\mathbb{C}$:

$$w = F(z) = f_1(z) - Ae^{i\alpha} z.$$

Для любых различных точек $z_1, z_2 \in \partial D$ получим:

$$|F(z_2) - F(z_1)| = |[f_1(z_2) - f_1(z_1)] - Ae^{i\alpha}(z_2 - z_1)| \geq$$

$$\geq A|z_2 - z_1| - L|z_2 - z_1| = \varepsilon|z_1 - z_1| > 0,$$

т. е. $F\mid_{\partial D}$ — гомеоморфизм. В каждой компоненте из $O = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ это будет внутреннее отображение, сохраняющее локальную ориентацию; в самом деле, в любой точке $z \in O$ дифференцируемости $f_1(z)$ ее множество производных чисел $\mathfrak{M}_z$ есть окружность, лежащая в круге $|\zeta| \leq L$, и сдвиг ее на вектор $Ae^{i\alpha}$, дающий $\mathfrak{M}_z$ для $F(z)$ — уже окружность, для которой начало координат $\zeta = 0$ — внешняя точка, а это означает, что якобиан отображения $w = F(z)$ положителен. Из очевидного N-свойства F и теоремы 9 гл. X и следует внутренность отображения.

На основании теоремы о продолжении (см. теорема 6, гл. X) заключаем, что F — внутреннее отображение на всей плоскости, а в силу гомеоморфизма $F\mid_{\partial D}$ — оно гомеоморфизм и в каждой ограниченной компоненте $\mathbb{C} \setminus \partial D$. Но в точке $z_0 \in D$, производная $F'(z_0) = f_1'(z_0) - Ae^{i\alpha} z_0 = f'(z_0) - Ae^{i\alpha} z_0 = 0$, а в такой точке аналитическая функция не может быть даже локальным гомеоморфизмом.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Замеченный здесь прием позволит нам доказать и такой результат:

Теорема 4. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — компактная область и $f : D \to \mathbb{C}$ аналитическая функция; пусть для открытой порции границы ∂D*

области D выполняется условие Липшица:

$$|f(z') - f(z)| \le L|z' - z|,\ z', z \in \partial D. \tag{15}$$

Тогда в каждом достаточно малом круге $V(z)$, $z \in \partial D$, функция f в точках $z', z'' \in \overline{V} \cap \overline{D}$, удовлетворяет условию Липшица (константа которого зависит от V и L).

Доказательство. Итак, пусть K — круг, для которого в произвольных точках $z', z \in K \cap \partial D$ имеет место (15).

Продолжим функцию f внутри K в точки множества $K \setminus \overline{D}$ — если оно не пусто — (до комплексной) функции с сохранением условия Липшица (15).

Как и при доказательстве предыдущей теоремы убеждаемся, что отображение

$$f_1(z) = f(z) - Az\ (\varepsilon > 0)\ |A| = L + \varepsilon$$

является внутренним в круге K. Так как локальная степень $\gamma(z)$ в каждой точке $z \in P$ по теореме Руше равна $+1$, то каждая такая точка есть точка локального гомеоморфизма f_1; подчеркнем, что это имеет место при любом A, $|A| = L + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ здесь, так сказать,с возрастанием ε и сама окрестность с гомеоморфизмом f_1 в ней тоже возрастает.

Итак,рассмотрим для фиксированного $\varepsilon > 0$ точку $z \in P$ и ее круговую окрестность $V(z)$ локального гомеоморфизма отображения

$$f_1(z) = f(z) - Az,\ |A| = L + \varepsilon$$

и убедимся, что в точках аналитичности $V \cap D$ производная $f'(z)$ по модулю не превышает $L + \varepsilon$.

В самом деле, если бы в некоторой точке $z_0 \in V \cap D$ производная $f'(z_0) = A_1$, $|A| > L + \varepsilon$, то функция

$$\tilde{f}_1(z) = f(z) - A_1 z,$$

как мы уже говорили выше, также осуществляла бы гомеоморфизм всей окрестности V; с другой же стороны, в точке $z_0 \in V$ аналитичности мы бы имели $\tilde{f}_1'(z_0) = 0$ и в этой точек не было бы даже локального гомеоморфизма.

Теорема доказана.

Из ее доказательства следует, что при условии Липшица на границе ∂D с константой L в достаточно малой окрестности любой ее точки условие Липшица удовлетворяется с константой, сколь угодно близкой к L.

Отметим здесь одно следствие из доказанного нами:

Пусть непрерывная в области D функция f является аналитической вне некоторого совершенного нигде не плотного множества $P \subset D$, причем

$$|f(z') - f(z'')| \le L|z' - z''|$$

для любых $z', z'' \in P$. Тогда в каждом замкнутом круге из D функция f удовлетворяет условию Липшица (константа которого зависит от выбора такого круга).

Причем это верно и в том случае, когда в каждой компоненте из $D \setminus P$ либо f либо ее сопряженная $\bar{f}$ является аналитической: просто в прежних построениях нужно рассматривать отдельно каждую из этих компонент и доказывать ограниченность либо f' либо $(\bar{f})'$.

В этом же круге найденной идеи находится еще одно утверждение об условии Липшица, которым в дальнейшем воспользуемся.

Но сначала — простенькая лемма.

Лемма . *Пусть на отрезке $[a, b]$ задано произвольное замкнутое множество P и непрерывная функция $f(x)$. Если: 1) f удовлетворяет условию Липшица: $|f(x') - f(x'')| \le L|x' - x''|$, $x', x'' \in P$ и 2) в каждом интервале смежности удовлетворяет условию Липшица с одной и той же константой L_1, то f удовлетворяет условию Липшица и в целом на всем отрезке $[a, b]$ (с константой $\max(L, L_1)$).*

Ее легко доказать непосредственно, а также на основании теорем из гл. I.

Теорема, которую мы собираемся доказать, формулируется так:

Теорема 5. *Пусть для замкнутого круга $\overline{D}$ отображение $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ непрерывно, $\overline{P} \subset \overline{D}$ — совершенное множество и в $D \setminus P$ f аналитична. Пусть каждая точка $z \in P$ является вершиной пары вертикальных углов $V(z)$, полученных параллельным сдвигом фиксированной пары углов V, со следующим свойством: для каждой точки $z' \in P \cap \overline{D}$, расположенной внутри или на границе углов $V(z)$, имеет место неравенство*

$$|f(z') - f(z'')| \le L|z' - z''|.$$

Если существует такое $A_0 > 0$, что при любом A, $|A| \ge A_0$, отображение $g(z) = f(z) + Az$ является внутренним в D, то f удовлетворяет условию Липшица в каждом замкнутом круге D_0, $\overline{D}_0 \subset D$.

Доказательство. Обозначим радиус кругов D и D_0 R и R_0, а максимум модуля $|f(z) - f(z_0)|$ в круге $\overline{D}$ — через M: z_0 — центр круга D_0. Легко видеть, что если A выбрать так, чтобы

$$(16) \qquad |A|(R - R_0) > 2M,$$

то образ круга D_0 при любом отображении

$$w = g(z) = f(z) - f(z_1) + A(z - z_1),$$

где z_1 — произвольная точка из D_0 (произвольность z_1 обеспечивается коэффициентом 2 в (16)), будет принадлежать внутренности круга $|w| < |A|R - M$. Но порядок всех точек последнего относительно образа окружности ∂D по теореме Руше равен $+1$, т. е. отображение g внутри D_0 есть гомеоморфизм.

Теперь, как и раньше, легко докажем, что производная $f'(z)$ всюду в $D_0 \setminus P$ ограничена числом $|A| : |f'(z)| \leq |A|$. Если бы в некоторой точке $z_1 \in D_0 \setminus P$ было $f'(z_1) = (|A| + \varepsilon)e^{i\alpha}$, $\varepsilon > 0$, то функция

$$g_1(z) = f(z) - f(z_1) - (|A| + \varepsilon)e^{i\alpha}(z - z_1)$$

представляла бы гомеоморфизм круга D_0; в то же время в точке z_1 аналитичности g_1 имели бы:

$$g_1'(z) = f'(z_1) - (|A| + \varepsilon)e^{i\alpha} = 0,$$

т. е. в этой точке не было даже локального гомеоморфизма.

Итак, мы доказали, что в круге D_0 вне P производная f' ограничена одной и той же константой. Учтем теперь наше дополнительное условие с вертикальными углами $V(z)$.

Введем в D систему косоугольных координат, в которой координатными линиями являются прямые, параллельные сторонам вертикальных углов V. Так как на пересечении этих линий с P для f выполняется условие Липшица с константой L и локальная липшицевость вне P с одной и той же константой $|A|$, то на основании только что указанной леммы получим, что на каждой такой линии в целом (внутри $\overline{D}$) f удовлетворяет условию Липшица опять-таки с одной и той же константой. Но отсюда уже непосредственно вытекает, что f — липшицева во всем круге $\overline{D}_0$.

Теорема доказана.

Мы уже видели ранее, что возрастание функции $f(x)$ на каждом интервале смежности к нигде не плотному замкнутому множеству еще не обеспечивает ее монотонности всюду; то же относится к свойству быть липшицевой — с одной и той же константой! Но опять-таки мы видели в теореме о неявной функции с особенностями, что переход к функциям многих переменных может несколько изменить положение. Мы сейчас — и именно из этой теоремы! — выведем еще один критерий липшицевости.

Теорема 6. *Пусть в выпуклой области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ задана непрерывная функция $f(x_1, \ldots, x_n, y) = f(x, y)$ и простое нигде не плотное замкнутое множество P. Если какая-либо "вертикаль"$\{x = \text{const}\}$ пересекает P, то пусть на каждом интервале смежности к этому пересечению $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y с одной и той же константой. Тогда f удовлетворяет этому условию (по y) всюду в D (и с той же константой).*

Доказательство. Оно сразу следует из упомянутой теоремы о неявной функции.

В самом деле, рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x, y) = f(x, y) + (L + \varepsilon)y,$$

где L — константа Липшица для $f(\cdot, y)$, а $\varepsilon > 0$ — произвольно. Тогда при $y_2 > y_1$:

$$F(x, y_2) - F(x, y_1) = f(x, y_2) - f(x, y_1) + (L + \varepsilon)(y_2 - y_1) \geq$$

$$\geq (L + \varepsilon)(y_2 - y_1) - L(y_2 - y_1) = \varepsilon(y_2 - y_1) > 0,$$

т. е. на каждом интервале смежности к $P \cap \{x = \text{const}\}$ функция F возрастает по y; по указанной теореме она возрастает по y всюду в D. Т. е. уже для всех $y_2 > y_1$ (и при $x = \text{const}$) имеем:

$$f(x, y_2) + (L + \varepsilon)y_2 \geq f(x, y_1) + (L + \varepsilon)y_1$$

или

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \geq -(L + \varepsilon)(y_2 - y_1).$$

Точно так же доказывается убывание по y другой вспомогательной функции $f(x, y) - (L + \varepsilon)y$ и неравенство

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \leq (L + \varepsilon)(y_2 - y_1).$$

Итак, всюду в D получим (при $y_2 > y_1$):

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq (L + \varepsilon)(y_2 - y_1).$$

Устремляя ε к нулю, мы завершим доказательство теоремы.

Конечно, из нее следует, что если в ее условиях вне P функция $f(x, y)$ локально удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x'_1, \ldots, x'_n, y') - f(x_1, \ldots, x_n, y)| \leq L_1|x'_1 - x_1| + \ldots + L_n|x'_n - x_n| + L_1|y' - y|$$

с фиксированными константами L, то она этому условию удовлетворяет всюду в области и с теми же константами.

3. Производная на границе и в области

Пусть $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}$ — компакт и на нем определена непрерывная функция $f(z)$, такая, что в каждой точке $z \in \mathcal{E}$ все производные числа f ограничены одним и тем же числом L. Если $\mathcal{E}$ — отрезок на прямой, то мы уже доказали в гл. I, что в этом случае функция f удовлетворяет на всем этом отрезке условию Липшица с той же константой L. В наших новых условиях мы хотим доказать, что f также удовлетворяет условию Липшица, но константа его теперь зависит и от L и от размеров $\mathcal{E}$.

Для каждого $\zeta \in \mathcal{E}$ введем функцию

$$L(\zeta) = \overline{\lim} \left| \frac{f(\zeta') - f(\zeta)}{\zeta' - \zeta} \right| \text{ при } \zeta' \in \mathcal{E},$$

а также для каждого $r > 0$ — функцию

$$L(\zeta, r) = \sup \left| \frac{f(\zeta') - f(\zeta)}{\zeta' - \zeta} \right|$$

при $\zeta' \in \mathcal{E}$ и таких, что $|\zeta' - \zeta| < r$, т. е. $\zeta' \in U_r(\zeta)$.

Ясно, что для достаточно малых r все эти функции ограничены числом, близким к L, что $L(\zeta, r') \leq L(\zeta, r)$ при $r' < r$ и $L(\zeta) = \lim\limits_{r \to 0} L(\zeta, r)$.

Покажем сначала, что, при фиксированном $r > 0$, функция $L(\zeta, r)$ является полунепрерывной снизу.

В самом деле, при произвольном $\eta > 0$ и $\zeta_0 \in \mathcal{E}$ пусть $\tilde{\zeta} \in U(\zeta_0) \cap \mathcal{E}$, $\tilde{\zeta} \neq \zeta_0$, и такие что

$$\left| \frac{f(\tilde{\zeta}) - f(\zeta_0)}{\tilde{\zeta} - \zeta_0} \right| > L(\zeta_0, r) - \eta,$$

и пусть $\zeta_k \to \zeta_0$, $\zeta_k \in \mathcal{E}$ $(k = 1, 2, \ldots)$; начиная с некоторого k, точка $\tilde{\zeta}$ войдет внутрь $U_k(\zeta_k)$ и, так как

$$\left| \frac{f(\tilde{\zeta}) - f(\zeta_k)}{\tilde{\zeta} - \zeta_k} \right| \to \left| \frac{f(\tilde{\zeta}) - f(\zeta_0)}{\tilde{\zeta} - \zeta_0} \right|,$$

также начиная с некоторого k, получим:

$$\left| \frac{f(\tilde{\zeta}) - f(\zeta_k)}{\tilde{\zeta} - \zeta_k} \right| > L(\zeta_0, r) - \eta$$

при $|\tilde{\zeta} - \zeta_k| < r$.

Отсюда следует, что

$$L(\zeta_k, r) > L(\zeta_0, r) - \eta$$

и, при $\eta \to 0$,

$$\lim_{k\to\infty} L(\zeta_k, r) \geq L(\zeta_0, r).$$

Из произвольности последовательности $\{\zeta_k\}$, $\zeta_k \to \zeta_0$, отсюда и вытекает полунепрерывность снизу функции $L(\zeta, r)$ (при фиксированном r!).

Пусть $\zeta_0 \in \mathcal{E}$ — та же произвольная точка и $L(\zeta_0) = A \leq L$. Найдется такое $r_0 > 0$, что, во-первых, $L(\zeta) < L + \varepsilon$ для всех $\zeta \in U_{r_0}(\zeta_0)$, и, во-вторых, $L(\zeta, r) < L + \varepsilon$ для всех $r \leq r_0$.

Возьмем теперь убывающее семейство (при $r \searrow 0$) открытых множеств $G_r = \{\zeta \in U_{r_0},\ L(\zeta, r) > L + \varepsilon$ на $\mathcal{E}$. Если бы их пересечение $G_0 \subset U_r$ не было пустым (G_δ-множеством), тогда в точке $\zeta' \in G_0$ было бы: $\lim\limits_{r\to 0} L(\zeta', r) \geq L + \varepsilon$ и не было бы неравенства $L(\zeta') > L + \varepsilon$. Поэтому $G_0 = \emptyset$, и, следовательно, существует $\delta < \frac{r_0}{2}$ такое, что для всех $\zeta \in U_\delta(\zeta_0)$ будет: $L(\zeta, \delta) \leq L + \varepsilon$. Взяв произвольные точки $\zeta', \zeta'' \in U_{\delta/3}(\zeta_0)$, учитывая, что $|\zeta' - \zeta''| < \frac{2}{3}\delta$, получим:

$$\left|\frac{f(\zeta'') - f(\zeta')}{\zeta'' - \zeta'}\right| \leq L(\zeta', |\zeta'' - \zeta'|) \leq L + \varepsilon.$$

Другими словами, F удовлетворяет условию Липшица на множестве $\mathcal{E} \cap U(\zeta_0, \frac{1}{3}\delta)$ с константой $L + \varepsilon$.

Теперь ясно, как завершается доказательство условия Липшица на всем множестве $\mathcal{E}$:

Берем конечное его покрытие: $\mathcal{E} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} U(z_n)$, где для каждого круга $U(z_n)$ имеем: в $U(z_n) \cap \mathcal{E}$ f удовлетворяет условию Липшица с константой $L + \varepsilon_n$ ($\varepsilon_n < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ может быть взято произвольно); обозначив $\sum\limits_{k,l} |z_k - z_l| = \lambda$,

$$\min \frac{|z_p - z_q|}{\lambda} = \mu,$$

легко получим для произвольных $z', z'' \in \mathcal{E}$, попавших в круги U', U'' лишь два варианта: если они принадлежат одному кругу U, то для них условие Липшица доказано выше; если же они — из разных кругов, то пользуясь только конечностью этих кругов, мы придем к тому же, но с возможностью увеличения константы Липшица, сравнимого с фиксированным числом N покрытия нашего множества $\mathcal{E}$.

Здесь мы убедимся в том, как почти чисто топологические соображения (основанные на теории внутренних отображений) позволяют сдвинуть с места даже давние классические вопросы, связанные, так скажем, с контурными производными определенных аналитических функций с их производными относительно области.

Мы и приближаемся к этой теме.

Итак, пусть функция $f(z)$, аналитическая в области $D \subset \mathbb{C}$, и непрерывно продолжается на некоторую открытую порцию $\mathcal{E}$ границы ∂D.

В этих условиях мы хотим доказать следующее утверждение:

Теорема 7. *Если f моногенна в точке $\zeta_0 \in \mathcal{E}$ (относительно $\mathcal{E}$), т. е. существует*

$$f'_{\mathcal{E}}(\zeta_0) = \lim_{\substack{\Delta\zeta \to 0 \\ \zeta_0 + \Delta\zeta \in \mathcal{E}}} \frac{f(\zeta_0 + \Delta\zeta) - f(\zeta_0)}{\Delta\zeta}$$

а в этой точке отображение $\Phi : \zeta \to \mathfrak{M}_\zeta^{(\mathcal{E})}(f)$, $\zeta \in \mathcal{E}$, является непрерывным, то f моногенна в ζ_0 и относительно $D \cup \mathcal{E}$ (т. е. $\overline{D}$ вблизи $\mathcal{E}$) и $f'_D(\zeta_0) = f'_{\mathcal{E}}(\zeta_0)$; более того, существует $\lim\limits_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} f'(z)$, который также равен $f'_{\mathcal{E}}(\zeta_0)$:

$$\lim_{z \to \zeta_0} f'(z) = f'_{\mathcal{E}}(\zeta_0).$$

Доказательство. Мы можем предположить, что $f'_{\mathcal{E}}(\zeta_0) = 0$: иначе — мы бы рассмотрели вспомогательную функцию $g = f - f'_{\mathcal{E}}(\zeta_0)z$. В этом же случае первая часть нашего утверждения прямо следует из следующей теоремы Иверсена - Цудзи [4]:

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — произвольная область и $\zeta_0 \in \partial D$ — не изолированная точка; если F — аналитическая и ограниченная в D, тогда

$$\overline{\lim_{\substack{z \to \zeta_0 \\ z \in D}}} |F(z)| = \overline{\lim_{\substack{\zeta \to \zeta_0 \\ z \in \partial D}}} \left(\overline{\lim_{z \to \zeta}} |F(z)| \right)$$

Нам здесь достаточно взять $F(z) = \frac{f(z) - f(\zeta_0)}{z - \zeta_0}$; напомним, что $\mathcal{E}$ — это открытая порция границы ∂D.

Приступим к доказательству второй части теоремы.

Прежде всего, из ее условия следует ограниченность вблизи ζ_0 всех $\mathfrak{M}_\zeta^{(\mathcal{E})}$, $\zeta \in \mathcal{E}$, а это, как мы знаем, обеспечивает условие Липшица функции f на $\mathcal{E}$ и, наконец, липшицевость f на соответствующей порции $\overline{D} \cap \overline{U}(\zeta_0)$ всей замкнутой области $\overline{D}$; обозначим соответствующую константу Липшица через L. Рассматривая снова функцию $L(\zeta) = \overline{\lim} \left| \frac{f(\zeta')-f(\zeta)}{\zeta'-\zeta} \right|$, и $L(\zeta, r) = \sup \left| \frac{f(\zeta')-f(\zeta)}{\zeta'-\zeta} \right|$, $|\zeta' - \zeta| < r$, и учитывая, что $L(\zeta_0) = 0$, из предыдущих утверждений с них получим, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для произвольных $\zeta', \zeta'' \in U_\delta(\zeta_0)$ будет

$$\left| \frac{f(\zeta'') - f(\zeta')}{\zeta'' - \zeta'} \right| \leq \varepsilon,$$

т. е. f удовлетворяет на множестве $\mathcal{E} \cap U_\delta$ условию Липшица с константой $\varepsilon > 0$.

Продолжим f из $\mathcal{E} \cap U_\delta$ на $U_\delta \setminus D$ с сохранением этого условия Липшица (это — вне области аналитичности f!). Пусть $\delta_0 = \frac{\varepsilon\delta}{L}$; докажем, что в $U_{\delta_0} \cap D$ будет: $|f'(z)| \leq 3\varepsilon$; наша теорема будет следовать отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$.

Предположим, что в некоторой точке $z_1 \in U_{\delta_0} \cap D$ имеем: $f'(z_1) = a$ и $|a| > 3\varepsilon$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = f(z) - f(\zeta_0) - a(z - \zeta_0).$$

Из построения следует, что для точек $z \in U_\delta \setminus D$ множества $\mathfrak{M}_z(\varphi)$ (диаметра $< \varepsilon$) от начала координат больше чем на 2ε, следовательно, φ — изолирована в этих точках и якобиан $J(\varphi) > 0$ почти всюду в $U_\delta \setminus \overline{D}$. Из приведенной нами в гл. IX теоремы следует, что φ является (положительным) внутренним отображением всей области $U_\delta \supset U_{\delta_0}$.

Имеем: $\varphi(\zeta_0) = 0$ и образ окружности K_0: $|z - \zeta_0| = \delta$ при отображении $w = a(z - \zeta_0)$ есть окружность $|w| = |a|\delta > 3\varepsilon\delta$. Так как $|f(z) - f(\zeta_0)| < \varepsilon|z - \zeta_0| = \varepsilon\delta$, то все точки круга $|w| < \varepsilon\delta$ имеют порядок ν относительно образа $\varphi(K_0)$, равный $+1$ (теорема Руше). Из принципа аргумента для внутреннего отображения заключаем, что все точки этого круга однократны в U_δ и прообраз его в U_δ есть область g_0 — очевидно, содержащая точку ζ_0, — в которой φ является гомеоморфизмом.

Оценим радиус круга $|z - \zeta_0| < r$, принадлежащего g_0. Если $|w| = \rho$, то из условия Липшица получим:

$$\rho = |w| = |\varphi(z) - \varphi(\zeta_0)| \leq L|z - \zeta_0|,$$

т. е. для соответствующих точек z и ζ_0 имеем: $|z-\zeta_0| \geq \frac{\rho}{L}$. Отсюда следует, что область g_0 содержит по крайней мере круг $|z-\zeta_0| < \frac{\varepsilon\delta}{L} = \delta_0$, т. е. U_{δ_0}.

Итак, $\varphi\ |_{U_{\delta_0}}$ — гомеоморфизм. С другой стороны, в точке $z_1 \in U_{\delta_0} \cap D$ по условию имеем:

$$\varphi'(z_1) = f'(z_1) - a = 0.$$

Но в такой точке аналитическая функция не может быть даже локальным гомеоморфизмом.

Полученное противоречие доказывает теорему.

4. Новые критерии дифференцируемости комплекснозначых функций

Известное утверждение анализа гласит: если непрерывная функция $f(x,y)$ обладает частными производными в области и в некоторой точке они непрерывны, то $f(x,y)$ дифференцируема в этой точке. Весьма полезными являются различные обобщения и усиления этого утверждения. Например, нетрудно показать, что для липшицевой функции f (вещественной или комплекснозначной) существование пределов ее частных производных в некоторой точке по точкам дифференцируемости также приводит к дифференцируемости в такой точке; при этом наперед о существовании частных производных в ней ничего не предполагается. К сожалению, в общем случае это утверждение неверно: если взять, например, произвольную сингулярную монотонную функцию φ, $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}_1$, взять точку x_0, где $\varphi'(x_0) = +\infty$, и положить $f(z) = f(x+iy) = \varphi(x)$, то в точках $z = x_0 + iy$ наше утверждение не имеет место.

В случае дифференцируемой комплексной функции $f(z) = u + iv$ естественной заменой частных производных $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ следует считать величины f_z и $f_{\bar z}$ хотя бы потому, что

$$df = f_z dz + f_{\bar z} d\bar z.$$

Здесь мы докажем некоторое усиление вышеуказанного утверждения, рассматривая общий случай комплексной функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ с заменой частных производных комплексными производными f_z, $f_{\bar z}$. Более того, для липшицевой функции f указанные выше пределы можно заменить асимптотическими.

Имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а 8. *Пусть функция* $f(z) \in \mathrm{Lip}(D)$, *и* $f_{\bar z} \to 0$ *асимптотически при* $z \to z_0$. *Если* $f(z)$ *обладает в некоторой точке* z_0

производной $f'_l(z)$ в некотором направлении l, то она моногенна в этой точке.

Заметим сразу, что одного условия $f_{\bar z} \to 0$ при этом недостаточно, как показывает пример функции $f(z) = z\sin(\ln\ln(z\bar z))$ $(z\bar z = |z|^2)$:

$$f_{\bar z} = z\cos(\ln\ln(z\bar z)) \cdot \frac{1}{\ln(z\bar z)} \cdot \frac{1}{z\bar z} \cdot z = \frac{z}{\bar z} \cdot \frac{1}{\ln(z\bar z)} \cos(\ln\ln(z\bar z)) \to 0$$

при $z \to 0$, но предел $\frac{f(z)}{z}$ не существует ни для какого направления.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем некоторые оценки. Обозначим через $Q(z_0)$ измеримое множество, имеющее точку плотности z_0. Для произвольного круга $K_r(z_0) = \{z : |z_0 - z| \le r\} \subset D$ введем следующие обозначения:

$$\frac{\mathrm{Mes}(K_r \cap Q)}{\mathrm{Mes}(K_r)} = 1 - \delta(r), \qquad \frac{\mathrm{Mes}(K_r \setminus Q)}{\mathrm{Mes}(K_r)} = \delta(r), \tag{17}$$

где $\delta(r) \to 0$ при $r \to 0$. Будем предполагать, что $\delta(r) \ne 0$ при всех $r \ne 0$; в противном случае все дальнейшие выкладки упрощаются. При выполнении условий нашей теоремы имеет место формула Грина [5]:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{K_r} \frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial\xi d\eta}{\zeta - x_0} \tag{18}$$

для произвольной точки $z \in D$, и круга $K_r \in D$. Отсюда для такого h, что $z_0 + h \in K_r$, имеем

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)} - \frac{1}{\pi}\iint \frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}.$$

Рассмотрим разность последнего выражения с контурным интегралом $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^2}$

$$\Delta_k = \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^2} = \tag{19}$$

$$= \frac{h}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0 - h)} \cdot \frac{d\zeta}{(\zeta - z_0)^2} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\partial K_r}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)}.$$

Оценим в отдельности интегралы, входящие в равенство (19).

Оценка контурного интеграла:

$$|\mathfrak{I}_h| = \left|\frac{h}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)^2}\right| = \left|\frac{h}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r}\frac{f(\zeta) - f(z_0+h)}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)^2}d\zeta\right| \leq$$

$$\leq \frac{|h|}{2\pi}\int\limits_{\partial K_r}\frac{|f(\zeta) - f(z_0+h)|}{|\zeta - z_0 - h||\zeta - z_0|^2}|d\zeta| \leq \frac{L}{2\pi}\frac{|h|}{r}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi = L\frac{|h|}{r}, \tag{20}$$

где L — константа Липшица (здесь мы воспользовались тем, что сумма вычетов функции $1/(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)^2$ в точках z_0 и $z_0 + h$ равна нулю). Из этой оценки следует, что (20) верна для всех h, принадлежащих некоторой окружности $|h| = \text{const}$, а так как $\mathfrak{I}_h$ является аналитической функцией от h, то (20) будет справедлива для всех h, лежащих и внутри этой окружности.

Оценим кратный интеграл. Сначала представим его в виде суммы двух интегралов:

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{K_r(z_0)}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)} = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{K_r(z_0)\cap Q(z_0)}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{K_r(z_0)\setminus Q(z_0)}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)} = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2.$$

При оценке интеграла $\mathfrak{I}_1$ положим $\varepsilon(r) = \sup K_r \cap Q\text{ess}|f_{\bar z}|$; по условию теоремы $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to 0$. Заметим, что и здесь мы будем предполагать, что $\varepsilon(r) \neq 0$ при $r \neq 0$. В противном случае f просто голоморфна вблизи z_0

$$|\mathfrak{I}_1| = \left|\frac{1}{\pi}\iint\limits_{K_r(z_0)\cap Q(z_0)}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon(r)}{\pi}\iint\limits_{K_r(z_0)\cap Q(z_0)}\frac{d\xi d\eta}{|\xi - z_0 - h||h - z_0|} = \frac{\varepsilon(r)}{\pi}\iint\limits_{K_r(0)\cap Q(0)}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta - h||h|} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon(r)}{\pi}\iint\limits_{K_r(0)}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta - h||\zeta|} = \frac{\varepsilon(r)}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|\leq 2|h|}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta - h||\zeta|} + \frac{\varepsilon(r)}{\pi}\iint\limits_{2|h|\leq\rho\leq r}\frac{d\rho d\varphi}{|\rho - h|} =$$

$$= \varepsilon(r)\left(M + 2\ln\frac{r}{2|h|}\right) \leq \varepsilon(r)\left(M + 2\ln\frac{r}{|h|}\right). \tag{21}$$

Займемся теперь оценкой интеграла $\mathfrak{I}_1$. Возьмем в $K_r(z_0)$ круг $\varkappa_1$ с центром в точке z_0+h радиуса $r_1 = |h|\psi(r)$, где функция $\psi(r) \to 0$ при $r \to 0$, и выбор которой укажем в дальнейшем. Перепишем интеграл $\mathfrak{I}_2$ в виде

$$\mathfrak{I}_2 = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{K_r(z_0)\setminus Q(z_0)} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)}$$

$$= \frac{1}{\pi} \iint\limits_{[K_r(z_0)\setminus Q(z_0)]\setminus \varkappa_1} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \iint\limits_{[K_r(z_0)\setminus Q(z_0)]\cap \varkappa_1} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)} = \mathfrak{I}_{21} + \mathfrak{I}_{22},$$

и оценим каждый интеграл $\mathfrak{I}_{21}$, $\mathfrak{I}_{22}$, имея в вицу, что на $K_r(z_0) \setminus Q(z_0)$ производная $f_{\bar{z}}$ ограничена константой Липшица функции $f(z)$ (что легко доказывается), и воспользуемся следующим почти очевидным утверждением.

У т в е р ж д е н и е.*Пусть $\mathcal{E}_1 \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{E}_2 \subset \mathbb{R}^m$ — два различные множества с численно одинаковой мерой:* $\mathrm{Mes}(\mathcal{E}_1) = \mathrm{Mes}(\mathcal{E}_2)$. *Если в $\mathcal{E}_1$ задана функция $g_1(x) \geq 0$ и в $\mathcal{E}_2$ задана функция $g_2(y) \geq 0$ такие, что $g_1(x) \leq g_2(y)$ для произвольных $x \in \mathcal{E}_1$, $y \in \mathcal{E}_2$, то справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\mathcal{E}_1} g_1(x)dx \leq \int\limits_{\mathcal{E}_2} g_2(y)dy.$$

Для того, чтобы применить это утверждение, выберем круг $\varkappa_0$ с центром в точке z_0 такой, чтобы его мера удовлетворяла условию

$$\mathrm{Mes}(\varkappa_0) = \mathrm{Mes}(K_r(z_0) \setminus Q(z_0)),$$

и радиус которой равен $z_0 = r\sqrt{\delta(r)}$ (это следует из условия (17)), где r — радиус круга $K_r(z_0)$, который содержит $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$. Итак, имеем

$$|\mathfrak{I}_{21}| \leq \frac{L}{\pi} \iint\limits_{[K_r(z_0)\setminus Q(z_0)]\setminus \varkappa_1} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z_0 - h||\zeta - z_0|} \leq$$

$$\leq \frac{L}{\pi} \frac{1}{|h|\psi(r)} \iint\limits_{K_r(z_0)\setminus Q(z_0)} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z_0|} - \frac{L}{\pi} \frac{1}{|h|\psi(r)} \iint\limits_{\varkappa_0} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z_0|} =$$

$$= \frac{L}{\pi}\frac{1}{|h|\psi(r)}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r\sqrt{\delta(r)}} d\xi d\eta = \frac{2Lr\sqrt{\delta(r)}}{|h|\psi(r)}, \tag{22}$$

$$|\mathfrak{I}_{22}| \leq \frac{L}{\pi}\iint\limits_{[K_r(z_0)\setminus Q(z_0)]\cap\varkappa_1}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z_0 - h||\zeta - z_0|} \leq$$

$$\leq \frac{L}{\pi}\frac{1}{|h|(1-\psi(z))}\iint\limits_{[K_r(z_0)\setminus Q(z_0)]\cap\varkappa_1}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z_0 - h|} \leq \frac{L}{\pi}\frac{1}{|h|(1-\psi(z))}\iint\limits_{\varkappa_1}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z_0 - h|} =$$

$$= \frac{L}{\pi}\frac{1}{|h|(1-\psi(z))}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{|h|\psi(r)} d\xi d\eta = \frac{2L\psi(r)}{|h|(1-\psi(r))}. \tag{23}$$

Суммируя оценки (21) - (23), получим

$$\mathcal{E}(r)\left(M + 2\ln\frac{r}{|h|}\right) + 2L\left(\frac{r}{|h|}\frac{\sqrt{\sigma(r)}}{\psi(r)} + \frac{\psi(r)}{1-\psi(r)}\right).$$

С помощью этих оценок, не изменяя обозначения, введенные выше, докажем сформулированную нами теорему.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. По условию теоремы $f_{\bar z} \to 0$ при $z \to z_0$ на $K_r(z_0) \cap Q(z_0)$. Введем функцию $\mathcal{E}(r) = \sup\limits_{K_r\cap Q} \operatorname{ess}|f_z|$: $\mathcal{E}(r) \to 0$ при $r \to 0$. При этом, если в некоторой окрестности $r = 0$ функция $\mathcal{E}(r) = 0$, то это означает, что в некоторой $U(z_0, r)$ окрестности точки z_0, $f_{\bar z}$ почти всюду равна нулю, а тогда из (18) следует, что $f(z)$ голоморфна в $U(z_0, r)$ и утверждение теоремы очевидно.

Поэтому в дальнейших наших рассуждениях предполагаем, что $\mathcal{E}(r) \neq 0$ при $r \neq 0$. По сути своей функция $\mathcal{E}(r)$ может быть и разрывной, что затрудняет ход доказательства.

Чтобы избежать эти затруднения, заменим $\mathcal{E}(r)$ функцией $\mathcal{E}_0(r)$, которая удовлетворяет условиям:

а) $\mathcal{E}_0(r)$ — непрерывная и монотонно возрастающая;

б) $\mathcal{E}_0(r) \geq \mathcal{E}(r)$;

в) $\mathcal{E}_0(r) \geq [\delta(r)]^{1/8}$.

Ясно, что для $\mathcal{E}_0(r)$ сохраняются все прежние оценки.

Так как значения контурных интегралов

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^2}$$

ограничены по модулю одним числом L — константой Липшица функции f, то всегда можно подобрать последовательность $\{r_m\}$ радиуса $r_m \to 0$, для которых значения интегралов

$$\mathfrak{I}_{r_m} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{r_m}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^2} \tag{24}$$

сходятся к вполне определенному пределу $\mathfrak{I}_{r_0}$. Пусть (24) такая последовательность. Тогда, вспоминая все прежние оценки интегралов, получим

$$|\Delta_h| = \left| \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{r_m}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^2} \right| \leq$$

$$\leq L\frac{|h|}{r_m} + \mathcal{E}_0(r_m)\left(M + 2\ln\frac{r_m}{|h|}\right) + 2L\left(\frac{r_m}{|h|}\frac{\sqrt{\delta(r_m)}}{\psi(r_m)} + \frac{\psi(r_m)}{1-\psi(r_m)}\right).$$

Отсюда, если положить $r_m\left[\mathcal{E}_0(r_m)\right]^2 \leq |h| \leq r_m\mathcal{E}_0(r_m)$, а функцию $\psi(r) = \sqrt[8]{\delta(r)}$, имеем

$$|\Delta_h| \leq L\mathcal{E}_0(r_m) + \mathcal{E}_0(r_m)\left(M + 4\ln\frac{1}{\mathcal{E}_0(r_m)}\right) +$$

$$+2L\left(\frac{1}{\mathcal{E}_0(r_m)}\frac{\sqrt{\delta(r_m)}}{\sqrt{\delta(r_m)}} + \frac{\sqrt{\delta(r_m)}}{1-\sqrt{\delta(r_m)}}\right) \leq$$

$$\leq L\mathcal{E}_0(r_m)+\mathcal{E}_0(r_m)\left(M + 4\ln\frac{1}{\mathcal{E}_0(r_m)}\right)+2L\left(\sqrt[4]{\delta(r_m)} + \frac{\sqrt[8]{\delta(r_m)}}{1-\sqrt{\delta(r_m)}}\right). \tag{25}$$

для всех h, меняющихся в круговых кольцах с неограниченно возрастающим модулем. Другими словами, в этом случае найдется последовательность "толстых"колец, вдоль которых разностное отношение $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ стремится к $\mathfrak{I}_{r_0}$.

Покажем сначала, что и наоборот, все предельные значения этого разностного отношения находятся среди предельных значений интеграла (24). В самом деле, пусть для некоторой последовательности

$$\frac{f(z_0+h_m) - f(z_0)}{h_m} \to \mathfrak{I}_0' \quad \text{при} \quad h_m \to 0.$$

Для каждого h_m обозначим через r_m единственный корень уравнения $r\mathcal{E}_0(r) = h_m$. Можем считать, что для полученной последовательности $\{r_m\}$ последовательность интегралов $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_{r_m}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^2}$ сходится; в противном случае мы можем выделить соответствующую подпоследовательность. Тогда из нашей общей оценки (25) следует

$$\left| \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_{r_m}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^2} \right| \leq$$

$$\leq L\mathcal{E}_0(r_m) + \mathcal{E}_0(r_m)\left(M + 4\ln\frac{1}{\mathcal{E}_0(r_m)}\right) + \left(\frac{1}{\mathcal{E}(r_m)}\frac{\sqrt{\delta(r_m)}}{\psi(r_m)} + \frac{\psi(r_m)}{1-\psi(r_m)}\right).$$

Так как правая часть при соответствующем выборе $\psi(r)$ стремится к нулю, то $\mathfrak{I}'_0$ совпадает с одним из предельных значений написанного интеграла для корней r_m уравнения $h_m = r\mathcal{E}_0(r)$

Используем теперь условие существования $f'_l(z)$ для нашей функции.

Как и только что, если $\mathfrak{I}'_0$ есть производное число для f в точке z_0, то найдется последовательность "толстых"колец, вдоль которых f моногенна с производной $\mathfrak{I}'_0$; так как вдоль порций направления $l(z_0)$, принадлежащих этим кольцам, этот предел равен $f'_l(z_0)$, то ему же равно и $\mathfrak{I}'_0$.

Другими словами, все производные числа f в точке z_0 совпадают и теорема доказана.

Как следствие этой теоремы приведем следующее утверждение:

Т е о р е м а 9. *Пусть $f(z) \in \mathrm{Lip}(D)$ и в некоторой точке $z_0 \in D$ обладает производной $f'_l(z)$ в некотором направлении l. Если существует асимптотический предел в этой точке либо производной f_z, либо $f_{\bar z}$, то f дифференцируема в точке z_0 причем соответствующий коэффициент дифференциала $df = f_z dz + f_{\bar z} d\bar z$ равен этому предельному значению.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, если $\lim\limits_{z\to z_0} f_{\bar z} = \alpha$, то для функции $\varphi(z) = f(z) - \alpha\bar z$ имеем: $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi_{\bar z} = 0$, т. е. (в наших условиях) $\varphi(z)$ — моногенна в точке z_0 а это и равносильно дифференцируемости f в этой точке.

Если же $\lim\limits_{z\to z_0} f_z = \beta$, то для функции $\psi(z) = \overline{f(z)}$ получим, что $\lim\limits_{z\to z_0} \psi_{\bar z} = \lim\limits_{z\to z_0} \overline{f_{\bar z}(z)} = \beta$, следовательно, по только что доказанному $\psi(z)$, а, значит, и функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0.

Глава 12

Аналитические функции с совершенным множеством особых точек

1. Нечто обзорное

В 1841 г., рассматривая представление некоторой аналитической функции в виде степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{при} \quad |z| < R.$$

Коши вывел интегральное представление той же функции

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad \zeta = \rho l^{2\varphi} \quad \text{и} \quad \rho < R, \quad C_\rho \equiv \{|z| = \rho\},$$

носящую теперь его имя. При этом сразу же возникли и неравенства Коши:

$$|a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n},$$

где $M(\rho) = \max|f(z)|$ на $|z| = \rho$.

Здесь же Коши пришел к заключению, что сам радиус R сходимости данного ряда есть расстояние от начала до ближайшей особой точки функции $f(z)$.

В 1844 г. с помощью своей же теоремы о вычетах (полученной им в 1826 г.) он доказывает, что аналитическая во всей плоскости и ограниченная функция необходимо является константой. Это важное утверждение, которое в настоящее время (справедливо или нет) известно как "теорема Лиувилля", и как заметил впервые Жордан, выводится непосредственно из неравенств Коши.

В 1843 г. Лоран дал для голоморфной функции f в кольце $R_1 < |z| < R_2$ при $R_1 < \rho_1 < |z| < \rho_2 < R_2$ формулу

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int\limits_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \int\limits_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right],$$

а затем:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

где ряды соответственно сходятся при $|z| > R_1$ и $|z| < R_2$.

Если Коши, развивая свою теорию вычетов, под особыми точками аналитической функции фактически понимал только ее полюсы, то указанные формулы Лорана, которые Вейерштрассу были уже известны в 1841 г., явились для него начальным пунктом для исследования уже существенно особых точек. Здесь Вейерштрасс и доказал, что значения функции f вблизи таких точек образуют плотное множество на всей комплексной плоскости. Это было у Вейерштрасса опубликовано лишь в 1874 г., а уже в 1879 г. Пикар доказал свою знаменитую теорему о том, что в любой окрестности существенно особой точки все значения на плоскости, кроме, возможно, одного, функция принимает бесконечное множество раз. Конечно, еще раньше — с применением тех же рядов Лорана — было уже известно, что если вблизи изолированной точки аналитическая функция ограничена, то она и непрерывно продолжается в эту точку и так продолженная функция оказывается в целой ее окрестности аналитической. В этот же период — в 70-е и 80-е года XIX столетия — Вейерштрасс предложил метод по-строения полной аналитической функции, исходя из ее определенного элемента. Именно, под "элементом аналитической функции", или, короче, под аналитическим элементом с центром a, будем понимать пару (a, S) комплексного числа a со степенным рядом S вблизи точки a. Скажем, далее, что аналитические элементы (a, S) и (b, T) являются непосредственными аналитическими продолжениями один другого, если круги сходимости S и T пересекаются и суммы S и T в их пересечении совпадают. Можно попытаться продолжить данный элемент (a, S), строя "цепи"(a, S), (a_1, S_1), $\ldots$, (a_n, S_n), такие, что два соседних в ней элемента образуют непосредственное продолжение один другого. Совокупность всех так возникших аналитических элементов образует аналитическую функцию, которая исходя из любого ее элемента (a, S), определена однозначно. Если эта функция оказывается многозначной, то это означает, что имеется много элементов с одинаковым центром. Это множество легко сочетать с построением римановой поверхности, на которой возникающая функция будет уже однозначной.

Вейерштрассу потребовалось построить пример "крайнего" случая — когда возникающая функция ограничивается одним единственным элементом. В 1880 г. он и предложил ряд

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} b^n z^{a^n},$$

где $0 < b < 1$, а целое $a \geq 2$ таково, что $ab > 1$. Легко видеть, что все граничные точки единичного круга сходимости этого ряда являются особыми для f: хотя сама функция ограничена в $|z| < 1$, но на плотном множестве радиусов ее производная стремится к ∞. Тем самим единичный круг является естественной областью существования этой функции: у нее не может быть аналитического продолжения в более широкую область.

Небезынтересно отметить, что появление рядов, подобных рядам Вейерштрасса, не осталось незамеченным: в 90-е годы XIX века появились и примеры и общие теоремы о рядах Тейлора у Пуанкаре, Адамара, Фабри (лакунарные ряды). Например, лакунарный ряд $f(z) = \sum\limits_{h=0} \frac{z^{2^h}}{2^{h^2}}$ с единичным кругом сходимости, представляет непрерывную функцию в замкнутом круге $|z| \leq 1$, бесконечно дифференцируемую на границе — и не только вдоль границы, а относительно всего круга! И тем не менее, вся окружность $|z| = 1$ сплошь состоит из особых точек f. При этом еще f отображает круг однолистно на некоторую выпуклую область с бесконечно гладкой границей! Э. Борель, например, исследуя эти ряды, во-первых, пришел к своему известному преобразованию и процессу суммирования [1] (1891 г.) расходящихся рядов вообще, а, во-вторых, одновременно высказал здесь же предположение, что если последовательные коэффициенты ряда выбираются случайно, т. е. независимо от предыдущих, то с вероятностью 1 множество особенностей соответствующей функции совпадает со всей граничной окружностью круга сходимости. И это было только на основе (теперь мы понимаем, что — глубокой) интуиции Бореля: ведь в тот момент еще далеко было до современных воззрений о вероятности, которое в дальнейшем (1909 г.) он назвал "счетными вероятностями" и в развитии которых затем принял весьма активное участие.

Сначала, все же, к этому вопросу подошли и с других сторон. В 1918 г. Хаусдорф доказал, что среди всех рядов Тейлора с целочисленными коэффициентами аналитически продолжающиеся ряды образуют лишь счетное множество, значит, остальные - мощности континуума, значительно более богатое.

Если снабдить голоморфных функций в единичном круге топологией равномерной сходимо-сти на компактах, то Ст. Кирст и Э. Шпильрайн доказали, что непродолжимых функций в этом классе — резидуальное множество, т. е.: всюду второй категории, опять-таки — подав-ляющие большинство.

В 1930 г. польский математик Штейнгауз фактически доказал утверждение Бореля, сведя вопрос прямо к лебеговой теории меры. А вскорости, 1933 г., поняли, что оно является частным случаем знаменитого колмогорового закона о "нуле" и "единице".

Идя по стопам Штейнгауза (о чем он прямо и говорит), используя его метод построения вспомогательных рядов, Винер (1923-1934 гг.) приходит к своей известной модели броуновского движения.

А ведь все начиналось с аналитических функций с простейшим совершенным множеством особенностей (окружность)!

В конце XIX столетия пульмерное совершенное Кантора было уже хорошо известно, а также его аналоги на плоскости. То, что такое множество P может особым для аналитической функции, показал еще Пуанкаре, дав ряды $\sum\limits_n A_n/(z-a_n)$, где $\{a_n\}$ — плотны на P.

Вообще, можно сказать, что XIX век закончился в убеждении, что вблизи своих особенностей (по аналогии с изолированными точками) аналитическая функция или ее производная обязательно неограниченные.

И все же вопрос о существовании аналитических функций, непрерывно продолжающиеся на пульмерное множество своих особенностей, был задет уже в 1897 г.: решение одой из проблем аналитической теории дифференциальных уравнений Пенлеве получил на основании своей гипотезы, что подобные функции не существуют.

Хотя указанная проблема в теории уравнений была в скорости решена независимо от этой гипотезы, но возникший вопрос также остался незамеченным в ученом мире.

И вот — сначала Помпейю [2], а затем Данжуа [3], внесший необходимые дополнения в рассуждения Помпейю, первые построили примеры всюду непрерывных аналитических функций с совершенным множеством особых точек. Примеры эти давались в виде (в современных обозначениях)

$$f(z)=\int\limits_{\mathcal{E}}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta d\eta}{\zeta-z},\quad \zeta=\zeta+i\eta,$$

где $\varphi(\zeta)$ ограниченная на нульмерном (в смысле топологической размерности!) компактном множестве положительной плоской лебеговой меры.

Источником для построения подобных примеров является следующая теорема, основанная на тех же построениях Помпейю и Данжуа, что и выше, и несколько обобщая их:

Т е о р е м а. *Пусть $\mathcal{E} \in C$ — произвольный компакт плоской положи-тельной меры. Если $\varphi \in L_p(\mathcal{E})$, $\rho > 2$, то функция*

$$g(z) = \iint_{\mathcal{E}} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta d\eta}{\zeta - z} \tag{1}$$

является ограниченной, всюду на плоскости непрерывной функции, аналити-ческой вне множества $\mathcal{E}$, причем

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq L|z_1 - z_2|^\alpha, \quad \alpha = \frac{\rho - 2}{\beta},$$

для произвольных точек z_1, z_2 плоскости. Если же $\varphi \in L_\infty(\mathcal{E})$, то последнее неравенство заменяется условием Дини

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq L|z_1 - z_2| \ln \frac{2d}{|z_1 - z_2|},$$

где d — диаметр множества $\mathcal{E}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналитичность $g(z)$ вне $\mathcal{E}$ очевидна. Применяя неравенство Гельдера к интегралу $g(z)$, получим:

$$|g(z)| \leq \iint\limits_{\mathcal{E}} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta d\eta}{\zeta - z} \leq \left(\iint\limits_{\mathcal{E}} |\varphi(\zeta)|^p d\zeta d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\iint\limits_{\mathcal{E}} |\zeta - z|^{-q} d\zeta d\eta \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right).$$

Так как $q < 2$, то

$$\left(\iint\limits_{\mathcal{E}} |\zeta - z|^{-q} d\zeta d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{2\pi}{\alpha q} \right)^{\frac{1}{q}} d^\alpha = M_1$$
$$(d = \operatorname{diam} \mathcal{E}), \quad |q(z)| \leq M_1 L_p(\varphi, \mathcal{E}),$$

т. е. $g(z)$ — ограниченная функция. Применяя то же неравенство Гельдера

$$g(z_1) - g(z_2) = (z_1 - z_2) \iint\limits_{\mathcal{E}} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta d\eta}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}, \quad z_1 \neq z_2,$$

получаем

$$g(z_1) - g(z_2) \leq L_p(\varphi, \mathcal{E}) |z_1 - z_2| \left(\iint\limits_{\mathcal{E}} |\zeta - z_1| |\zeta - z_2|^{-q} d\zeta d\eta \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Оценим интеграл вида

$$G = \iint\limits_{\mathcal{E}} |\zeta - z_1|^{-\alpha} |\zeta - z_2|^{-\beta} d\zeta d\eta, \quad \alpha < 2, \ \beta < 2.$$

Опишем вокруг точки z_1 круг K_1 радиуса $\rho = 2|z_1 - z_2|$. Рассмотрим также кон-центрический круг K_0 радиуса $2\rho_0$, такой, что $\mathcal{E} \subset K_0$. Если ζ лежит вне K_1, то $2|\zeta - z_1| \geq |\zeta - z_2|$. Поэтому

$$G_0 = \iint\limits_{K_0 \setminus K_1} |\zeta - z_1|^{-\alpha} |\zeta - z_2|^{-\beta} d\zeta d\eta \leq$$

$$\leq 2^{1+\beta} \pi \int\limits_{p}^{2p_0} r^{1-\alpha-\beta} dr < \begin{cases} \frac{8\pi |z_1 - z_2|^{2-\alpha-\beta}}{\alpha+\beta-2} & \text{при } \alpha + \beta > 2, \\ 8\pi \ln \frac{\rho_0}{|z_1 - z_2|} & \text{при } \alpha + \beta = 2, \\ \frac{32\pi}{2-\alpha-\beta} \rho_0^{2-\alpha-\beta} & \text{при } \alpha + \beta = 2. \end{cases}$$

Далее,

$$G_1 = \iint\limits_{K_1} \frac{d\zeta d\eta}{|\zeta - z_1|^{\alpha} |\zeta - z_2|^{\beta}} = \frac{1}{|z_1 - z_2|^{\alpha+\beta-2}} \iint\limits_{|\zeta| \leq 2} \frac{d\zeta d\eta}{|\zeta|^{\alpha} |\zeta - l^{i\vartheta}|^{\beta}} \leq \frac{M_{\alpha,\beta}}{\frac{1}{|z_1 - z_2|^{\alpha+\beta-2}}}.$$

Так как $G \leq G_0 + G_1$, то

$$G \leq \begin{matrix} M'_{\alpha,\beta} |z_1 - z_2|^{2-\alpha-\beta} & \text{при } \alpha + \beta > 2, \\ M''_{\alpha,\beta} + 8\pi \left| \ln |z_1 - z_2| \right| & \text{при } \alpha + \beta = 2, \\ M'''_{\alpha,\beta} & \text{при } \alpha + \beta = 2. \end{matrix}$$

У нас $1 < q < 2$, поэтому

$$|z_1 - z_2| \left(\iint\limits_{\mathcal{E}} |\zeta - z_1||\zeta - z_2|^{-q} d\zeta d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \leq M_p |z_1 - z_2|^{\frac{p-2}{p}}$$

и получаем первую оценку теоремы.

Если φ ограничена на $\mathcal{E}$, т. е. $\varphi \in L_{\infty(\mathcal{E})}\mathcal{E}$, то получим и вторую оценку. Теорема доказана. Если $\mathcal{E}$ — нигде не плотный компакт, разбивающий плоскость, то, вообще говоря, аналитические функции, определенные формулой (1), в разных компонентах его дополнения могут оказаться различными по своей природе: в этом случае они, как бы, просто искусственно "склеены" этой формулой; ниже мы приведем соответствующие при-меры. Но если $\mathcal{E}$, не разбивает плоскость, в частности, если $\mathcal{E}$, — простая дуга или нульмерный компакт, то формула (1) определяет единую аналитическую функцию вне $\mathcal{E}$, и если она не равна тождественно постоянной, то $\mathcal{E}$ содержит (совершенное) множество ее особых точек, на которое тем самым она непрерывно продолжается. Например, если $\mathcal{E}$, — нульмерно и положительной меры в каждой своей порции, то функция $g(z)$, определяемая равенством

$$g(z) = \iint_{\mathcal{E}} \frac{d\zeta d\eta}{\zeta - z},$$

как раз будет такой функцией. Действительно, то, что эта функция не есть постоянная, следует из равенства

$$\lim_{z\to\infty} z \iint_{\mathcal{E}} \frac{d\zeta d\eta}{\zeta - z} = - \iint_{\mathcal{E}} d\zeta d\eta = -\mathrm{Mes}\mathcal{E} \neq 0.$$

Вычисляемое значение (вычета $g(z)$ в бесконечности), как известно равно контурному интегралу $-\int\limits_{\lambda} g(z)dz$, где λ охватывает все множество $\mathcal{E}$. Во-вторых, легко в данном случае доказать, что каждая точка из $\mathcal{E}$ является особой для $g(z)$, т. е. ни в какой окрестности любой точки $\mathcal{E}$ $g(z)$ не является аналитической.

В самом деле, для произвольной точки $z_0 \in \mathcal{E}$ и ее окрестности $U(z_0)$ проведем в $U \setminus \mathcal{E}$ замкнутый спрямляемый контур λ, содержащий z_0 внутри. Контур λ разбивающий $\mathcal{E}$ на две отдельные порции $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1 : \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1$, $z_0 \in \mathcal{E}_0$, а функция g представляется в виде

$$g(z) = \iint_{\mathcal{E}} \frac{d\zeta d\eta}{\zeta - z} = \iint_{\mathcal{E}\prime} + \iint_{\mathcal{E}_\infty} = g_0(z) + g_1(z).$$

Контурный интеграл $-\int\limits_{\lambda} g(z)dz = -\int\limits_{\lambda_0} g(z)dz = \mathrm{Mes}\mathcal{E} \neq 0$. Из произвольности z_0 и $U(z_0)$ следует наше утверждение.

После результатов Помпейю и Данжуа внимание математиков по части исследования аналитических функций было в основном направлено на поведение этих функций вблизи нульмерных множеств их особенностей, по видимому, считая, что нульмерные особые множества по своей природе должны быть ближе к природе изолированных особых точек, чем, скажем, особым линиям. Оказалось, что частично это действительно так; и все же достаточно массивные (меру этой массивности мы еще введем) нульмерные особые множества оказывается ближе к особым одномерным множествам.

Здесь одним из ближайших последователей Помпейю и Данжуа снова оказался Пенлевэ, возьмем произвольный нульмерный компакт $\mathcal{E} \subset (C)$ и заключим его точки в конечную систему замкнутых спрямляемых кривых (например, ломаных), расположенных одна вне другой. Нижний предел сумм длин всех таких кривых при стремлении к нулю максимального из их диаметров назовем длинной $l(\mathcal{E})$ множества $\mathcal{E}$.

Приведем некоторые примеры. Почти очевидно, что если $\mathcal{E}$ принадлежит простой спрямляемой кривой, то $l(\mathcal{E}) = 2\mathrm{Mes}\,\mathcal{E}$ (мера Лебега относительно кривой).

Следующий пример обобщает топологический квадрат $P_0^2 = P_0 \times P_0$ классического канторового совершенного множества. Возьмем единичный квадрат $Q_0 = I \times I$ и выкинем из него все точки двух полос параллельных осям координат: $\{a < x < 1-a\}$, $\{a < y < 1-a\}$, $0 < a < \frac{1}{2}$. Объединение оставшихся четырех квадратов со стороной a обозначим через Q_1. Для каждого из этих квадратов повторим тоже построение (с тем же коэффициентом пропорциональности a); объединение возникших 4^2 квадратов со стороной a^2 обозначим через Q_2. Продолжая это построение неограниченно, получаем монотонно убывающую последовательность $Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_n \supset \ldots$ систем квадратов, пересечение которой $\mathcal{E} = \bigcap\limits_n Q_n$ есть нульмерный компакт. Сравнительно легко определить длину множества $\mathcal{E}$ для каждого a. Сумма периметров квадратов равна n, т. е. из Q_n, равна $4(4a)^n$. Поэтому если $a < \frac{1}{4}$, то легко видеть, что $l(\mathcal{E}) = 0$ в этом случае. Если $a < \frac{1}{4}$, то сумма периметров квадратов любого ранга равна 4; можно показать , что в этом случае $l(\mathcal{E}) = 4$. Для нас достаточно будет лишь отметить, что длина $\mathcal{E}$ конечна и положительна; последнее следует из того, что проекция системы Q_n вдоль прямой $y = \frac{1}{2}x$

есть постоянный отрезок, а, значит на этот отрезок проектируется и их предел $\mathcal{E}$. Пусть теперь $a > \frac{1}{4}$. Обозначим длину $\mathcal{E}$ через l. Часть множества $\mathcal{E}$, лежащая в одном из квадратов Q_1, имеет длину $\frac{l}{4}$; с другой стороны, эта часть подобна $\mathcal{E}$ с коэффициентом подобно a; поэтому $\frac{1}{4} * l = a * l$. Так как $a > \frac{1}{4}$, то либо $l = 0$, либо $l = \infty$. Но случая $l = 0$ не может быть: проекция каждой системы Q_n вдоль прямой $y = (1 - 2a)x$ есть постоянный отрезок. Поэтому в случае $a > \frac{1}{4}$ $l(\mathcal{E}) = \infty$. В частности для квадрата P_0 канторово множество P_0 $\left(a = \frac{1}{3}\right)$ также имеем: $l(P_0^2) = \infty$.

Отнимем еще, что все построенные сейчас обобщенные "канторовы квадраты" имеют пло-скую лебегову меру нуль.

Общий характер возможного поведения аналитической функции вблизи множества особых точек можно теперь описать следующей теоремой Пенлевэ:

Если множество $\mathcal{E}$ особых точек $f(z)$ имеет длину нуль, $l(\mathcal{E}) = 0$, то в окрестности $\mathcal{E}$ она не может быть ограниченной; если $l(\mathcal{E}) < \infty$, то f не может быть всюду по $\mathcal{E}$ непрерывной.

При доказательстве этой теоремы мы будем полагать, что каждая точка $\mathcal{E}$ является существенно особой для f, т. е. ни в какой окрестности любой точки из $\mathcal{E}$ функция f не является гомоморфной.

Возьмем произвольную открыто-компактную порцию множества $\mathcal{E}$ и заключим ее внутрь замкнутого спрямляемого контура C; внутри C проведем произвольное (конечное) число непересекающихся контуров C_k $(k = 1, \ldots, k_0)$, содержащих внутри ту же порцию $\mathcal{E}$, и для полученной многосвязной области напишем формулу Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int\limits_{C_k} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f_0(z) + f_1(z).$$

Функция $f_0(z)$ гомоморфная внутри C, а f_1 вне $\bigcup\limits_k C_k$. Поэтому внутри $\bigcup\limits_k C_k$ функция f и f_1 имеют одни и те же особые точки.

Зафиксируем точку z в нашей области и оценим функцию f_1. Для $\delta = \rho\left(z, \bigcup\limits_k C_k\right)$ имеем $|f_1| \leq \frac{ML}{2\pi\delta}$, где $M = \max\limits_{\bigcup_k C_k} |f|$ и $L = \sum\limits_k l(C_k)$. Если теперь f — ограниченная внутри C функция, то M не зависит от выбора контуров C_k и, так как L может быть сделано сколь угодно малым, то $|f_1|$, который не зависит от выбора контуров, должен быть равным нулю. Из произвольности z и следует, что $f_1 \equiv 0$, $f(z) = f_0(z)$

и, следовательно, f гомоморфная всюду внутри C, что невозможно по предположению; первая часть теоремы доказана.

Вторая часть доказывается на основании той же формулы Коши с выбором произвольных точек $z_k \in \mathcal{E}$ внутри контура C_k. Тогда

$$|f_1| \leq \frac{1}{2\pi i} \sum_k \left| \int\limits_{C_k} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right| = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \left| \int\limits_{C_k} \frac{f(\zeta) - f(z_k)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq$$
$$\leq \frac{L}{2\pi\delta} \max_{C_k} |f(\zeta) - f(z_k)|.$$

Если f всюду внутри C непрерывна, то при стремлении к нулю максимального из диаметров C_k мы по условию можем считать L ограниченной, а потому, как и выше, получим $f_1 \equiv 0$ и f — гомоморфная всюду внутри C, что противоречит нашим первоначальным предположениям.

Несколько замечаний по поводу доказанной теоремы.

Было доказано, что существует нульмерное множество конечной положительной длины , — например, построенный нами выше обобщенный канторов квадрат при $a = \frac{1}{4}$, — которые, тем не менее обладают тем же свойством, что и множество длинны нуль в этой теореме: любая аналитическая и ограниченная в их окрестности функция продолжается на все это множество — оно устранимо как возможная особенность для ограниченных функций (еще см. ниже). Поэтому длина множества явилась лишь первым (но весьма наглядным) приближением к характеристике особых множеств аналитических функций. Ниже мы приведем в определенном смысле полное завершение формулировки теоремы Пенлевэ.

Далее, из нее сразу следует, что если аналитическая в окрестности особого множества $\mathcal{E}$ функция продолжается на него непрерывно, то каждая порция $\mathcal{E}$ имеет бесконечную длину. Мы уже видели, что для нульмерного множества $\mathcal{E}$, $\dim \mathcal{E} = 0$, положительной плоской меры такие функции существуют, но тот факт, что в этом случае $l(\mathcal{E}) = \infty$, легко доказать и непосредственно. Ниже мы привели (без доказательства) конструкции примеров аналитических всюду непрерывных функций для случая, когда множество особых точек для них служит канторов квадрат при $a > \frac{1}{4}$. Наконец, в связи с той же теоремой Пенлевэ возникает вопрос о существовании ограниченных функций вблизи особых множеств конечной (и тогда уже положительной) длины. Мы приведем простейший пример такой функции , принадлежащий Данжуа. Пусть $\mathcal{E}$ — нульмерное совершенное множество положительной лебеговой меры, лежащие на оси Ox. Рассмотрим функцию:

$$\psi(z) = \int\limits_{\mathcal{E}} \frac{dx}{x-z}, \quad z \in C \setminus \mathcal{E}.$$

Если $x - z = |x - z| l^{i\varphi} = R l^{i\varphi}$, то

$$\psi(z) = \int\limits_{\mathcal{E}} \frac{\cos\varphi}{R} dx - i \int\limits_{\mathcal{E}} \frac{\sin\varphi}{R} dx.$$

Выражение $\int\limits_{\mathcal{E}} \frac{\sin\varphi}{R} dx$ есть угол, под которым из точки z видно множество $\mathcal{E}$ (интеграл Гаусса, потенциал двойного слоя), поэтому $\mathrm{Im}\psi(z) \leq \pi$. Уже из этого следует, что $\psi \neq \mathrm{const}$, хотя это можно вывести сразу из соотношения

$$\lim_{z\to\infty} z\psi(z) = \lim_{z\to\infty} z \int_{\mathcal{E}} \frac{dx}{x-z} = -\int_{\mathcal{E}} dx = -\mathrm{Mes}\mathcal{E} \neq 0.$$

Из ограниченности $\mathrm{Im}\psi(z)$ следует, что $f(z) = l^{i\psi(z)}$ есть функция ограниченная на всей плоскости. Как мы делали это ранее, нетрудно показать, что каждая точка $\mathcal{E}$ является для f особой.

Рассмотрим подробнее устранимые особенности для ограниченных аналитических функций. Еще в 40-е годы Альфорс ввел следующее понятие аналитической емкости компакта $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}$

$$\gamma(\mathcal{E}) = \sup |f'(\infty)|,$$

где верхняя грань бе-рется по всем аналитическим функциям $f : \mathbb{C} \setminus \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ с $|f| \leq 1$ на $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}$ и $f'(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} z[f(z) - f(\infty)]$. Для произвольного множества $F \subset \mathbb{C}$ мы полагаем $\gamma(F) = \sup\{\gamma(\mathcal{E}) : \mathcal{E} \subset F, \mathcal{E}$ — компакт$\}$.[1] Альфорс тогда же доказал, что для того что бы $\mathcal{E}$ было устранимым для огра-ниченных функций, необходимо и достаточно, чтобы аналитическая емкость $\gamma(\mathcal{E}) = 0$. Однако, этот результат не давал геометрической характеристики устранимых множеств, так как и определение γ было чисто аналитическим.

Аналитическая емкость была переоткрыта Витушкиным в 50-х годах при решении задачи равномерной аппроксимации аналитических функций рациональными функциями . Он показал, что аналитическая емкость играет основную роль в подобного рода задачах. Но

[1] понятие емкости ($\mathbb{C}$- емкость) введена и для класса всюду непрерывных аналитических функций.

опять-таки главные функции здесь возникают из-за отсутствия полной характеристики аналитической емкости в метрических или геометрических терминах.

Уже теорема Пеплевэ показала, что в подобной характеристики должны участвовать какие-то меры на компакте $\mathcal{E}$. Так оно и оказалось.

Напомним некоторые определение и факты.

Пусть X — метрическое пространство и 2^X — совокупность всех подмножеств из X. будем говорить, что φ — мера на X, если $\varphi : 2^X \to \overline{R^+}[\equiv [0, +\infty]]$ и $\varphi(A) \leq \sum\limits_{B \in F} \varphi(B)$ для любого счетного семейства $F \subset 2^X$ такого, что $A \subset \cup F$.

Следуя Каратеодори, скажем, что является φ-измерным множеством, если $\varphi(T) = \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A)$ при любом $T \subset X$.

Оказывается, что в се открытые множества в X φ-измерны, то φ-мера в классе всех φ-измерных множеств обладает всеми основными свойствами, какими обладает в $\mathbb{R}^n$, мера Лебега: полная аддитивность, переход к пределу для монотонных последовательностей, "исчерпание" φ -измеримых множеств замкнутыми множествами изнутри и "зажимание" открытыми множествами извне и т. д.

Если X - компакт и $\varphi(K) < \infty$, то φ с этими дополнительными свойствами называется радоновой мерой.

Обычным образом вводим понятие φ-измерных функций, интегралов Лебега по φ-мере и т. д. Наконец, рассматриваем вместо знакопостоянных мер — знакопеременные, как разности $\varphi^+ - \varphi^-$ обычных мер, далее, вообще, комплексные меры. Наконец, напомним одну важную конструкцию Каратеодори, позволяющую строить основные геометрические меры в метрических пространствах. Пусть F — семейство подмножеств пространства X и φ — такая функция на F, что $0 \leq \varphi(S) \leq \infty$ при $S \in F$. Построим вспомогательные меры φ_δ, соответствующие $0 < \delta \leq \infty$, и затем основную меру φ следующим образом.

При $A \subset X$ значение $\varphi_\delta(A)$ определяется как точная нижняя грань множества чисел $\sum\limits_{S \in G} \varphi(S)$ соответствующим всем счетным семействам та-ким, что $G \subset F \cap \{S : \mathrm{diam} S \leq \delta\}$ и $A \subset \cup G$.

Из неравенства $\varphi_\delta \geq \varphi_\sigma$ для $0 < \delta < \sigma \leq \infty$ вытекает существование предела $\varphi(A) = \lim\limits_{\delta \to 0+} \varphi_\delta(A) = \sup\limits_{\delta > 0} \varphi_\delta(A)$ для любого $A \subset X$.

φ_δ и φ — меры на X, причем нетрудно доказать что все открытые множества из X являются φ-измерными.

Мы назовем меру φ результатом применения конструкции Каратеодори и функции φ.

Для наших ближайших целей самым важным будет пример функции $\varphi(S) = \alpha(m)2^{-m}(\mathrm{diamS})^m$ при $S \subset X$, где $0 < m \leq 2$ и

$$\alpha(m) = T\left(\frac{1}{2}\right)^m T\left(\frac{m}{2}+1\right) [\alpha(1) = 2, \alpha(2) = \pi].$$

Если F — семейство всех несущих подмножеств из X, то результат применения конструкции Каратеодори называется m-мерной хаусдорфовой мерой по X и обозначается через H^m.

Отметим, что для длины $l(\mathcal{E})$ множества $\mathcal{E}$ по Пенлевэ имеем неравенства: $2H^1(\mathcal{E}) \geq l(\mathcal{E}) \geq H^1(\mathcal{E})$.

Каждый нульмерный совершенный компакт $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}$ можно рассматривать как канторово множество, каким-то взаимно однозначным образом "рассыпанное" на плоскости; при этом можно получать и множества положительной лебеговой меры и множества неспрямляемых кривых, устранимые и неустранимые множества для различных классов аналитических функций и т. д. Мы уже видели, что множества конечной длины могут быть как устранимыми для ограниченных аналитических функций, так и неустранимыми. Это означает, что аналитические функции чутко реагируют на геометрию расположения различных точек своих основных особенностей и нужно было разгадать эту геометрию.

Мы и приведем формулировку теоремы, которую можно считать решением проблемы Пенлевэ, т. е. проблему характеризации устранимых особенностей для устранимых функций в геометрических терминах.

Для трех различных точек $x, y, z \in C$, назовем их кривизной Менгера, величину $C(x, y, z) = \frac{1}{R(x,y,z)}$, где $R(x, y, z)$ есть радиус окружности, проходящей через x, y, z (с $R(x, y, z) = \infty$, $C(x, y, z) = 0$, если x, y, z лежат на одной прямой); если две из них совпадают, полагаем $C(x, y, z) = 0$. Скажем, что положительная радоновая мера μ — линейного роста, если при некоторой константе C имеем: $\mu(B(x, r)) \leq Cr$ для всех $x \in C$ и $r > 0$; здесь $B(x, r)$ —- круг радиуса r.

Для положительной радоновой меры μ положим

$$C_\mu^2(x) = \iint C(x, y, z)^2 d\mu(x) d\mu(y)$$

, и назовем кривизной меры μ величину

$$C^2(\mu) = \int C^2_\mu(x)d\mu(x) = \iiint C^2_\mu(x,y,z)^2 d\mu(x)d\mu(y)d\mu(z)$$

.

Решает проблему Пеплевэ следующая теорема [4]:

Компактное множество $\mathcal{E} \subset C$ неустранимо для ограниченных аналитических функций тогда и только тогда, когда на нем существует линейного роста положительная радоновая мера с конечной кривизной. В этом случае нетривиальная ограниченная аналитическая функция выражается интегралом $\int\limits_{\mathcal{E}} \frac{d\mu}{\zeta - z}$.

Иначе:

Компактное множество $\mathcal{E} \subset C$ устранимо для ограниченных аналитических функций в том и только в том случае, когда существует конечная положительная радоновая мера μ на C такая, что для каждого $x \in \mathcal{E}$ либо $\theta^*_\mu(x) = \infty$, либо $C^2_\mu(x) = \infty$.

Здесь $\theta^*_\mu(x)$ означает верхнюю линейную плотность μ в точке x, т. е. $\theta^*_\mu(x) = \overline{\lim\limits_{r\to 0}} \frac{\mu(B(x,r))}{r}$.

Отметим еще один из недавних результатов, полученных по этому же пути и уже вполне геометричный: компактное множество $\mathcal{E}$ конечной длины, т. е. $H^1(\mathcal{E}) < \infty$, имеет аналитическую емкость нуль тогда и только тогда, когда оно полностью неспрямляемо, т. е. если $H^1(\mathcal{E} \cap T) = 0$ для каждой спрямляемой кривой T (см. канторов квадрат при $a = \frac{1}{4}$).

Но вернемся к функциям, продолжающимся непрерывно на множество своих особенностей — ведь мы с них и начинали, но по дороге к нам вмешалась теорема Пенлевэ и нам пришлось отвлечься на класс ограниченных функций. После примеров Помпейю и Данжуа, связанных с множеством особенностей положительной лебеговой меры исторически первый пример подобной функции, но с особым множеством плоской нулевой меры, был построен В.В. Голубевым [5]; особое множество в нем — классический канторов квадрат P^2_0. Это было, кстати (косвенным и весьма трудным!), доказательством того, что $H^1(P^2_0) = \infty$. Позже П. Урысон [6] привел намного более простую конструкцию примера все для того же P^2_0, которое, как показал Данжуа [7], переносится и на все обобщенные канторовы квадраты (для $a > \frac{1}{4}$). Именно, для каждого n возьмем 4^n квадратов системы Q_n, в каждом из которых выберем произвольную точку ζ_n вне Q_{n-1}

$(n = 1, 2, \ldots, 4^n)$, и рассмотрим среднее $f_n(z) = \frac{1}{4^n} \sum\limits_{n=1}^{4^n} \frac{1}{\zeta_n - z}$. Данжуа доказывает, что последовательность $\{f_n(z)\}$ вне $\mathcal{E}$ равномерно сходится независимо от выбора точек ζ_n к одному пределу $f(z)$, голоморфному вне $\mathcal{E}$, который в случае $a > \frac{1}{4}$ непрерывно продолжается на $\mathcal{E}$.

Мы увидим далее (пример Витушкина), что всюду непрерывная функция $f(z)$ (для нигде не плотных $\mathcal{E}$) не всегда может быть представлена в виде интеграла типа Помпейю- Данжуа $f(z) = \iint\limits_{\mathcal{E}} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta d\eta}{\zeta - z}$, даже если заменить $\varphi(\zeta) d\zeta d\eta$ любой мерой $d\mu$.

Тем не менее, легко доказать [8], что любую такую функцию можно представить в виде предела $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{p_n} \frac{\varphi_n(\zeta) d\zeta d\eta}{\zeta - z}$, где плотности φ_n ограниченны: $|\varphi_n| < C_n$, p_n — состоит из квадратов, покрывающих $\mathcal{E}$, а сходимость интегралов равномерна внутри $\overline{C} \setminus \mathcal{E}$.

Выше мы строили меру H^m, применяя конструкцию Каратеодори к функции вида $\varphi(r) = r^m$.

Мы рассмотрим неубывающую при $r \geq 0$ функцию $\varphi(r)$, такую, что $\int\limits_0^1 \varphi(r) \frac{dr}{r^2} < \infty$ и, пользуясь конструкцией Каратеодори, по-строим на данном компакте $\mathcal{E}$ φ-меру.

Оказывается [9], что если $\varphi(\mathcal{E}) > 0$, то существует всюду непрерывная на плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ аналитическая вне $\mathcal{E}$ функция $f(z)$, для модуля непрерывности $\omega(\delta)^2$ имеем оценку $\omega(\delta) \leq C \left(\int\limits_0^1 \varphi(r) \frac{dr}{r^2} + \delta \int\limits_0^1 \varphi(r) \frac{dr}{r^3} \right)$ (C — постоянно).

Одной из таких функций является $f(z) = \int\limits_{\mathcal{E}} \frac{d\varphi \operatorname{mes} \mathcal{E}}{\zeta - z}$, — так сказать, в духе Помпейю, Данжуа: у них $\varphi(r) = Cr^2$ и оценки совпадают.

Что касается устранимости возможных особых множеств для некоторых классов аналитических функций, можно привести такие утверждения:

Пусть $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}$ — компакт, $\omega(r) \geq 0$ непрерывная и не убывает при $r \geq 0$, $(\varphi)\mathrm{mes}\mathcal{E} = 0$ при $\varphi(r) = r\omega(r)$. Тогда класс функций $f(z)$, аналитических в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}$ и всюду непрерывных, для которых $\omega_f(\delta) \leq \omega(\delta)$, состоит из одних постоянных.

---

[2] $\omega_f(\delta) = \sup\{|f(z') - f(z'')| : z', z'' \in G, |z' - z''| < \delta\}$

Для того чтобы класс функций, аналитических в $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}$ и удовлетворяющих на $\mathcal{E}$ условию Липшица порядка α, $0 < \alpha \leq 1$, состоял из одних постоянных, необходимо и достаточно, чтобы $H^{1+\alpha}(\mathcal{E}) = 0$.

Конечно, решенная выше проблема Пенлевэ в одну строчку дает критерий устранимости и в случае непрерывного продолжения функции на возможное множество особенностей; но так как ограниченность и непрерывность вещи все-таки разные, то на практике с каждой всюду непрерывной функцией приходится иметь дело по своему. Если в качестве множества $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}$ взять простую дугу положительной плоской меры в каждой своей порции, то, по доказанному выше, функция $g(z) = \iint_{\mathcal{E}} \frac{d\zeta d\eta}{\zeta - z}$ является всюду непрерывной аналитической функцией, причем и здесь нетрудно показать, что каждая точка дуги $\mathcal{E}$ является для $g(z)$ особой.

В ответ на один вопрос Н.Н. Лузина, заданный ему в личной беседе, А. Данжуа [7] впервые построил пример всюду непрерывной аналитической функции с особой дугой, являющуюся графиком однозначной непрерывной функции $y = \psi(x)$. В настоящее время имеется уже много подобных примеров.

Следует, наверное, отметить тот прием, который позволил В.В. Голубеву строить различные функции с особенностями и который не часто строился в его время. Сейчас этот прием в просторечии называют снятием меры с прообраза. Именно, если мы хотим, например, по-строить функцию с заданным наперед особым множеством $\mathcal{E}$, то беря гомеоморфизм φ некоторого линейного или плоского множества $\mathcal{E}_0$ положительной меры на множество $\mathcal{E}$, рассматриваем интеграл $f(z) = \int\limits_{\mathcal{E}_0} \frac{d\mu(\mathcal{E}_0)}{\varphi\zeta - z}$ $(\zeta \in \mathcal{E}_0)$. Легко доказывается (как и выше), что этот интеграл отличен от постоянной, каждая точка является особой и т.д. Именно подобным примером В.В. Голубев построил свой пример всюду непрерывной аналитической функции с особым множеством $\mathcal{E} = P_0 \times P_0$: он рассматривает график функции $u = \theta(x) + \theta(y)$ над единичным квадратом, где $\theta(x)$ — знаменитая "лестница Кантора", часть его над $\mathcal{E}$ имеет положительную площадь в каждой своей порции и с этой части снимаем эту меру на $\mathcal{E}$, пишем нужный интеграл и т. д.

А. Данжуа, фактически следуя той же идее, строит пример всюду непрерывной функции с особой однозначной дугой в виде $f(z) = \int\limits_0^1 \frac{d\zeta}{\xi + i\psi\xi - z}$, где $\zeta = \xi + i\psi(\xi)$ есть гомеоморфизм отрезка $[0, 1]$ на часть графика вейерштрассовой нигде не дифференцируемой функции $y = \psi(x)$.

Конечно, написать подобные аналитические представления — это только начало. Намного сложнее доказать, что представленная им функция обладает теми или иными свойствами, например, непрерывной продолжимостью на особое, —- в этом убеждают работы В.В. Голубева, А. Данжуа и других, где эти доказательства связаны со сложными и тонкими оценками и построениями.

Отметим еще, что Данжуа, завершая идею с однозначной дугой, строит пример всюду непрерывной аналитической функции, особое множество которой есть график $L : y = \psi(x)$ на всем протяжении оси Ox. Другими словами, фактически построены две аналитические функции: одна, $f_1(z)$ — выше L, другая $f_2(z)$ — ниже L, обе принимают на L равные непрерывные значения и тем не менее не являются аналитическими продолжениями одна для другой. Конечно, это — один из ярких контрпримеров к возможному усилению теоремы об аналитическом продолжении через неспрямляемую дугу.

В процессе исследования функции с особенностями возник вопрос о существовании не толь-ко всюду непрерывных, но и однолистных аналитических функций вблизи множества особенностей $\mathcal{E}$. Скажем для построенных нами "канторовых квадратов" такие функции не существуют — это следует из того, что проекции их на оси координат имеют меру нуль и из локальной суммируемости производной с квадратом (последнее из-за однолистости).

Первые примеры однолистных функций с особенностями были построены в работе [10] (хотя и несколько неаккуратно). Корректные построения в этом направлении появились в 1978 г. [11]. Первый пример здесь дает всюду непрерывную на плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ функцию, особое множество есть нульмерный компакт, взаимно однозначно проектирующийся на обе оси координат. Второй пример есть однолистная на всей плоскости функция, особое множество которой есть нульмерный компакт $\mathcal{E}$, взаимно однозначно проектируется на ось Ox (на обе оси для однолистных функций уже не возможно), причем эта проекция его может быть нулевой относительно произвольно взятой счетной последовательности измеряющих функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. При этом образ $\mathcal{E}$ — плоской положительной меры.

Идея построения заключается в рассмотрении подходящей последовательности конформных отображений многосвязных областей, аппроксимирующих $\mathcal{E}\setminus\overline{\mathbb{C}}$ на соответствующие области в другой плоскости.

Наконец, возник вопрос: насколько "гладкой" может быть функция на множестве своих особых точек. Оказалось — это явилось все же неожиданностью, — что для любого компакта положительной меры существует всюду непрерывная аналитическая вне его функции $f(z)$, удовлетворяющая условию Липшица не всей плоскости: $|f(z_1) - f(z_2) \leq L|z_1 - z_2|$; здесь просто может оказаться, что на все точки данного компакта будут для f особыми (в случае, если компакт нигде не плотен).

Первые примеры появились в работах [10, 12]. Более совершенным является построение С. В. Хрущева [13]; мы и приведем его ниже.

Вообще, факт существования липшецевых аналитических отображений с особенностями неожиданностью не является: например, если $y = \theta(x)$ — классическая "канторова лестница", то обратное отображение к гомеоморфизму $W = x + \theta(x) + iy$ единичного квадрата $I \times I$ есть липшецево отображение, "составленное" вне особого множества из функций вида $z = w + c$ (в различных компонентах — различные c); если вместить $\theta(x)$ взять всюду дифференцируемую канторову лестницу, то липшецевым будет и прямое отображение. Но дело в том, что на эти примеры можно смотреть как на искусственную склейку (пусть даже дифференцируемую) различных аналитических функций. Условие Липшица явилось неожиданностью именно для нульмерных особенностей.

Отметим, что для липшецевых функций справедлива теорема Грина

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{D} \frac{f_{\bar{\zeta}} d\zeta d\eta}{\zeta - z},$$

и мы видим, что и здесь возникают интегралы типа Помпейю-Данжуа (и с ограниченной "плотностью"$f_{\bar{\zeta}}$).

Докажем следующую теорему [13]:

Т е о р е м а. *Какой бы ни был компакт (в частности, нульмерный) $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}$ положительной плоской меры, существует всюду непрерывная функция, аналитическая вне $\mathcal{E}$, отличная от константы и удовлетворяющая условию Липшица $|f(z_1) - f(z_2) \leq L|z_1 - z_2|$ на всей плоскости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что непрерывная функция f на $\mathbb{C}$ является липшецевой, если обобщенный градиент $(f_z, f_{\bar{z}})$ (в смысле обобщенных производных [14]) принадлежат пространству $L_\infty(\mathbb{C}) \times L_\infty(\mathbb{C})$. Рассмотрим замкнутое подпространство $L_\infty(\mathcal{E}) \subset L_\infty(\mathbb{C})$, состоящая из всех измерных существенно ограниченных функций, равных нулю почти всюду в $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}$. Если $\varphi \in L_\infty(\mathcal{E})$, $\varphi \neq 0$, то, как мы уже знаем, функция $f(z) = \int\limits_{\mathcal{E}} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta d\eta}{\zeta - z}$ ограничена, всюду непрерывна и гомоморфная вне $\mathcal{E}$. Более того, $f \neq \text{const}$, так как $f_{\bar{z}} = \varphi(z)$. Для доказательства теоремы достаточно подобрать функцию φ таким образом, чтобы $f_z \in L_\infty(\mathbb{C})$. Пусть, для кратности, $K = \frac{1}{z^2}$. Тогда [14]

$$f_z = v.p. \iint\limits_{\mathcal{E}} \frac{\varphi(\zeta) d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2} = K \cdot \varphi.$$

Рассмотрим вспомогательное банахово пространство

$$L_1(\mathcal{E}) \times L_1(\mathbb{C}) = \left\{ (f, g) : \|(f, g)\|_1 \overset{\text{def}}{=} \iint\limits_{\mathcal{E}} |f| d\zeta d\eta + \iint\limits_{\mathbb{C}} |g| d\zeta d\eta < \infty \right\}.$$

Стандартная двойственность

$$\langle (f, g)(\varphi, \psi) \rangle = \iint\limits_{\mathcal{E}} f \varphi d\zeta d\eta + \iint\limits_{\mathbb{C}} g \psi d\zeta d\eta$$

осуществляет изометрии пространства, сопряженное с $L_1(\mathcal{E}) \times L_1(\mathbb{C})$, на пространство

$$L_\infty(\mathcal{E}) \times L_\infty(\mathbb{C}) =$$
$$= \left\{ (\varphi, \psi) : \|(\varphi, \psi)\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \max \left(es \sup_{\zeta \in \mathbb{C}} |\varphi(\zeta)|, es \sup_{\zeta \in \mathbb{C}} |\psi(\zeta)| < \infty \right) \right\}.$$

Рассмотрим линейное подпространство пространства $L_\infty(\mathcal{E}) \times L_\infty(\mathbb{C})$: $M = \{((K \cdot f \,|_{\mathcal{E}} \in L_1(\mathcal{E})\}$ и покажем что оно замкнуто.

Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{L_1(\mathbb{C})} = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \|K \cdot f_n - f\|_{L_1(\mathcal{E})} = 0$. Так как K — ядро Кальдерона - Зигмунда, то существует положительная постоянная c такая, что $\text{Mes}\{\zeta \in \mathbb{C} | K \cdot h(\zeta)| > y\} \leq \mathfrak{c} y \|h\|_1$ для любого числа $y > 0$ и любой функции $h \in L_1(\mathbb{C})$ [15]. Полагая здесь $h = f_n - f$, получаем, что последовательность $\{K \cdot f_n\}$ сходится к функции $K \cdot f$ по мере на множестве $\mathcal{E}$ и, следовательно, $K \cdot f = g \in L_1(\mathcal{E})$.

Пусть D_0 — множество все бесконечно дифференцируемых функций на плоскости с компактным носителем и пусть M_0 —- замыкание в $L_1(\mathcal{E}) \times L_1(\mathbb{C})$ множества тех пар $(K \cdot f_{\mathcal{E}}, f)$ из M, для которых $f \in D_0$. Тогда $M_0 \subset M$. Обозначим символом $M_0^\perp$ аннулятор подпространства M_0 в пространстве $L_\infty(\mathcal{E}) \times L_\infty(\mathbb{C})$.

Л е м м а. *Элемент* (φ, ψ) *пространства* $L_\infty(\mathcal{E}) \times L_\infty(\mathbb{C})$ *принадлежит* $M_0^\perp$ *в том и только том случае, когда* $\psi = -K \cdot \varphi$.

Доказательство леммы следует из следующего тождества

$$O = \iint\limits_{\mathcal{E}} \varphi(K\cdot f)d\xi d\eta + \iint\limits_{\mathbb{C}} \psi f d\xi d\eta = \iint\limits_{\mathbb{C}} f(\psi + K\cdot\varphi)d\xi d\eta \quad (f \in D_0).$$

Теперь, так как $(1,0) \in M$, то по теореме Хана-Банаха существует элемент $(\varphi,\psi) \in L_\infty(\mathcal{E}) \times L_\infty(\mathbb{C})$ такой, что: а) $\iint\limits_{\mathcal{E}} \varphi d\xi d\eta = 1$, б) $(\varphi,\psi) \in M_0^\perp$.

Из а) следует, что $\varphi \neq 0$, а б) вместе с леммой влекут равенство $\psi = -K\cdot\varphi$. следовательно, φ — ненулевая функция пространства $L_\infty(\mathcal{E})$ такая, что $K\cdot\varphi \in L_\infty(\mathbb{C}$, а это и требовалось.

Отметим, что из существования функции с условием Липшица легко следует и существование однолистных функций с теми же особенностями. В самом деле, если $f(z) \in \mathrm{Lip}(\mathbb{C})$ с константой L, то функция $F(z) = f(z) + 2Lz$ осуществляет гомеоморфизм расширенных плоскостей. Отличие этих однолистностей от приведенных ранее в том, что здесь как в образе, так и в прообразе множества особых точек — положительной плоской меры.

Приведем еще одно утверждение (но уже без доказательства), принадлежащее С. В. Хрущеву, которое показывает, что класс липшицевых функций с особенностями на достаточно "хорошем" фиксированном множестве $\mathcal{E}$, $\mathrm{Mes}\,\mathcal{E} > 0$, содержит достаточно много элементов:

Пусть $\alpha(\zeta) \in L_\infty(\mathcal{E})$ и $0 < \mathcal{E} < \frac{1}{2}$, тогда существует функция $\varphi \in L_\infty(\mathcal{E})$ такая, что

$$\sup_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathcal{E}} \left| \iint\limits_{\mathcal{E}} \frac{\varphi(\zeta)d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2} \right| \leq \mathrm{const}\left(\ln\frac{1}{\mathcal{E}}\right)\|\varphi\|_\infty,$$

$$\mathrm{Mes}\{\zeta \in \mathcal{E} : \varphi(\zeta) \neq \alpha(\zeta)\} \leq \mathrm{const}\mathcal{E}.$$

Здесь следует уточнить намек на "хорошие" множества. Дело в том, что еще Данжуа подозревал, что ограниченность производной вне $\mathcal{E}$ еще может не обеспечивать условия Липшица всюду в окрестности $\mathcal{E}$. Он ввел следующее понятие извилистости (sinuosité) нульмерного компакта: пусть $\mathcal{E} \subset D$ $(\subset \mathbb{C})$ и пусть $z_1, z_2 \in D\setminus\mathcal{E}$ — произвольные точки; соединим их простой спрямляемой кривой $l(z_1,z_2)$ и рассмотрим величину $\sigma(z_1,z_2) = \inf\frac{l(z_1,z_2)}{|z_1-z_2|}$. Так вот извилистостью множества $\mathcal{E}$ Данжуа называет $\sigma(\mathcal{E}) = \sup\sigma(z_1,z_2)$ по всем точкам $z_1, z_2 \in D\setminus\mathcal{E}$. Это понятие нетрудно локализировать. Данжуа легко доказывает, что если извилистость $\sigma(\mathcal{E})$ ограничена, то ограниченность $f'(z)$ вне $\mathcal{E}$ влечет непрерывную продолжимость самой функции f на $\mathcal{E}$, а вместе и условие Липшица.

В последнем утверждении С. В. Хрущева, которое мы привели, речь как раз и идет фактически о нульмерных множествах $\mathcal{E}$ с ограниченной извилистостью. Такими множествами являются, например, представимые в виде произведения $\mathcal{E}_x \times \mathcal{E}_y$ линейных множеств.

Что опасения Данжуа были не напрасны, подтвердил построенный А. Г. Витушкиным (и сам по себе удивительный) пример аналитической функции вне $\mathcal{E}$ [16], производная которой ограниченна и равномерно непрерывна (!), а первообразная неограниченна в окрестности каждой точки $\mathcal{E}$, т.е. нет даже ее непрерывного продолжения на особое множество: извилистость в каждой точке $\mathcal{E}$ бесконечна.

Пример А. Г. Витушкина возник, впрочем, по другому поводу.

Из теоремы о существовании угловых граничных значений ограниченной аналитической функции легко следует, что любая ограниченная аналитическая функция F, $F(\infty) = 0$, с нульмерным множеством особых точек положительной меры, принадлежащий спрямляе-мой дуге, представимо в виде $\int\limits_{\mathcal{E}} \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$, где $\varphi(\zeta)$ есть разность граничных значений F с одной и другой стороны дуги. В. В. Голубев [5] поставил вопрос: нельзя ли всякую функцию, однозначную в окрестности особого множества $\mathcal{E}$, представить суммой конечного и бесконечного ряда вида

$$f(z) = \int\limits_{\mathcal{E}} \frac{\varphi_1(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{\mathcal{E}} \frac{\varphi_2(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \ldots + \int\limits_{\mathcal{E}} \frac{\varphi_n(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \ldots$$

(f — гомоморфная вблизи $\mathcal{E}$), сходящаяся всюду вне $\mathcal{E}$. Тогда, по мысли Голубева, особое множество аналитической функции входило бы явно в ее представление, а каждую такую функцию можно было бы рассматривать в определенном смысле как функцию своих особенностей. Одно время показалось, что вопрос этот решается положительно, но ошибка быстро обнаружилась, а Витушкин указанным нами примером фактически показал, что здесь представления таким рядом не существует, даже если понимать написанные интегралы по любой мере, определенной на $\mathcal{E}$.

Оглянемся снова на весь класс аналитических функций с совершенным множеством особых точек. Что же получается? Какое внешнее глобальное свойство не назвать, как-то: ограниченность, непрерывность, однолистность, липшицевость и др., — подобная функция может им обладать в полной окрестности особого множества. В чем же тогда проявляется особенность этого множества? Как отличить, например, непрерывность функции на этом множестве от непрерывности ее вне него?

Конечно, если мы, в случае непрерывной функции, потребуем существования производной $f'(z)$ в каждой точке $\mathcal{E}$, то f окажется голоморфной в области. Но существование производной есть свойство локальное, а высказанное только что утверждение как раз подсказывает, что именно локальное поведение f в особых точках (и — наверное не обязательно дифференциальное) оказывается отличным от ее поведения в точках регулярных. Ну, и, по-видимому, "неприличное" поведение f может оказаться не обязательно во всех особых, но обязательно на плотном в $\mathcal{E}$ подмножестве.

Например, если взять непрерывную функцию $f(z)$ с особым множеством $\mathcal{E}$ и $f(\infty) = 0$, то, взяв некоторую точку $z_0 \in \mathcal{E}$ и функцию $f_1(z) = (z - z_0)f(z)$, получим функцию с особенностью $\mathcal{E}$ и моногенной в особой точке z_0. Мы приведем несколько критериев (гл. XIV) устранимости возможных особенностей непрерывных аналитических функций, которые все же носят дифференциальный характер.

1. Пусть в области $D \subset \mathbb{C}$ задана непрерывная функция f и пусть совершенное множество $\mathcal{E} \subset D$ меры нуль, такое, что f голоморфная в $D \setminus \mathcal{E}$ и из каждой точки $z \in \mathcal{E}$, исключая не более чем счетное их множество, исходит два линейно независимых луча $t_1(z)$, $t_2(z)$, вдоль которых

$$\overline{\lim_{n\to 0}}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right| < \infty \quad (z+h \in t_1(z), t_2(z)).$$

Тогда f голоморфно в D.

Назовем (временно) компакт $\mathcal{E}$ простым, если локально он либо нульмерен, либо локально связен (например, является дугой).

2. Пусть снова $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывна и аналитична в $D \setminus \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — простое и меры нуль. Если через каждую точку $z \in \mathcal{E}$, исключая не более чем счетное их множество, проходит прямая $l(z)$, вдоль которой $\overline{\lim\limits_{n\to 0}}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right| < \infty$ $(z + h \in l(z))$, то f аналитическая всюду в D.

Приведем критерии для простых компактов произвольной меры.

Мы уже напоминали выше, что требование комплексной дифференцируемости на $\mathcal{E}$ тривиальным образом приводит к голоморфности f.

Оказывается что для простых $\mathcal{E}$ достаточной для этого будет и R —дифференцируемость (т. е. в вещественном смысле).

3. Если $f : D \to \mathbb{C}$ — непрерывна, в $D \setminus \mathcal{E}$ — голоморфна и $\mathcal{E}$ - простой компакт и f — R-дифференцируема на $\mathcal{E}$, то f- аналитична в D.

4. $f : D \to \mathbb{C}$ — непрерывна, в $D \setminus \mathcal{E}$ — голоморфна и $\mathcal{E}$ — простой компакт. Если через каждую точку $z \in \mathcal{E}$ проходит прямая $l(z)$, вдоль которой f имеет конечную (комплексную) производную, то f аналитична в D.

Уже эти критерии дают определенную возможность представить различие между локальными поведениями аналитической функции в регулярной точке и в подавляющем большинстве точек особых.

И все же, оказывается, можно привести теоремы, из которых можно почувствовать действительную особенность множества $\mathcal{E}$. Прежде всего приведем такую теорему (гл. IX):

Теорема. *Пусть $\mathcal{E}$ — нигде не плотный компакт и $f : \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ — непрерывна и голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}$. Тогда: $f(\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}) \subset f(\mathcal{E})$, т. е. все свои регулярные значения функция f принимает на множестве $\mathcal{E}$;*

$\mathcal{E}$ содержит (непустое) совершенное подмножество $\mathcal{E}_0 : \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$, на котором находится множество $\mathcal{E}_0'$ всюду второй категории на $\mathcal{E}_0$, каждая точка z которого такова, что значение $f(z)$ бесконечнократко как в регулярном, так и в нерегулярном смысле, т.е. найдутся две последовательности $\{z_n'\}$, $z_n' \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{E}$, и $\{z_n''\}$, $z_n'' \in \mathcal{E}$, $z_n', z_n'' \to z$, что $f(z_n') = f(z_n'') = f(z)$.

Наконец, заметим, что произвольные непрерывные функции $f(z)$ в области D и голоморфных в $D \setminus \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — нульмерно, напрямую связаны с только что описанными функциями с особенностью $\mathcal{E}$ и определенными уже на всей плоскости. Для этого нужно только охватить $\mathcal{E}$ внутри D контуром I, а само $\mathcal{E}$ контурами γ_k $(k = 1, 2, \ldots, k_0)$ внутри I и написать

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \sum_b^1 \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} = \Phi(z) + \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — упомянутая функция.

Вообще, теория особых точек аналитических функций является классическим и одним из наиболее сложных направлений в комплексном анализе, к которому было приковано внимание многих выдающихся аналитиков XIX - XX вв. Она сыграла существенную роль в формировании современной геометрической теории меры, теории сингулярных интегралов, ее результаты явились основой для для многочисленных обобщений, в частности, для случая квазирегулярных отображений и для линейных дифференциальных уравнений с частными производными, они нашли важное применение в теории рациональных аппроксимаций и теории краевых задач для аналитических функций. Количество работ, посвященных ей, исчисляется уже сотнями. Мы сошлемся здесь на работы [17 - 31].

2. Задачи Данжуа

Вначале были действительные аналитические, а также гладкие функции (XVII – начало XIX вв.), затем появились функции аналитические и что важнее всего — уже комплексного переменного; чуть погодя (Коши) осторожно коснулся опасных пока изолированных точек для этих функций (полюсы, вычеты), но постепенно, к концу XIX в., удалось полностью разгадать поведение функции вблизи подобных особенностей (Вейерштрасс, Пикар, Жюлиа). Уже в это время особенности стали сгущать в линии (Вейерштрасс), а затем — сказывалось канторовское теоретико-множественное воспитание — возникли уже определенные гипотезы относительно возможных нульмерных совершенных особых множеств.

Пэнлевэ высказал очень смелое для того времени предположение о возможном непрерывном продолжении аналитических функций на свои особенности. Догадка его оказалась верной (Помпейю, Данжуа) и всюду непрерывные аналитические функции оказались существующими. Но вместе с тем, конечно, снова возникла привычная для математиков проблема классификации особых множеств таких функций, но которую все-таки сразу осознали как весьма трудную. Поэтому уже подход Пэнлевэ к этой проблеме даже через такое простое понятие как длина множества уже воспринимался как "луч света в темном царстве".

Но было понятно уже тогда, что это не окончательное решение проблемы. Поэтому и стали возникать различные вопросы, гипотезы, а то и проблемы, связанные с возможным (в привычном, классическом, смысле) поведением аналитической функции вблизи или на самой особенности.

И в это время именно А. Данжуа, ставший классиком и в этой области, задался вопросом: не может ли быть ограниченной производная $f'(z)$ от аналитической всюду непрерывной на плоскости фунции, аналитической вне нульмерного компакта P меры нуль? Повидимому, этот вопрос возник в связи с примером канторовой лестницы $\theta(x)$, рассматриваемой как комплексная функция (при этом для $x \geq 1$:

$\theta = 1$, а для $x \leq 0$: $\theta = 0$): производная ее $\theta' = 0$ всюду вне "канторова гребешка"$P \times \mathbb{R}^1$ (меры нуль!), где P — канторово совершенное множество; но тем не менее, всюду аналитической она не является.

В общем случае вопрос не поддавался решению.

Данжуа ввел понятие извилистости множества (см. выше), которое позволило ему доказать, что множество с конечной извилистостью не может быть особенностью подобной функции. И все же намного труднее даже в то время считался другой вопрос Данжуа, который В.С. Федоров в 30-е годы прошлого века назвал даже "проблемой Данжуа".

Вот его постановка:

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область и $P \subset D$ — нульмерный совершенный компакт; возможна ли такая однозначная непрерывная в D аналитическая функция, которая голоморфна в $D \setminus P$, и производная которой непрерывно продолжается на P, хотя каждая точка множества P есть особая точка этой аналитической функции?

Этой проблеме равносильна следующая:

Возможна ли такая непрерывная в D функция $f(z)$, аналитическая в $D \setminus P$, имеющая каждую точку множества P своей особой точкой, для которой является однозначной внутри D функция

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt,$$

где интегрирование совершается по любой спрямляемой кривой в $D \setminus P$, соединяющей точки z_0, z.

Решение обеих этих задач явится простым следствием однойединственной теоремы, родственной известным уже нам различным утверждениям об условии Липшица (§1 гл.X) для действительных и комплексных функций.

При переносе таких утверждений на такой специфический класс как аналитические функции с совершенным множеством особых точек они должны получить определенные дополнения и уточнения к своим формулировкам.

Рассмотрим, например, случай непрерывной функции в выпуклой области D, аналитической вне $P \subset D$, производная которой ограничена в $D \setminus P$: $|f'(z)| \leq L$. Предположим, что P — простое множество. Тогда, рассматривая отдельно вещественную и мнимую части функции f и меняя оси координат на z-плоскости, легко получим, на основании теоремы §1, гл. X, что f — липшицева во всей области D. Но, оставаясь на этом вещественном уровне, мы сможем только сказать, что липшицева константа здесь равна $\sqrt{2}\cdot L$.

Оказывается, однако, что эту константу в наших конкретных условиях можно взять равной L. Нужную теорему мы сейчас сформулируем чуть более общим образом. Ведь в наших условиях f удовлетворяет условию Липшица локально вне P с одной и той же константой L.

Теорема. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывна и аналитична вне $P \subset D$, где P — простое множество. Если всюду в $D \setminus P$ производная $f'(z)$ ограничена числом L, то в каждой точке из P функция f также локально липшицева и с константой L.*

Доказательство. Возьмем круговую окрестность $U(z_0) \subset D$ произвольной точки $z_0 \in P$.

Пусть $z_1, z_2 \in U$. Используя, если нужно, повороты осей координат в $z-$ и $w-$плоскостях $(w = f(z) = u + iv,\ z = x + iy)$, можем считать, что отрезки $\overline{z_1 z_2}$ и $\overline{f(z_1) f(z_2)}$ параллельны осям абсцисс Ox, Ou, причем $z_2 - z_1 > 0$ и $f(z_2) - f(z_1) > 0$.

Снова, в силу упомянутой уже теоремы, обе функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ на полных горизонталях $y = \mathrm{const}$ в U удовлетворяют условию Липшица с константой L: ведь вне P частные производные $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \le |f'(z)| \le L$.

Но тогда, в частности,

$$f(z_2) - f(z_1) = u(z_2) - u(z_1) \le L(z_2 - z_1).$$

Это же доказывает теорему.

Теперь очевидно, что если при тех же условиях мера множества P равна нулю, то оно не может быть множеством особенностей — оно "стирается"функцией f: решение первой задачи Данжуа и — чуть с превышением: ведь Данжуа предполагал P нульмерным, в нашем случае оно может содержать и дуги.

Мы сейчас приведем и решение второй задачи Данжуа, но присмотримся к ее условиям, причем в первой приведенной нами формулировке.

Прежде всего, непрерывная продолжимость производной $f'(z)$ означает и ее ограниченность в $D \setminus P$, а это означает локальную липшицевость самой функции f всюду в области D.

Мы уже упоминали о примере Витушкина, где производная хотя и продолжается непрерывно на особое (нульмерное!) множество, но сама-то первообразная неограниченна вблизи него. Профессиональное чутье подсказало Данжуа потребовать еще непрерывности и у первообразной.

Далее. Непрерывное продолжение $\tilde{f}(z)$ производной $f'(z)$ на множество P вовсе не обязано быть производной первоначальной функции $f(z)$: это было бы так, если бы P состояло, например из изолированных точек. Даже в случае действительных функций мы найдем примеры, когда в случае совершенных P это уже не имеет места: неоднократно упоминавшаяся выше всюду дифференцируемая канторова лестница: на интервалах смежности к P f' равна нулю, непрерывное ее продолжение на P есть нуль, но оно не является производной для f на подмножестве из P положительной меры (но на резидуальном его подмножестве будет!).

Итак, пусть $f(z)$ непрерывна в области D, $P \subset D$ — простое множество, $f(z)$ аналитична в $D \setminus P$ и производная ее $f'(z)$ непрерывно продолжается на P.

Возьмем произвольную точку $z_0 \in P$ и пусть $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \notin P}} f'(z) = A$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ в некоторой окрестности $U(z_0)$ вспомогательная функция $\varphi(z) = f(z) - Az$ удовлетворяет условию: $|\varphi'(z)| < \varepsilon$. По нашей теореме функция $\varphi(z)$ удовлетворяет тогда условию Липшица с константой $\varepsilon > 0$ и, в частности, в точке $z_0 \in P$ имеем: $\left|\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}\right| = \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - A\right| < \varepsilon$. Так как это имеет место при любом $\varepsilon > 0$, то функция f моногенна в точке z_0 и производная ее равна предельному значению A производной f' из области аналитичности.

Из произвольности точки $z_0 \in P$ выводим, что в условиях второй задачи Данжуа функция f должна быть аналитической всюду в области $D \supset P$.

Это и решает вторую задачу Данжуа; решение возникло таким, какого он сам и ожидал. Ну и, опять-таки, мы это сделали с некоторым превышением: множество P может быть не только нульмерным, но произвольным простым.

Мы уже говорили о том, что существуют однолистные отображения $w = f(z)$ с особенностями: характерным для таких примеров является то, что особое нульмерное множество P при этом отображается на множество положительной меры.

Так вот неизвестно, может ли этот образ быть также меры нуль. Есть предположение — что может, но что при этом хотя бы одно из соответствующих особых множеств должно быть большой "извилистости".

Глава 13

Критерии аналитичности

1. Критерий постоянства комплексной функции

Если для непрерывной в области $D \subset \mathbb{C}$ функции $f(z) = u + iv$ комплексной переменной в каждой точке существует конечный предел

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

(т. е. функция f — аналитическая в D) и если на плотном множестве в D он равен нулю, то $f \equiv \mathrm{const}$.

Мы докажем, что последний вывод будет справедлив и при условии, если мы заменим разностное отношение функции f его модулем; другими словами, справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть для непрерывной в области $D \subset \mathbb{C}$ функции f существует предел*

$$(1) \qquad \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| = \rho(z) \le \infty$$

в каждой точке, за исключением не более чем счетного их множества. Если он равен нулю на плотном в D множестве, то $f \equiv \mathrm{const}$.

Перед доказательством сделаем несколько необходимых замечаний.

Во-первых, то, что утверждение теоремы нетривиально, показывает пример функции $f(z) = \varphi(x) + i\varphi(y)$, где φ — всюду дифференцируемая возрастающая функция на прямой (см. §8 гл. V), для которой множество $\{x : \varphi'(x) = 0\}$ всюду плотно; функция f здесь осуществляет даже гомеоморфизм плоскости. Конечно, о существовании предела (1) здесь нет и речи.

Из условия существования предела (1) и основной теоремы о множествах моногенности (§2 гл. VI) следует R-дифференцируемость f почти всюду, где каждое из этих множеств является окружностью с параметрическим представлением

$$\zeta = f_z + f_{\bar z} e^{-2i\alpha}, \quad \alpha \in [o, 2\pi].$$

Существование предела (1) означает, что почти всюду в D либо $f_{\bar z} = 0$, т. е. функция f моногенна в точке z и $\mathfrak{M}_z$ — единственная точка

$$\zeta = f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

либо $f_z = 0$, т. е. $\mathfrak{M}_z$ полная окружность с центром $\zeta = 0$ и радиусом $\rho(z)$ (или, что то же, моногенной является сопряженная функция $\bar f$).

Равенство $f_{\bar z} = 0$ это — условие Коши-Римана (CR) для функции f:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

а $f_z = 0$ — условие Коши-Римана для сопряженной функции $\bar f$ $(\overline{CR})$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

При этом (опять-таки почти всюду)

$$|f'(z)|^2 = |\bar f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

Подчеркнем еще, что в теореме 1 существенную роль играет условие существования предела

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| = \rho(z)$$

в каждой точке области, т. е. условие постоянства растяжения отображения f. Именно, в этом случае равенство нулю ρ лишь на плотном множестве в D, а не ожидаемого, как обычно, условия почти всюду, и обеспечивает нужное нам постоянство функции f.

Напомним еще [1], что в случае отображения f с постоянным отображением $\rho(z) \neq 0$ в области D имеется такая теорема:

Если $f : D \to \mathbb{C}$ — отображение с постоянным растяжением $\rho(z) \neq 0$, то существует открытое всюду плотное в D множество O, в каждой компоненте которого либо f, либо ей сопряженная $\bar f$, является аналитической, причем на дополнительном множестве $P = D \setminus O$ (если оно не пусто) существует всюду плотная на P не более чем счетная совокупность аналитических дуг, в окрестности которых f конформно-эквивалентна функции Бора: $B(z) = x + i|y|$.

Наконец, условие нашей теоремы означает, что функция $\rho(z)$ является функцией первого класса (если, например, положить ее равной нулю в точках исключительного счетного множества), поэтому множество $\{\rho(z) = 0\}$ нулей ее, являясь множеством типа $\mathcal{G}_\delta$, оказывается тем самым всюду второй категории в D, т.е. множеством резидуальным. А так как каждую точку такого множества можно считать точкой непрерывности $\rho(z)$, то отсюда легко следует, что в D выделяется плотное множество кругов, в каждом из которых f удовлетворяет условию Липшица.

Допустим теперь, что мы сумеем доказать теорему при дополнительном ограничении, что f — липшицева; покажем, как отсюда следует ее заключение и в общем случае.

Только что было отмечено, что в D выделяется плотное множество кругов, в каждом из которых f удовлетворяет условию Липшица. Но тогда в D существует всюду плотное открытое множество O, в каждой компоненте которого $f \equiv \mathrm{const}$; конечно, на оставшемся множестве $P \setminus O$ существует предел (1), за исключением не более чем счетного множества точек. Нам нужно показать, что $P = \emptyset$. Но если $P \neq \emptyset$, то оно совершенное; и можем считать, что ни в какой окрестности любой его точки f уже не является константой. На плотном его подмножестве (например, в граничных точках компонент из O) $\rho(z) = 0$. Это $\mathcal{G}_\delta$-множество также резидуально, но уже на P; отсюда, кстати следует, что возможные точки множества $\{\rho(z) = \infty\}$ образуют на нем множество первой категории. Но отсюда следует, обычным для нас приемом, что на P выделяются порции, на которых $f\mid_P$ удовлетворяет условию Липшица. А мы уже знаем, что в этом случае f удовлетворяет этому условию и в полной окрестности соответствующих точек из P, а, значит, по предположению, в этих окрестностях $f = \mathrm{const}$, что противоречит определению множества P.

Итак, нам достаточно доказать теорему для случая когда D — замкнутый круг, а f — с условием Липшица в D.

В этих условиях мы предположим, что константа L в условии Липшица здесь минимальна:

$$|f(z) - f(z')| \le L|z - z'|, \quad z, z' \in D.$$

В этом случае (и — в условиях нашей теоремы) нетрудно показать, что $\sup\limits_{z \in D} \rho(z) = L$.

В самом деле, из условия Липшица следует, что $\rho \le L$, а потому и $\sup \rho(z) \le L$; если бы $\sup \rho(z)$ был бы меньше L, скажем $L - \varepsilon$, то для любой пары точек z_1, z_2 круга D и прямолинейного отрезка $\overline{z_1z_2}$ имели бы

$$|f(z_2) - f(z_1)| = \left|\int_0^1 f'(tz_1 + (1-t)z_2)dt\right| \le \int_0^1 |f'(tz_1 + (1-t)z_2)|\, dt =$$

$$= \int_0^1 \rho(tz_1 + (1-t)z_2)dt \le (L-\varepsilon)|z_2 - z_1|.$$

Нам нужно показать, что в условиях нашей теоремы равенство $\sup \rho(z) = L$, действительно, является классическим, т. е. что в произвольной "левой"близости от L найдутся значения $\rho(z)$, $z \in D$.

Это ясно в случае, если $\rho(z)$ не принимает крайнего значения L. Пусть теперь множество $\mathcal{E} = \{\rho(z) = L\}$, $L > 0$, непусто, а так как оно $\mathcal{G}_\delta$-множество. то в наших условиях оно нигде не плотно в D вместе со своим замыканием $\overline{\mathcal{E}}$.

Предположим, что $\rho(z)$ не принимает значений из целой ("левой") окрестности $(L-\varepsilon, L)$, $\varepsilon > 0$, числа L.

Покажем сначала, что в этом случае множество $\overline{\mathcal{E}}$ совершенно. В самом деле, для изолированой точки $z_0 \in \overline{\mathcal{E}}$ и любого достаточно малого отрезка $\overline{zz_0}$ имели бы:

$$|f(z) - f(z_0)| = \int_0^1 \rho(z_0(1-z) + zt)dt = \int_0^1 \rho(z)|dz| \le$$

$$\le (L-\varepsilon)|z - z_0|,$$

в то время как, по предположению, $\rho(z_0) = L$.

Так как $\overline{\mathcal{E}}$ — замкнуто, а множество точек, где $\rho(z)$ может не существовать — разреженно на $\overline{\mathcal{E}}$, то найдется замкнутая порция $U' \cap \mathcal{E}$, в каждой точке которого $\rho(z)$ уже существует; здесь U' — некоторый круг.

Так как $\overline{\mathcal{E}}$ нигде не плотно в U', то легко найти отрезок $\overline{zz_0} \subset U'$, $z_0 \in \overline{\mathcal{E}}$ не пересекающий $\overline{\mathcal{E}}$ (кроме точки z_0).

Но тогда снова, как и только что, получим, что

$$|f(z) - f(z_0)| \le (L-\varepsilon)|z - z_0|.$$

Так как таких точек z_0 — плотное множество на $\overline{\mathcal{E}}$, то в подавляющем большинстве точек указанного $\mathcal{G}_\delta$ не было бы непрерывности $\rho(z)$.

И, наконец, очевидно, что если в некоторой подобласти из D или условия CR, или $\overline{CR}$ выполняются почти всюду, то в ней или f или $\bar{f}$

являются аналитическими, а из нашего условия $\rho(z) = 0$ на плотном множестве следует тогда, что f — константа в этой подобласти.

Итак, если теорема не имеет места, то это означает, что в некотором круге из D как условия CR, так и условия $\overline{CR}$ выполнены на плотных его подмножествах и в каждой порции положительной меры.

Мы докажем, что такой вариант в наших условиях невозможен. Другими словами, справедливо следующее утверждение, которое мы назовем Леммой:

Лемма. *В условиях теоремы 1 существует открытое плотное в D множество O, в каждой компоненте которого f является константой.*

Доказательство — от противного. Имеем: функция f в круге D — липшицева и множества точек, где выполнено либо условие CR, либо $\overline{CR}$, всюду плотны и положительной меры в каждой своей порции.

Мы, конечно, предположим, что в условии Липшица

$$|f(z) - f(z')| \leq L|z - z'|, \quad z, z' \in D,$$

константа Липшица L — наименьшая возможная, а тогда, как мы знаем, $\sup \rho(z)$ совпадает с L.

Рассмотрим точку $\bar{z} \in d$, в которой $f_z = 0$ и $|f_{\bar{z}}| = \lambda L > 0$, $3/4 < \lambda < 1$ (якобиан $J(f) \mid_{\bar{z}} = -|f_{\bar{z}}|^2 = -\lambda^2 L^2 < 0$); этого всегда можно достичь, рассматривая, если нужно, сопряженную функцию $\bar{f}$. Умножая, в случае необходимости, f на $e^{i\theta}$, можем считать, что $f_{\bar{z}} \mid_{\bar{z}} = \lambda L$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F = f + az + b\bar{z} = u + iv + (a_1 + a_2 i)(x + iy) + (b_1 + b_2 i)(x - iy) =$$

$$= u + (a_1 + b_1)x + (b_2 - a_2)y + i[v + (a_1 - b_1)y + (a_2 + b_2)x] = U + iV.$$

Выберем сначала a_1, b_1 так, чтобы

$$a_1 - b_1 = kL, \quad 0 < k < 1,$$

$$a_1 + b_1 = 2L,$$

т. е.

$$a_1 = \left(1 + \frac{k}{2}\right) L, \quad b_1 = \left(1 - \frac{k}{2}\right) L,$$

$$a_1^2 + b_1^2 = \left(2 + \frac{k^2}{2}\right) L^2.$$

Затем a_2, b_2 выберем так, чтобы было

$$a_2^2 + b_2^2 = a_1^2 + b_1^2$$

,

$$a_1^2 + a_2^2 > b_1^2 + b_2^2.$$

этого можно достичь, положив $a_2^2 = \left(\frac{k^2}{2} + 1\right) L^2$, $b_2 = L$.

При таком выборе отображение F будет отображением с особенностью.

В точке непрерывности из множества $\{z : \rho(z) = 0\}$, т. е. там, где все частные производные u, v равны нулю, якобиан

$$J(F) = |a|^2 - |b|^2 = (a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2) = \left(2k + \frac{k^2}{2}\right) L^2 > 0,$$

а значит, в окрестности этой точки F будет положительным гомеоморфизмом (напомним, что $f = u+iv$ липшицева). С другой стороны, в точке $\tilde{z}$

$$J(F, \tilde{z}) = |f_z + a|^2 - |f_{\bar{z}} + b|^2 = |a|^2 - |\lambda L + b_1 + b_2 i|^2 =$$

$$= L^2 \left\{ \left(1 + \frac{k^2}{2}\right) + 1 + \frac{k^2}{2} - \left[\lambda^2 + 2\lambda \left(1 - \frac{k}{2}\right) + \left(1 - \frac{k}{2}\right)^2 + 1\right]\right\} <$$

$$< L^2 \left\{ 2 + k + \frac{3}{4}k^2 - \left[\frac{9}{16} + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{k}{2}\right) + \left(1 - \frac{k}{2}\right)^2 + 1\right]\right\} =$$

$$= L^2 \left(\frac{11}{4}k + \frac{k^2}{4} - \frac{33}{16}\right).$$

В дальнейшем будем полагать $0 < k < \frac{1}{4}$; в этом случае $J(F, \tilde{z}) < 0$. Но это и означает, что нигде не плотное множество особенностей P отображения F непусто: $\bar{z} \in P$.

Поскольку

$$a_1 + b_1 > L, \quad a_1 - b_1 > 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + (a_1 + b_1) > 0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + (a_1 - b_1),$$

то функция $U(x, y)$ — возрастающая по x всюду в d, а $V(x, y)$ — возрастающая по y на плотном множестве кругов. Поэтому линии уровня функции U являются однозначными дугами относительно направления оси Ox (т. е. графиками однозначных непрерывных функции вида $x = x(y)$), уровни же V в плотном множестве кругов в d — графиками однозначных функций вида $y = y(x)$. Поэтому если отображение F не нульмерно, то найдется дуга, — очевидно, график монотонной функции $y = y(x)$, — на которой обе функции U, $V = \text{const}$. Возьмем на ней произвольную точку $z_0 = x_0 + iy_0$ и некоторую последовательность $\{z_n\}$, $z_n = x_n + iy_n$, ее точек, сходящуюся к z_0. Имеем $F(z_n) = F(z_0)$, или $U(z_n) = U(z_0)$, $V(z_n) = V(z_0)$.

Это же означает, что

$$u(z_n) = -(a_1 + b_1)x_n - (b_2 - a_2)x_n + u(z_0) + (a_1 + b_1)x_0 + (b_2 - a_2)y_0,$$

$$v(z_n) = -(a_1 - b_1)x_n - (b_2 + a_2)x_n + v(z_0) + (a_1 - b_1)x_0 + (b_2 + a_2)y_0.$$

Будем считать z_0 не принадлежащим исключительному счетному множеству в теореме 1.

Оценим растяжение $\rho(z_0)$ по последовательности $\{z_n\}$:

$$\left|\frac{f(z_n) - f(z_0)}{|z_n - z_0|}\right| = \left|-\frac{(a_1 + b_1)(x_n - x_0)}{|z_n - z_0|} - \frac{(b_2 - a_2)(y_n - y_0)}{|z_n - z_0|}\right.$$
$$\left. + i\left[-\frac{(a_1 - b_1)(x_n - x_0)}{|z_n - z_0|} - \frac{(b_2 + a_2)(y_n - y_0)}{|z_n - z_0|}\right]\right| =$$
$$= |(a_1 + b_1)\cos\alpha_n + (b_2 - a_2)\sin\alpha_n +$$
$$+ i[(a_1 - b_1)\cos\alpha_n + (b_2 + a_2)\sin\alpha_n]| = |r + is|.$$

Здесь

$$\cos\alpha_n = \frac{x_n - x_0}{|z_n - z_0|}, \qquad \sin\alpha_n = \frac{y_n - y_0}{|z_n - z_0|}.$$

Далее,

$$r^2 = (a_1+b_1)^2\cos^2\alpha_n + 2(a_1+b_1)(b_2-a_2)\sin\alpha_n\cos\alpha_n + (b_2-a_2)^2\sin^2\alpha_n,$$

$$s^2 = (a_1-b_1)^2\cos^2\alpha_n + 2(a_1-b_1)(b_2+a_2)\sin\alpha_n\cos\alpha_n + (b_2+a_2)^2\sin^2\alpha_n,$$

$$r^2+s^2 = 2[(a_1^2+b_1^2)\cos^2\alpha_n + (a_1b_2 - a_2b_1)\sin\alpha_n\cos\alpha_n + (a_2^2+b_2^2)\sin^2\alpha_n =$$
$$= 2\left[\left(2 + \frac{k^2}{2}\right)L^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\sin\alpha_n\cos\alpha_n\right].$$

Поскольку

$$|a_1b_2 - a_2b_1| = L^2\left|\left(1 + \frac{k}{2}\right) - \sqrt{\frac{k^2}{2} + 1}\left(1 - \frac{k}{2}\right)\right| < L^2, \qquad 0 < k < \frac{1}{4},$$

то

$$|(a_1b_2 - a_2b_1)\sin\alpha_n\cos\alpha_n| < L^2.$$

Объединяя полученные оценки, имеем

$$|f(z_n) - f(z_0)| > \sqrt{2}L|z_n - z_0|,$$

что противоречит определению липшицевой константы L.

Если же F нульмерно, то на основании теоремы 2 гл. IX имеются бесконечнократные точки, что снова приводит к противоречию.

Тем самым доказано, что не может существовать область d, в которой всюду плотными и всюду положительной меры были бы оба множества $\{z : f' \neq 0\}$ и $\{z : \bar{f}' \neq 0\}$. А это значит, что в условиях теоремы в каждой подобласти из d найдется круг, где почти всюду выполнены либо только условия CR, либо только $\overline{CR}$; но тогда в таком круге (в силу липшицевости f) либо f, либо $\bar{f}$ будет аналитической, а так как $\{z : \rho(z) = 0\}$ всюду плотно, то в этом круге в обоих случаях $f = \mathrm{const}$.

Итак, доказано, что в области d найдется открытое плотное в ней множество O, в каждой компоненте которого f является константой.

Завершение доказательства теоремы 1. Если предположить, что теорема 1 неверна, то для найденного открытого множества O дополнение $P = D \setminus O \neq \emptyset$ и на нем снова найдем плотное множество точек непрерывности $\rho(z) \mid_P$, где $\rho(z) = 0$. На основании леммы 1 можем считать f липшицевой в D.

Если бы $\mathrm{Mes}P = 0$, то в силу моногенности $f \in \mathrm{Lip}$ почти всюду в D, функция f была бы аналитической всюду в D, а значит, $f = \mathrm{const}$.

Поэтому $\mathrm{Mes}P > 0$ и на P имеются два плотных подмножества, в которых выполняются соответственно условия CR и $\overline{CR}$. В этом случае снова, как и в лемме 2, рассматриваем вспомогательную функцию $F = f + az + b\bar{z}$, что приведет нас к завершению доказательства.

Как мы видели при доказательстве теоремы, из условия (1) следует, что почти в каждой точке области f дифференцируема и выполнены либо условия CR, либо $\overline{CR}$. Поэтому можно считать естественной формулировку следующей теоремы.

Т е о р е м а 2. *Пусть для непрерывной в области $D \subset \mathbb{C}$ функции $f = u + iv$, частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ существуют и конечны всюду, за исключением не более чем счетного подмножества точек. Тогда если почти всюду в D выполнены либо условия CR, либо $\overline{CR}$ и на плотном в D множестве все эти частные производные равны нулю, то $f \equiv \mathrm{const}$.*

Сначала — лемма:

Л е м м а 1. *Пусть функция $F = U + iV : D \to \mathbb{C}$, дифференцируема по x и y в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, причем*

$$J(F, z_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} < 0.$$

Тогда F не может быть положительным локальным гомеоморфизмом в точке z_0.

Доказательство. Действительно, невырожденные (по условию) векторы $\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial y}\right)$ являются касательными к образам координатных линий $x, y = \text{const}$, проходящих через z_0. А так как они совпадают с образами тех же линий при вспомогательном невырожденном линейном отображении

$$U_1 = \frac{\partial U}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial U}{\partial y}(y - y_0),$$

$$V_1 = \frac{\partial V}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial V}{\partial y}(y - y_0),$$

но с отрицательным якобианом, то они определяют противоположно ориентированную пару, чего не может быть при положительном гомеоморфизме.

Лемма 1 доказана.

Величину $J(F)$ здесь можно было бы назвать формальным якобианом для отображения F, так как U, V могут оказаться недифференцируемыми как функции двух переменных.

Лемма 2. *Если в условиях теоремы 2 функция f в круге $d \subset D$ липшицева, то в d $f \equiv \text{const}$.*

Доказательство. Докажем сначала, что в d найдется открытое плотное множество O, в каждой компоненте которого f есть константа.

Предполагая противное, найдем круг $d' \subset d$, в котором множества точек, где выполнены либо условия CR, либо $\overline{CR}$, оба всюду плотны и положительной меры в каждой своей порции. По условию в d функция f липшицева:

$$|f(z') - f(z'')| = L|z' - z''|;$$

очевидно, L является верхней гранью для модулей всех частных производных от u, v.

Как и ранее, можем считать, что

$$\sup_{d'} \rho(z) = \sup_{d'} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} = L.$$

Пусть в точке $\tilde{z} \in d'$ $f_z = 0$ и $|f_{\bar{z}}| = \lambda L$, где $\lambda > \frac{3}{4}$. И теперь, повторяя дословно соответствующую часть доказательства теоремы

1 (лишь с использованием леммы 3), приходим к противоречию с нашим предположением.

Доказательство теоремы 2 проводим по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.

Доказывая от противного, находим открытое плотное в D множество O, в каждой компоненте которого $f = \text{const}$, и непустое совершенное множество $P = D \setminus O$ такое, что ни в какой окрестности каждой его точки f уже не является константой.

На плотном в P подмножестве все частные производные от u, v равны нулю, так как каждая компонента множества O имеет на границе плотное множество точек, достижимых кругами, принадлежащими ей, а значит, и прямыми углами, ограниченными координатными линиями $x, y = \text{const}$; при этом если какой-либо круг касается одной из этих прямых, то, в силу липшицевости f, производная ее вдоль окружности будет равна производной вдоль этой прямой.

Поскольку $\left\{z : \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} = 0\right\}$ — типа $\mathcal{G}_\delta$, то это справедливо на подмножестве P всюду второй категории. При этом в точках этого подмножества, где частные производные непрерывны по множеству P, а значит, в силу леммы 1, f липшицева и в их окрестности, снова f — константа в этой области (лемма 4), а это противоречит определению множества P. Теорема 2 доказана.

2. Отображения со свойством K''.

Д.Е. Меньшовым в свое время [2] была доказана следующая теорема: если гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ области D обладает свойством K'' в каждой ее точке, исключая не более чем счетное их множество, то либо функция f, либо ей сопряженная $\bar{f}$ является аналитической всюду в D.

Наша ближайшая цель — перенести эту теорему на случай произвольных непрерывных отображений.

Знакомый уже нам пример функции Бора $B(z) = x + i|y|$, $|z| < 1$, показывает, что без дополнительных условий эта теорема так сразу и не переносима. Мы уже фактически указывали выше, что любое непрерывное отображение f, обладающее свойством K'', для которого ни f, ни $\bar{f}$ не являются голоморфными всюду, обязательно в определенной подобласти из D окажется конформно-эквивалентной функции $B(z)$.

Ослабим сначала понятие прямого отображения на случай неоднолистных функций.

Рассмотрим некоторую точку z_0 области D, в которой задана непрерывная функция $w = f(z)$, и образ $w_0 = f(z_0)$ этой точки в w-плоскости. Назовем z_0 U-точкой (U-univalent) отображения f, если существуют две последовательности $\{z'_k\}$, $\{z''_k\}$ ($k = 1, 2, \ldots$) точек, сходящихся к z_0, с полукасательными t', t'' в точке z_0, лежащими на различных прямых и таких, что все точки $w'_k = f(z'_k)$ $w''_k = f(z''_k)$ отличны от $w_0 = f(z_0)$. Скажем, далее, что отображение f является положительным в U-точке z_0, если последовательности $\{w'_k\}$, $\{w''_k\}$ имеют в точке w_0 полукасательные T', T'' со следующим свойством: если $0 < \{\widehat{t', t''}\} < \pi$ и угол $\{\widehat{t', t''}\}$ отсчитывается в положительном направлении от t', то и угол $\{\widehat{T', T''}\}$, $0 \le \{\widehat{T', T''}\} < \pi$, так же отсчитывается в положительном направлении от T'.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему:

Т е о р е м а. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — произвольное непрерывное отображение, обладающее свойством K'' в каждой точке, исключая не более чем счетное их множество, и пусть почти в каждой U-точке, если таковые имеются, это отображение является положительным.*

Тогда функция f является аналитической всюду в области D; при этом если U-точек не существует, то $f \equiv \mathrm{const}$ в D.

Приведем сначала простенькую лемму, легко вытекающую из всего, сделанного нами ранее:

Л е м м а. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция и $P \subset D$ — замкнутое множество. Если в каждой компоненте дополнения $D \setminus P$ f аналитична, а на P удовлетворяет условию Липшица:*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \le L|z_2 - z_1|, \quad z_1, z_2 \in P,$$

причем почти всюду в D моногенна, то она аналитична всюду в D.

Действительно, из теоремы 4 §2 следует, что f просто локально-липшицева в D и для любой замкнутой спрямляемой кривой λ внутри соответствующей окрестности применима формула Грина

$$\int_{\lambda} f(z)dz = 2i \iint_{(\lambda)} f_{\bar{z}}\, dx\, dy = 0,$$

где (λ) — область, ограниченная кривой λ.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Прежде всего, заметим, что если в точке z_0 $df \neq 0$, то существует либо $f'(z_0) \neq 0$, либо $\bar{f}'(z_0) \neq 0$.

Отсюда следует, что z_0 есть U-точка, причем любым последовательностям $\{z'_k\}$, $\{z''_k\}$ с полукасательными t', t'', $0 < \{\widehat{t', t''}\} < \pi$, соответствуют последовательности $\{w'_k\}$, $\{w''_k\}$ с полукасательными T', T'', такие, что $\{\widehat{T', T''}\} = \pm\{\widehat{t', t''}\}$. Это вытекает из того, что

$$\Delta f = f(z) - f(z_0) = f'(z_0)[1 + \varepsilon(z)]\Delta z,$$

либо

$$\Delta \bar{f} = \bar{f}(z) - \bar{f}(z_0) = (\bar{f})'(z_0)[1 + \varepsilon(z)]\Delta z,$$

где $\varepsilon(z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Если бы моногенной была функция $\bar{f}$, то легко видеть, что отображение f не было бы положительным в U-точке z_0 по нашему определению.

Покажем теперь, что в условиях нашей теоремы существует открытое плотное в области D множество O, в каждой точке которого f аналитична.

Возьмем произвольный круг $d \subset D$. По теореме найдется такой круг $d' \subset d$, в котором f удовлетворяет условию Липшица; в наших условиях это приводит к моногенности f почти всюду в d', а, значит, и к аналитичности.

Если теорема неверна, то множество всех точек, в которых функция f не является аналитической, есть непустое совершенное множество $P \subset D$; из предыдущего следует, что P — нигде не плотно в D.

По той же теореме находим порцию $P' = P \cap D'$ ($D' \subset D$ — некоторый круг), такую, что

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq L|z_2 - z_1|$$

для любых $z_1, z_2 \in P'$ (L — постоянная). Но в таком случае, опять-таки,по упомянутой уже теореме f локально-липшицева всюду в D', а, значит, и аналитична там, в том числе и в точках $P' \subset P$, что противоречит определению множества P, как множества, ни в какой точке которого f не является аналитической.

Полученное противоречие доказывает нашу теорему.

3. Отображения со свойством K'''.

Мы собираемся доказать, что свойство K''' также приводит к аналитичности. Но если из свойства K'' мы сравнительно легко выводим условие Липшица, что и позволило быстро увязать K'' с аналитичностью, то для K''' придется несколько труднее.

Основной здесь явится следующая

Лемма 3. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — непрерывно и $P \subset D$ — совершенное множество. Пусть из каждой точки z некоторого множества $N \subset P$ не первой категории на P исходят два луча $t_i(z)$ $(i = 1, 2)$, расположенные на различных прямых, причем*

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| < \infty,$$

где $z + h \in t_i(z)$ $(i = 1, 2)$. Тогда найдется круг $D_0 \subset D$, содержащий (открытую) порцию $P_0 \subset P$, и число L, такие, что каждая точка $z \in P_0$ является вершиной пары вертикальных углов $V(z)$, полученных параллельным сдвигом фиксированной пары вертикальных углов V, со следующим свойством: для каждой точки $z' \in P_0 \cap D_0$, лежащей внутри или на границе углов $V(z)$, имеет место неравенство

$$|f(z') - f(z)| \le L|z' - z|.$$

Доказательство. Все сказанное здесь мы возьмем из леммы Меньшова (§1 гл. XI). Применяя ее для случая $\nu = 2$, находим порцию $P' \subset P$ и число σ, удовлетворяющее условиям 1 – 4. Как и при доказательстве теоремы 1 гл. XI, берем в качестве P_0 порцию множества P', расположенную в круге D_0 с диаметром, меньшим $\sigma \sin 50\sigma$. Для этого P_0 докажем нашу лемму.

Из свойств 1 и 2 лучей $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2)$ следует, что на z-плоскости найдется фиксированная прямая s, удовлетворяющая условиям:

а) лучи $\tau_1(z)$, $\tau_2(z)$ лежат по одну сторону от прямой $s(z)$, проходящей через точку z параллельно прямой s;

б) углы, образуемые лучами $\tau_1(z)$, $\tau_2(z)$ с каждым из направлений прямой $s(z)$, по величине больше 30σ.

Отсюда вытекает, что вертикальные углы $V(z)$ с общей вершиной z и общей биссектрисой $s(z)$, каждый из которых равен 10σ, обладают следующими свойствами:

1) лучи $\tau_1(z)$ и $\tau_2(z)$ лежат по одну сторону от каждой прямой, проходящей внутри $V(z)$ и через точку z;

2) углы между лучами $\tau_1(z)$, $\tau_2(z)$ и каждым направлением такой прямой больше 10σ.

Пусть теперь $z \in P_0$. Если внутри $V(z)$ находится точка $Z' \in P_0 \cap D_0$, то

$$|f(z') - f(z)| \le L|z' - z|, \tag{2}$$

где $L = \frac{2}{\sigma^2}$. В самом деле, в силу построения вертикальных углов $V(z)$ все лучи $\tau_i(z)$, $\tau_i(z')$ $(i = 1, 2)$ лежат по одну сторону от прямой

$\overline{zz'} \subset V(z)$; из свойства 2 леммы Меньшова следует, что либо $\tau_1(z)$ и $\tau_2(z')$, либо $\tau_2(z)$ и $\tau_1(z')$ пересекаются в некоторой точке $\tilde{z}$. Отсюда, как и в теореме 1 гл. XI, следует неравенство (2). Лемма 3 доказана.

Нашей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывно и обладает свойством K''' в каждой ее точке, исключая не более чем счетное их множество. Тогда f является голоморфным отображением.*

Доказательство. Покажем сначала, что в условиях теоремы существует открытое всюду плотное в D множество O точек аналитичности f. Возьмем произвольный замкнутый круг $d \subset D$. По лемме находим круг $d' \subset d$, такой, что каждая точка $d \in d'$ является вершиной пары вертикальных углов $V(z)$, для любой точки $z' \in d' \cap V$ которых

$$|f(z') - f(z)| \le L_1 |z' - z|, \tag{3}$$

(L_1 — постоянная). Так как в углах $V(z)$ можно провести сколько угодно лучей, выходящих из их вершин z, то, применяя теорему 1 гл. XI, можем считать, что (3) имеет место для любых точек $z, z' \in d'$. Но тогда f почти всюду в d' дифференцируема и в силу этой же теоремы и леммы 2 отсюда следует аналитичность f всюду внутри $d' \subset d$. Из произвольности $d \subset D$ и вытекает наше утверждение.

Предполагая теперь, что теорема неверна, находим непустое совершенное множество $P \subset D$ точек, в каждой из которых f не является аналитической; в силу только что доказанного P нигде не плотно в D.

По лемме Меньшова находим порцию $P' = P \cap D'$ ($D' \subset D$ — круг), такую, что в каждой точке $z \in P'$ и для всех точек $z' \in \tau_i(z) \cap D'$ имеем:

$$\left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| \le \frac{1}{\sigma}, \tag{4}$$

а для углов имеем:

1) $[\widehat{\tau_i(z'), \tau_i(z'')}] < \sigma$ $(i = 1, 2)$ для любых $z', z'' \in P'$;

2) $100\sigma < [\widehat{\tau_1(z), \tau_2(z)}] < \pi - 100\sigma$ для каждой точки $z \in P'$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(z) = f(z) + Az$. Из (4) следует, что производные числа функции f вдоль лучей $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2)$, $z \in P$, лежат в круге $|\zeta| \le \frac{1}{\sigma}$; поэтому производные числа функции g вдоль тех же лучей лежат в круге $|\zeta - A| \le \frac{1}{\sigma}$. Если A выбрать так, чтобы этот круг был виден из начала $\zeta = 0$ под углом, меньшим 2σ (для этого достаточно взять $|A| > \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^3}$), то при отображении g сравнительно с f точки лучей σ повернутся не более чем на σ и условия теоремы 2 не нарушатся.

Отметим еще, что вдоль каждого из лучей $\tau_1(z)$, $\tau_2(z)$, $z \in P'$, имеет место неравенство

$$(5) \qquad |g(z') - g(z)| > \left(\frac{2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma}\right)|z' - z|, \quad z' \in \tau_i(z) \quad (= 1, 2).$$

Докажем сначала, что $g\,|_{P'}$ — нульмерно. Предположим противное: есть континуум $k \subset D'$, на котором $g = \mathrm{const}$.

Можем считать, что точка $z_0 \in k$ и окрестность $U(z_0)$ таковы, что:

1) $\mathrm{diam} U(z_0) \cap k = \mathrm{diam} U(z_0)$;

2) если разноименные лучи $\tau_i(z')$, $\tau_j(z'')$ $(i \neq j)$ некоторых точек $z', z'' \in P' \cap U$ пересекаются, то они пересекаются в пределах области D на расстоянии от каждой точки z', z'', меньшем чем δ. Все это выполнимо, если взять диаметр круга $U(z_0)$ меньшим $\delta \sin 50\sigma$. При этом в случае 2 имеем

$$\left|\frac{f(z') - f(z'')}{z' - z''}\right| < \frac{2}{\sigma^2}.$$

Легко видеть, что для каждой точки $z' \in k$ все точки континуума k, лежащие в правой полуплоскости $\mathrm{Re} z \geq \mathrm{Re} z'$, расположены внутри угла $\widehat{\tau_1, \tau_2}(z')$: если бы для точки $z_1 \in k$ это было не так, то некоторые разноименные лучи $\tau(z_1)$ и $\tau(z')$ пересекались бы в точке, отличной как от z_1, так и от z' в силу (5). Это же противоречит тому, что углы $\Omega_1(w_0)$, $\Omega_2(w_0)$, содержащие образы этих лучей, пересекаются лишь в точке $w_0 = f(z_0)$. Отсюда следует, что k есть график липшицевой функции вида $y = y(x)$; очевидно, что вертикальные углы $V(z)$, $z \in k$, не содержат точек k.

Покажем, что на дуге k имеется резидуальное подмножество точек z, таких, что в любых углах $V(z)$ в произвольной близости от z найдутся точки множества P'; другими словами, контингенция множества P' в этих точках на k содержит точки обоих углов V.

Предполагая противное и применяя обычный наш "метод пустых конусов", найдем отрезок k' дуги k выше или ниже которого нет точек точек P', где, следовательно, функция g аналитична; но $g(z) = w_0 = \mathrm{const}$ на k' и, в силу известной теоремы единственности аналитических функций, получим, что всюду в достаточно близкой области к k' $g(z) = \mathrm{const}$.

Рассмотрим лучи $\tau_1(z')$, $\tau_2(z')$ произвольной внутренней точки $z' \in k$; так как вся часть k', расположенная правее z', лежит внутри угла $\widehat{\tau_1, \tau_2}(z')$, то начальный отрезок одного из этих лучей войдет внутрь указанной области постоянства g; но это противоречит неравенству (5), в силу которого

$$|g(z'') - g(z')| > L|z'' - z'| > 0$$

при любом $z'' \in \tau_i(z')$ $(i = 1, 2)$.

Итак, на k существует резидуальное подмножество $\mathcal{E}$, для каждой точки z которого оба вертикальных угла $V(z)$ содержат точки P' в произвольной близости от z.

Пусть $z_0 \in E$ и последовательности точек $z'_n \in V'(z_0) \cap P$, $z''_n \in V''(z_0) \cap P$, $z'_n, z''_n \to z_0$. По построению разноименные лучи $\tau_1(z''_n)$, $\tau_2(z'_n)$ пересекаются в пределах области D, а диаметр четырехугольника q_n, образованного этими лучами и сторонами угла $\widehat{\tau_1,\tau_2}(z_0)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Пусть q_n пересекает дугу k в точке $\tilde{z}$ (внутри угла $\widehat{\tau_1,\tau_2}(z_0)$); можем предположить, что эту дугу пересекает луч $\tau_1(z''_n)$. Из треугольника $z_0 z_n \tilde{z}$ при понятных обозначениях (см. § 1 гл. XI) имеем

$$\frac{|z_0 - \tilde{z}|}{\sin\theta''} = \frac{|z'' - \tilde{z}|}{\sin\theta_0} = \frac{|z'' - z_0|}{\sin\tilde{\theta}},$$

а потому

$$\left|\frac{|f(z_0) - f(\tilde{z})|}{z_0 - \tilde{z}}\right| \le \frac{|f(z_0) - f(z'')| + |f(z'') - f(\tilde{z})|}{|z_0 - \tilde{z}|} \le$$

$$\le \frac{|f(z_0) - f(z'')|}{|z_0 - z''|}\,\frac{\sin\tilde{\theta}}{\sin\theta''} + \frac{|f(z'') - f(\tilde{z})|}{|z'' - \tilde{z}|}\,\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta''} \le$$

$$\le \left|\frac{f(z_0) - f(z'')}{z_0 - z''}\right|\frac{1}{\sin 50\sigma} + \left|\frac{f(z'') - f(\tilde{z})}{z'' - \tilde{z}}\right|\frac{1}{\sin 50\sigma} \le \frac{1}{\sigma^2}$$

(так как $\sin 50\sigma > 2\sigma$ при $\sigma < \frac{\pi}{200}$). Но отсюда следует, что

$$0 = |g(z_0) - g(\tilde{z})| = |[f(z_0) - f(\tilde{z})] + A(z_0 - \tilde{z})| \ge$$

$$\ge \left|\frac{f(z_0) - f(\tilde{z})}{z_0 - \tilde{z}} + A\right||z_0 - \tilde{z}| > \left(|A| - \left|\frac{f(z_0) - f(\tilde{z})}{z_0 - \tilde{z}} + A\right|\right)|z_0 - \tilde{z}| > 0$$

Полученное противоречие доказывает наше утверждение о нульмерности g.

Мы уже указывали, что при любом выборе комплексного A таком, что $|A| > \frac{1}{\sigma^3}$, условия теоремы 2 не нарушаются; из доказанной нульмерности $g(z) = f(z) + Az$, в силу той же теоремы следует, что g является внутренним отображением в круге $D' \supset P'$.

Мы видим, что для g выполнены все условия теоремы и, следовательно, она удовлетворяет условию Липшица в D'; но это, как мы видели, означает аналитичность g, а значит, и f всюду в $D' \supset P'$, что противоречит определению множества $P \supset P'$.

Тем самым наша теорема о свойстве K''' доказана.

4. Конформные отображения

Здесь мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть $w = f(z)$ — произвольное непрерывное отображение области D, являющееся конформным первого рода в каждой ее точке, исключая не более чем счетное их множество. Тогда $f(z)$ есть аналитическая функция внутри области D.*

Для доказательства приведем некоторые леммы.

Лемма 4. *В условиях теоремы 4 функция $f(z)$ моногенна почти всюду в области D.*

Доказательство. В самом деле, из § 3 гл. VI следует, что множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ для каждой точки $z \in D$, исключая не более чем счетное их множество, расположено на луче T_z плоскости ζ и, следовательно, не является полной плоскостью. Поэтому в силу теоремы 3 гл. VI множества $\mathfrak{M}_z$ почти для всех $z \in D$ являются отдельными конечными точками, так как ясно, что они не могут быть и окружностями. Но это и означает моногенность функции $f(z)$ почти всюду в D. Лемма 4 доказана.

Более важным для нас явится другое предложение, которое мы сформулируем даже в несколько более общем виде.

Лемма 5. *Пусть $w = w(z)$ — непрерывное однолистное отображение области d плоскости z на область d_1 плоскости w. Если в каждой точке $z \in D$, исключая не более чем счетное их множество, множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ функции $w(z)$ есть собственное подмножество некоторой прямой (т. е. не содержащее всех точек этой прямой) на плоскости ζ, то обратная функция $z = z(w)$ моногенна почти всюду в d_1.*

Доказательство. Множества моногенности $\mathfrak{M}_z$ однолистной функции $z = z(w)$ получают из соответствующих множеств $\mathfrak{M}_w$ преобразованием $\omega = \frac{1}{\zeta}$. Поэтому из условий леммы следует, что каждое множество $\mathfrak{M}_w$ есть собственное подмножество прямой или окружности на плоскости ω исключая множества моногенности $\mathfrak{M}_w$ для конечного или счетного множества точек $w \in d_1$. Как и выше, отсюда снова следует, что почти для всех $w \in d_1$ множества $\mathfrak{M}_w$ суть отдельные конечные точки, т. е. функция $z(w)$ моногенна почти всюду в d_1.

Конечно, прямая функция $f(z)$ является также моногенной почти всюду (в области d). Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *В условиях теоремы 4 существует открытое всюду плотное в D множество O точек аналитичности функции $f(z)$.*

Доказательство. Введем множества $D_n^{(1)}$, $D_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где

$$D_n^{(j)} = D_z \left\{ \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} + (-1)^j \right| \geq \frac{1}{2}, \quad |z' - z| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Как уже обычно, легко показать, что каждое из множеств $D_n^{(1)}$, $D_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ замкнуто (в D). Далее, из условий теоремы 4 следует, что

$$D = \bigcup_{j,n} D_n^j \bigcup H \quad (j = 1, 2), \tag{6}$$

где H не более чем счетно. В самом деле, множество $\bigcup\limits_n D_n^{(j)}$ содержит точки $z \in D$, для которых множества моногенности $\mathfrak{M}_z$ не пересекаются с кругом $|\zeta + (-1)^j| < \frac{1}{2}$ $(j = 1, 2)$. Но так как в наших условиях каждое $\mathfrak{M}_z$, $z \in D \setminus H$, принадлежит некоторому лучу T_z с началом в $\zeta = 0$, то отсюда и вытекает (6). Рассмотрим вспомогательные функции $w_1(z) = f(z) - z$, $w_2(z) = f(z) + z$. Очевидно, что при $z \in D_n^{(j)}$, $(j = 1, 2)$, $z' \in D$ имеем

$$\left| \frac{w_j(z') - w_j(z)}{z' - z} \right| \geq \frac{1}{2} \tag{7}$$

при $|z' - z| < \frac{1}{n}$. Отсюда (см. § 1 гл. VI) следует, что в $\frac{1}{2n}$-окрестности каждой точки $z \in D_n^{(j)}$ функция $w_j(z)$ однолистна на соответствующей порции множества $D_n^{(j)}$.

Возьмем произвольную область $\bar{d} \subset D$. Обозначая пересечение d с замкнутым множеством $D_n^{(j)}$ $(j = 1, 2;\ n = 1, 2, \ldots)$ через $d_n^{(j)}$, получаем, очевидно,

$$d = \bigcup_{j,m} d_m^{(j)} \bigcup h,$$

где $h = H \cap d$ не более чем счетно. Но сумма всех $d_n^{(j)}$ как дополнение к h является множеством второй категории в d. Поэтому найдется круг $d' \subset d$, в котором одно из множеств $d_n^{(j)}$ $(j = 1, 2;\ n = 1, 2, \ldots)$ всюду плотно, но так как эти множества замкнуты (в d), то круг d' просто принадлежит некоторому множеству $d_n^{(j)}$.

Выберем диаметр круга d' меньшим $1/n$; тогда из (4) следует, что функция $w_j(z)$ является однолистной в d'. Следовательно, образ $d'_j = w_j(d')$ области d' есть также область в плоскости w_j. Так как

$$\frac{\Delta w_j}{\Delta z} = \frac{\Delta f}{\Delta z} \pm 1,$$

то множества моногенности $\mathfrak{M}'_z$ для функций $w_1(z)$, $w_2(z)$ получаются из соответствующих множеств $\mathfrak{M}_z$ функции $f(z)$ сдвигом на ± 1, а потому суть собственные подмножества некоторых прямых ($\mathfrak{M}_z \subset T_z$, где T_z — лучи).

На основании леммы 5 заключаем, что обратная функция $z = z(w_j)$ $(j = 1, 2)$ моногенна почти всюду в области d'_j. Из неравенства (7) следует, что при $w'_j, w_j \in d'_j$

$$\left| \frac{z(w'_j) - z(w_j)}{w'_j - w_j} \right| \le 2.$$

В силу леммы 2 функция $z(w_j)$ является аналитической в области d'_j, а вместе и обратная ей функция $w_j(z)$ является аналитической в круге d'. Но $f(z) = w_j(z) + z$, поэтому в $d' \subset D$ аналитической оказывается и первоначальная функция $f(z)$. Так как область $d \subset D$ была выбрана произвольно, то отсюда и следует утверждение леммы.

Докажем теперь теорему 4.

Пересечение множества P с множеством $D_n^{(j)}$ обозначим через $P_n^{(j)}$ $(j = 1, 2;\ n = 1, 2, \ldots)$. Каждое множество $P_n^{(j)}$ замкнуто в D и

$$P = \bigcup_{j,m} P_m^{(j)} \bigcup h',$$

где h' не более чем счетно. Сумма всех $P_n^{(j)}$ как дополнение к h' является множеством второй категории на совершенном множестве P. Поэтому найдется порция его $P' = P \cap D'$ (D' — некоторый круг), на которой одно из замкнутых множеств P_n^j всюду плотно, т. е. совпадает с P'.

Предполагая, что диаметр D' меньше $1/n$, на основании (7) получаем, что функция $w_j(z)$ является однолистной на множестве

$P' \subset D'$; поэтому в силу теоремы 6 гл. IX можно считать ее однолистной в круге D'. Следовательно, образ $D'_j = W_j(D')$ круга D' есть некоторая область в плоскости w_j, а образ $P'_j = w_j(P')$ есть совершенное нигде не плотное множество в D'_j. При этом функция $z(w_j)$, обратная к $w_j(z)$, является аналитической в $D'_j \setminus P'_j$; на основании леммы 5 функция $z(w_j)$ моногенна почти всюду в области D'_j.

Из неравенства (7) следует, что

$$\left|\frac{z(w'_j) - z(w_j)}{w'_j - w_j}\right| \le 2$$

при $w_j \in P'_j$ и $w'_j \in D'_j$. Но, как и ранее, на основании теоремы 4 § 2 гл. XI, мы можем считать, что это условие Липшица выполнено во всей области D'_j, что означает аналитичность функции $z(w_j)$ в D'_j вместе с обратной ей $w_j(z) = f(z) \mp z$, а, значит, и $f(z)$ всюду в $D' \supset P'$, что противоречит определению множества $P \supset P'$.

Теорема доказана полностью.

5. Отображения со свойством K'

Мы уже убеждались выше, какую важную роль во многих случаях играли леммы Д.Е. Меньшова и ей подобные. И если ранее нам достаточно было иногда в них рассматривать модули разностных отношений функции f:

$$\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h}\right|,$$

то оказывается, что при рассмотрении именно свойства K' нам существенно помогут сами эти отношения

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

так сказать, в чистом виде.

Докажем сначала некоторые леммы, связанные со свойством K'.

Л е м м а 7. *Пусть $w = f(z)$ — непрерывная в области D функция и $P \subset D$ — произвольное совершенное множество. Предположим, что $f(z)$ обладает свойством K' во всех точках множества $N \subset P$ не первой категории на P. Тогда найдутся порция $P \subset P$ и числа $\sigma, \delta > 0$ такие, что из каждой точки $z \in P'$ исходят три луча $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$, обладающие свойствами:*

1) $[\widehat{\tau_i(z'), \tau_i(z'')}] < \sigma$ $(i = 1, 2, 3)$ для любых точек $z', z'' \in P'$;

2) $100\sigma < [\widehat{\tau_i(z), \tau_j(z)}] < \pi - 100\sigma$ при $i \ne j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ для всех точек $z \in P'$;

3) расстояние от множества P' до границы области D больше δ;

4) существует в плоскости ζ фиксированный, луч Т *с начальной точкой $\zeta = 0$ такой, что угол Ω_σ раствора 2σ с вершиной в $\zeta = 0$ и биссектрисой* Т *содержит значения отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $z + \Delta z \in \tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ для всех Δz, удовлетворяющих неравенствам $0 < |\Delta z| \le \delta$, и для каждой точки $z \in P'$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В плоскостях z и ζ фиксируем определенные лучи t и τ соответственно и обозначим через $N(n_1, n_2, n_3, \nu, p, q) = N(n_i, \nu, p, q)$ множество точек $z \in N$, удовлетворяющих следующим условиям:

А) $\left|\{\widehat{t, t_i}(z)\} - \frac{n_i}{100p}\right| < \frac{1}{100p}$ $(i = 1, 2, 3)$,

где через $\{\widehat{t, t_i}(z)\}$ обозначена величина угла, отсчитываемого в положительном направлении от t, заключенная между 0 и 2π (включая 0);

Б) $\frac{2}{p} < [\widehat{t_i(z), t_j}(z)] < \pi - \frac{2}{p}$ при $i \ne j$ $(i, j = 1, 2, 3)$;

В) $\left|\{\widehat{\tau, T}_z\} - \frac{\nu}{100p}\right| < \frac{1}{100p}$;

Г) угол $\Omega(z)$ с вершиной в $\zeta = 0$ раствора $\frac{1}{50p}$ и биссектрисой T_z содержит значения отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при всех Δz таких, что

$$0 < |\Delta z| \le \frac{1}{q}, \quad z + \Delta z \in t_i(z) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Из определения свойства K' и условий леммы следует, что

$$\cup N(n_i, \nu, p, q) = N,$$

где суммирование распространено на всевозможные целые положительные значения чисел n_i, ν, p, q. Так как N не первой категории на P, то найдутся определенные значения n_i, ν, p, q такие, что соответствующее им множество $N(n_i, \nu, p, q)$ будет всюду плотно на некоторой порции $P' \subset P$, причем $P' = P \cap D'$, где $D' \subset D$ — круг. Очевидно, можно предположить, что расстояние от множества P' до границы области D больше $1/q$. Для этих чисел положим

$$N(n_i, \nu, p, q) = N', \quad \frac{1}{100p} = \sigma, \quad \frac{1}{q} = \delta.$$

Докажем, что для множества P' и так определенных чисел $\sigma, \delta > 0$ имеют место все свойства, указанные в лемме.

Для этого определим в точках $z \in P'$ лучи $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ следующим образом полагаем $\tau_i(z) = t_i(z)$ для точек $z \in P' \cap N'$, а для точек

$z \in P' \setminus N'$ в качестве $\tau_i(z)$ возьмем одно из предельных положений лучей $t_i(z')$, когда точки $z' \in N'$ сходятся к z; такое определение возможно в силу плотности N' на P'. Из неравенств А следует теперь, что

$$[\tau_i(z), \widehat{\tau_j}(z)] \leq \frac{1}{50p} \quad (i = 1, 2, 3)$$

для всех точек $z', z'' \in P'$, а из неравенств Б получим

$$\frac{2}{p} < [\tau_i(z), \widehat{\tau_j}(z)] < \pi - \frac{2}{p}$$

при $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ для всех точек $z \in P'$. Из последних неравенств в силу определения числа σ следует, что для лучей $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ выполнены свойства 1 и 2 леммы. Так как расстояние от множества P' до границы области D больше $1/q$, то имеем также и свойство 3.

Перейдем к доказательству свойства 4. Возьмем на плоскости ζ в качестве Т произвольный луч $T_{z'}$ для $z' \in N'$ и построим угол Ω_σ раствора $\frac{1}{50p} = 2\sigma$ с биссектрисой Т (и вершиной в $\zeta = 0$); в силу неравенств В и Г углы $\Omega(z'')$ для всех $z'' \in N'$ расположены внутри Ω_σ.

Пусть теперь $z \in P' \setminus N'$ — произвольная точка и $\varepsilon > 0$ — некоторое фиксированное число, удовлетворяющее неравенству $\varepsilon \leq \frac{1}{q}$. Обозначим через z_i $(i = 1, 2, 3)$ точку луча $\tau_i(z)$, для которой $|z_i - z| = \varepsilon$. Если $z' \in N'$, то через z'_i $(i = 1, 2, 3)$ обозначим точку луча $t_i(z')$, для которой $|z'_i - z'| = \varepsilon \leq \frac{1}{q}$. Из Г следует, что значения отношения

$$\frac{f(z'_i) - f(z')}{z'_i - z'}$$

лежат в соответствующих углах $\Omega(z')$ и, следовательно, внутри построенного выше угла Ω_σ.

Луч $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ есть одно из предельных положений лучей $t_i(z')$, когда z' стремится к z; из предыдущих равенств следует, что точки z'_i стремятся при этом к z_i поэтому в силу непрерывности $f(z)$ и замкнутости Ω_σ получаем, что значения

$$\frac{f(z_i) - f(z)}{z_i - z} \quad (i = 1, 2, 3)$$

принадлежат углу Ω_σ. Лемма 7 доказана.

Возьмем луч Т, определенный в лемме 7, и обозначим $\arg \mathrm{T} = \Phi_0$. Тогда для функции $f_0(z) = e^{-i\Phi_0} f(z)$ будут выполнены все утверждения леммы, если вместо луча Т взять положительную полуось

Т$'$ действительной оси плоскости ζ, а вместо угла Ω_σ — угол Ω'_σ с биссектрисой Т$'$. Для функции $w(z) = f_0(z) + az = e^{-i\Phi_0} f(z) + az$ ($a > 0$ произвольно) угол Ω'_σ сместится на a; получим угол Ω''_σ. По построению Ω''_σ содержит значения отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $z + \Delta z \in \tau_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) и для всех δz $0 < |\Delta z| \leq \delta$, в частности

$$\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \left|\frac{w(z+\Delta z) - w(z)}{\Delta z}\right| \geq a > 0 \quad (z \in P').$$

Так как $\sigma < \frac{\pi}{200}$, то Ω''_σ является острым углом и из простых геометрических соображений следует, что

$$-\sigma \leq \arg \Delta w/\Delta z \leq \sigma \quad (\text{при любом} \quad a > 0). \tag{8}$$

Рассмотрим отображение $w = w(z)$; в соответствующую точке $z \in P'$ точку w перенесем параллельно (считая при этом, что оси координат плоскостей z и ζ соответственно параллельны) лучу $\tau_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) и построим углы $\Omega_i(w)$ раствора 2σ с вершиной w и биссектрисами $\tau_i(z)$. Из (8) следует, что относительный поворот образа произвольной точки $z + \Delta z$ луча $\tau_i(z)$ (при $0 < |\Delta z| \leq \delta$) не превышает по абсолютной величине числа σ, поэтому образ $L_i(w)$ отрезка луча $\tau_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) при $|\Delta z| \leq \delta$ полностью расположен в угле $\Omega_i(w)$.

Обозначим через P'_1 образ множества P' при отображении $w = w(z)$; возьмем произвольную точку $w = P'_1$ и соответствующие ей углы $\Omega_i(w)$. Удвоив раствор каждого из этих углов (при тех же биссектрисах $\tau_i(z)$), получим тройку углов $\Omega_i(w)$, которые в силу 1 леммы 7 обладают следующим свойством: если $w' \in P'_1$, то тройка углов $\Omega_i(w')$, полученных параллельным переносом углов $\Omega_i(w)$ в точку w' содержит образы $L_i(w')$ отрезков лучей $\tau_i(z')$ ($i = 1, 2, 3$) длины δ, где $z' \in P'$ — произвольная точка, соответствующая точке w'.

Итак, приходим к следующему утверждению.

Л е м м а 8. *Пусть $w = f(z)$ — непрерывная в области D функция и $P \subset D$ — произвольное совершенное множество. Предположим, что $f(z)$ обладает свойством K' во всех точках множества $N \subset P$ не первой категории на P. Тогда найдутся порция $P' \subset P$ и числа $\sigma, \delta > 0$ такие, что из каждой точки $z \in P'$ исходят три луча $\tau_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$), обладающие свойствами:*

1) $[\widehat{\tau_i(z'), \tau_i(z'')}] < \sigma$ ($i = 1, 2, 3$) для любых точек $z', z'' \in P'$;

2) $100\sigma < [\widehat{\tau_i(z), \tau_j(z)}] < \pi - 100\sigma$ при $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, 3$) для всех точек $z \in P'$;

3) расстояние от множества P' до границы области D больше δ;

4) функция вида $w(z) = e^{-i\Phi_0}f(z) + az$ (Φ_0 — фиксированная постоянная, $a > 0$ произвольно) на лучах $\tau_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$, $z \in P'$) удовлетворяет неравенствам

$$\left|\frac{w(z') - w(z)}{z' - z}\right| \geq a > 0$$

при $z' \in \tau_i(z)$ и $|z' - z| \leq \delta$;

5) если P'_1 — образ множества P' при отображении $w = w(z)$, то из каждой точки $w \in P'_1$ как из вершины исходят три угла $\Omega_i(w)$ ($i = 1, 2, 3$) раствора 4σ каждый, полученные параллельным переносом фиксированной тройки углов Ω_i с общей вершиной и обладающие тем свойством, что образ $L_i(w)$ отрезка $\tau_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$), имеющего длину δ, при отображении $w = w(z)$ расположен в угле $\Omega_i(w)$; при этом

$$100\sigma < [\widehat{\Omega_i, \Omega_j}] < \pi - 100\sigma$$

при $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, 3$), если понимать $[\widehat{\Omega_i, \Omega_j}]$ как угол между биссектрисами углов Ω_i, Ω_j; углы Ω_i не зависят от $a > 0$.

Лемма 9. *В условиях леммы 8 найдется порция P_0 множества P, на которой функция $w(z) = e^{-i\Phi_0}f(z) + z$ однолистна (в смысле определения § 1 гл. VI).*

Доказательство. По лемме 8 выделяем порцию $P' \subset P$ с указанными в ней свойствами. Из свойства 4 функции $w(z)$ при $a = 1$ следует, что образ $L_i(w)$ отрезка $\tau_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) длины δ имеет диаметр $\geq \delta$ и расположен в угле $\Omega_i(w)$. Возьмем произвольную точку $z \in P'$ и порцию $P_0 \subset P'$, расположенную в некотором круге с центром в точке z, который можно считать расположенным в концентрическом круге

$$|z' - z| < \frac{1}{2}\delta \sin 100\sigma. \tag{9}$$

Покажем, что на P_0 функция $w(z)$ однолистна.

Пусть $z_1, z_2 \in P_0$ и $z_1 \neq z_2$; предположим, вопреки утверждению, что

$$w(z_1) = w(z_2) = w_0. \tag{10}$$

Из свойства 4 функции $w(z)$ следует, что ни одна из точек z_1 и z_2 не лежит на каком-либо луче $\tau_i(z_1)$, $\tau_i(z_2)$ ($i = 1, 2, 3$), соответствующем другой точке. В самом деле, если бы, например, $z_2 \in \tau_1(z_1)$, то й силу

(9) $|z'-z| < \delta \sin 100\sigma < \delta$, а потому из свойства 4 функции $w(z)$ (при $a = 1$)

$$\left|\frac{w(z')-w(z)}{z'-z}\right| \geq 1,$$

и, следовательно, $w(z_2) \neq w(z_1)$.

Итак, если имеет место (10), то каждая из точек z_1 и z_2 лежит внутри угла, образованного лучами $\tau_i(z_1)$, $\tau_i(z_2)$, соответствующими другой точке. Предположим для определенности, что точка z_2 расположена внутри угла, образованного лучами $\tau_1(z_1)$ и $\tau_2(z_1)$. Повторяя дословно рассуждение теоремы 1 § 1 гл. XI, найдем, что луч $\tau_3(z_2)$ пересекает одну из сторон этого угла (пусть $\tau_2(z_1)$) в некоторой точке $\tilde{z}$, причем, учитывая (9), получаем

$$|z_1 - \bar{z}| < \delta, \quad |z_2 - \bar{z}| < \delta, \tag{11}$$

т. е. точка $\bar{z}$ принадлежит области D.

Так как по предположению $w(z_1) \neq w(z_2) = w_0$, то в точке w_0 имеется тройка углов $\Omega_i(w_0)$, в которых расположены образы любых отрезков соответствующих лучей $\tau_i(z_1)$ и $\tau_i(z_2)$ длины δ. Из неравенств (11) следует, что образы отрезков лучей $\tau_2(z_1)$ и $\tau_3(z_2)$ длины, меньшей δ, должны пересекаться в точке $w(\tilde{z}) \neq w_0$, что невозможно, так как образы этих отрезков расположены в непересекающихся углах $\Omega_2(w_0)$ и $\Omega_3(w_0)$. Лемма 9 доказана.

Докажем две простые леммы.

Лемма 10. *Пусть гомеоморфизм $z = z(w)$ области D_1 дифференцируем в некоторой точке $w_0 \in D_1$. Предположим, что из w_0 исходят три простые дуги L_i ($i = 1, 2, 3$), расположенные в некоторых углах Ω_i с единственной общей точкой — вершиной w_0 и такие, что соответствующие им три пары вертикальных углов также не пересекаются между собой. Тогда если образы дуг L_i при отображении $z = z(w)$ являются на плоскости z кривыми, исходящими из соответствующей точки z_0 и с касательными в этой точке, расположенными на различных прямых, то либо якобиан $J(w)$ этого отображения в точке w_0 отличен от нуля, либо функция $z(w)$ моногенна в этой точке и $z'(w_0) = 0$.*

Доказательство. По условию отображение $z = z(w) = x(u, v) + iy(u, v)$ $(w = u + iv)$ вблизи точки z_0 имеет вид

$$\Delta z = z_w \Delta z + z_{\bar{w}} \Delta \bar{w} + o(\Delta w),$$

где

$$\Delta w = w - w_0; \quad \Delta z = z(w) - z(w_0);$$

$$z_w = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}\right);$$
$$z_{\bar w} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Предположим, что якобиан $J(w_0) = 0$, но функция $z(w)$ немоногенна (если бы она была моногенной, то при нашем предположении было бы $z'(w_0) = 0$). Это значит, что $|z_w| = |z_{\bar w}|$, причем $z_w \neq 0$, так как в противном случае функция $z(w)$ была бы моногенной.

Положим $z_{\bar w} = z_w e^{2i\beta}$. Тогда

$$\Delta z = z_w e^{i\beta}(e^{-i\beta}\Delta w + e^{i\beta}\Delta \bar w) + o(\Delta w).$$

Вводя обозначения $\arg(z_w e^{i\beta}) = \beta_0$, $\Delta w = |\Delta w| e^{i\phi}$, получаем

$$\Delta z = 2|z_w||\Delta w|\cos(\phi - \beta)e^{i\beta_0} + o(\Delta w). \tag{12}$$

Проведем через точку $w = w_0$ (т. е. $\Delta w = 0$) прямую L_1, составленную из лучей $\phi - \beta = \frac{\phi}{2}$, $\phi - \beta = \frac{3\phi}{2}$. Из условий леммы следует, что L, может пересечь лишь один из (замкнутых) углов Ω_i $(i = 1, 2, 3)$. Следовательно, по крайней мере два из них (пусть Ω_1, Ω_2) не пересекаются с L, поэтому для точек $\Delta w = |\Delta w|e^{i\phi}$ каждого из углов Ω_1, Ω_2 величина $\cos(\phi - \beta)$ сохраняет знак, причем найдется такое $\alpha_0 > 0$, что для этих точек $|\cos(\phi - \beta)| > 0$.

Так как $z_w \neq 0$, то отсюда и из (12) следует, что существует предел

$$\lim_{\Delta w \to 0} \operatorname{Arg} \frac{\Delta z}{|\Delta w|},$$

когда Δw принадлежит одному из углов Ω_1, Ω_2, причем, оба эти предела могут быть равными только числам β_0 и $\beta_0 + \phi$ (с точностью до кратного 2ϕ). Это, в частности, означает, что образы кривых L_1, L_2, расположенных в Ω_1, Ω_2, суть кривые с одной и той же касательной прямой, что противоречит условию леммы. Лемма 10 доказана.

Пример однолистного отображения $z = w|w|$ вблизи точки $w = 0$ показывает, что случай, когда $z'(w_0) = 0$, действительно может представиться. Далее, что число кривых L_i (три) в условиях леммы 10 нельзя уменьшить, показывает пример однолистной функции $z(w) = u + iv(u^2 + v^2)$ при $w = 0$. В этом примере оси координат плоскости т переходят в оси координат плоскости z, и в то же время $J(0) = 0$, а $z'(0)$ не существует.

Лемма 11. *Если гомеоморфизм $z = z(w)$ области D_1 дифференцируем в точке $w_0 \in D_1$ и якобиан $J(w_0) \neq 0$, то и обратное отображение $w = w(z)$ дифференцируемо в соответствующей точке z_0.*

Доказательство. Модули наименьшего и наибольшего из производных чисел функции $z(w)$ в точке w_0 равны соответственно $||z_w| - |z_{\bar{w}}||$ и $|z_w| - |z_{\bar{w}}|$. В наших условиях эти числа не равны нулю, так как $J = |z_w|^2 - |z_{\bar{w}}|^2 \neq 0$; поэтому в некоторой окрестности точки w_0 будем иметь

$$\frac{1}{2}||z_w| - |z_{\bar{w}}|| < \left|\frac{\Delta z}{\Delta w}\right| < 2(|z_w| - |z_{\bar{w}}|).$$

Отсюда и из однолистности функции $z(w)$ легко следует, что величина $o(\Delta w)$ является величиной $o(\Delta z)$, и наоборот; здесь, мы, как и выше, полагаем $\Delta z = z - z_0$, $\Delta z = w - w_0$.

По условию леммы отображение $z = z(w) = x(u,v) + iy(u,v)$ вблизи точки $w_0 = u_0 + iv_0$ имеет вид

$$x - x_0 = \frac{\partial x}{\partial u}(u - u_0) + \frac{\partial x}{\partial v}(v - v_0) + o(\Delta w),$$

$$y - y_0 = \frac{\partial y}{\partial u}(u - u_0) + \frac{\partial y}{\partial v}(v - v_0) + o(\Delta w).$$

Так как $J(w_0) \neq 0$, то, заменяя $o(\Delta w)$ на $o(\Delta z)$, получаем

$$u - u_0 = \frac{1}{I}\frac{\partial y}{\partial v}(x - x_0) - \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v}(y - y_0) + o(\Delta z),$$

$$v - v_0 = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}(x - x_0) + \frac{1}{I}\frac{\partial x}{\partial u}(y - y_0) + o(\Delta z).$$

Эти равенства л показывают, что обратная функция $w = w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дифференцируема в соответствующей точке $z_0 = x_0 + iy_0$. Лемма 11 доказана.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — произвольное непрерывное отображение, обладающее свойством K' в каждой точке $z \in D$, за исключением не более чем счетного их множества. Тогда функция $f(z)$ является аналитической всюду в области D.*

Доказательство. Как и обычно, покажем сначала, что в условиях теоремы существует открытое всюду плотное в D множество O точек аналитичности функции $f(z)$. Возьмем произвольную замкнутую область $\bar{d} \subset D$. По лемме 9 найдем круг $d' \subset d$, в котором функция вида

$$w(z) = e^{-i\Phi_0} f(z) + z$$

является однолистной и обладает всеми свойствами, перечисленными в лемме 8 (при $a = 1$). Образ круга d' при однолистном отображении

$w = w(z)$ есть некоторая область d_1' плоскости w. Из свойств функции $w(z)$ следует, что обратная ей функция $z = z(w)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 гл. XI, если положить $P_1 = D_1 = d_1'$, а в качестве дуг $L_i(\bar{w})$ взять образы отрезков длины δ лучей $\tau_i(z)$, $z \in d_1'$. В силу этой теоремы можно считать, что в области d_1' имеет место неравенство

$$|z(w_2) - z(w_1)| < L|w_2 - w_1|$$

для любых точек $w_1, w_2 \in d_1'$ (L — некоторая постоянная), т. е. функция $z(w)$ в области d_1', удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, имеет полный дифференциал почти всюду в d_1'.

Обозначим через $h \subset d'$ множество точек, в которых функция $f(z)$ не обладает свойством K', а через $h_1 \subset d_1'$ образ этого множества при отображении $w = w(z)$; h_1 не более чем счетно. Возьмем произвольную точку $w_0 \in d_1' \setminus h_1$ в которой функция $z(w)$ дифференцируема. Так как в силу свойства углов Ω_i ($i = 1, 2, 3$, лемма 8) условия леммы 10 выполнены, то либо $z'(w_0) = 0$, либо якобиан отображения $z = z(w)$ в точке w_0 отличен от нуля. Тогда из леммы 11 следует, что и функция $w(z) = e^{-i\Phi_0} f(z) + z$ дифференцируема в точке $z_0 \in d' \setminus h$; другими словами, дифференцируемой является и первоначальная функция $f(z)$. Но $f(z)$ в точке $z_0 \in d' \setminus h$ обладает свойством K', поэтому в силу леммы §3 гл. VI эта функция моногенна в точке z_0. Отсюда следует моногенность функции $w(z)$ и обратной ей функции $z(w)$ в точке w_0. Тем самым показано, что функция $z(w)$ удовлетворяет условию Липшица и почти всюду в области d_1' моногенна; в силу леммы 3 она является аналитической всюду в d_1'. Вместе с ней аналитическими являются прямая функция $w(z) = e^{-i\Phi_0} f(z) + z$ в круге $d' \subset d$ и, очевидно, первоначальная функция $f(z)$. Так как область $d \subset D$ была взята нами произвольно, то точки аналитичности функции f в области D образуют плотное и, очевидно, открытое множество O.

Предположим теперь, что утверждение теоремы 6 неверно. Тогда найдется непустое совершенное множество $P \subset D$ всех точек, в каждой из которых функция f не является аналитической. Согласно предыдущему, P — нигде не плотно в D. По лемме 9 находим порцию $P' = P \cap D'$ ($\overline{D}' \subset D$ — круг), на которой функция вида $w(z) = e^{-i\Phi_0} f(z) + z$ однолистна; в силу теоремы 6 гл. IX можно считать, что эта функция однолистна во всем круге D'.

Через D_1' и P_1' обозначим образы круга D' и множества P' при отображении $w = w(z)$: D_1' — область, и $P_1' \subset D_1'$ — нигде не плотное совершенное множество. Применяя, как и выше, теорему 2 гл. XI к обратной функции $z = z(w)$ в D_1', получим, что для любых точек $w_1, w_2 \in P_1'$ имеем: $|z(w_1) - z(w_2)| \leq L|w_1 - w_2|$ (L — постоянная), а потому можем считать, это условие Липшица выполненым во всей области D_1'. Это же снова доказывает аналитичность $z(w)$ в D_1' и, в конечном счете, аналитичность и f в круге $D' \supset P'$, что противоречит определению множества P.

Следовательно, P — пусто и теорема доказана.

6. Об одном критерии аналитичности функций

В.К. Дзядыку принадлежит следующая теорема [3]: если в области $D \subset C$ функции $u(x, y), v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы и поверхности $Z = u(x, y), Z = v(x, y)$ и $Z = \sqrt{u^2 + v^2}$над каждой компактной подобластью D имеют одинаковые площади, то либо функция $f(z) = u + iv$, либо $\overline{f(z)} = u - iv$ является аналитической всюду в D.

Нетрудно показать [4], что в качестве третьей функции - вместо $\sqrt{u^2 + v^2}$ - можно взять произвольную гладкую функцию $\varphi(u, v)$, для которой выполнено равенство

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 = 1;$$

например, можно положить $\varphi = \alpha u + \beta v$, где для постоянных α, β : $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Что касается снятия такого обременительного условия как непрерывная дифференцируемость u, v, то известный пример функции Г. Бора $w = x + i|y|$ на плоскости показывает, что даже просто условие Липшица не может еще обеспечить справедливости теоремы.

И все же теорема Дзядыка допускает усиление, если вместо непрерывности частных производных от u, v требовать лишь их существования всюду в области. Нашей целью и будет доказательство этого обобщения; нетрудно догадаться, что оно будет основано на достаточно длинной цепи других предложений (а некоторые мы получим просто попутно), но зато таких, каждое из которых находит существенное применение не только в нашем конкретном случае.

Итак, нашим основным предложением будет следующая теорема:

Теорема 6. *Пусть непрерывные в области $D \subset C$ функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ обладают всюду конечными частными производными. Если для каждой компактной подобласти D, над которой поверхности $Z = u(x, y)$, $Z = v(x, y)$ $Z = \alpha u + \beta v$ (α, β - постоянные, не равные нулю и $\alpha^2 + \beta^2 = 1$) одновременно имеют конечные площади,* *эти площади равны между собой, то либо функция* $f(z) = u + iv$, *либо ей сопряженная* $\overline{f(z)} = u - iv$, *является аналитической всюду в* D.

Как уже указывалось, доказательство этой теоремы мы получим на основании некоторых вспомогательных утверждений.

Лемма 12. *Если в условиях теоремы 7 функции* u, v *- липшицевы в подобласти* $d \subset D$, *то почти всюду в* $\overline{d}$ *выполнены либо условия Коши-Римана* (CR): $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, *либо им сопряженные* $\overline{(CR)}$: $u_x = -v_y$, $u_y = v_x$ *(в различных точках* $\overline{d}$ *возможны разные условия).*

Доказательство. Так как для липшицевой в области $\underline{d}$ функции $F(x,y)$ площадь поверхности $Z = F(x,y)$ конечна над $\underline{d}$ и выражается интегралом $\iint\limits_d \sqrt{1 + {F_x}^2 + {F_y}^2} dxdy$, то из условий леммы легко следует, что почти всюду в $\underline{d}$ имеем равенства:

$$\sqrt{1 + {u_x}^2 + {u_y}^2} = \sqrt{1 + {v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{1 + (\alpha u_x + \beta v_x)^2 + (\alpha u_y + \beta v_y)^2}$$

равносильные следующим:

$$\begin{cases} {u_x}^2 + {u_y}^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 \\ u_x v_x + u_y v_y = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Если в некоторой точке все частные производные от u, v отличны от нуля, то имеем:

$$\frac{u_x}{v_y} = \frac{u_y}{v_x} = k,$$

или

$$\begin{cases} u_x = k v_y \\ u_y = -k v_x \end{cases} \tag{14}$$

но тогда первое равенство из (13) дает: $k^2 = 1$ и $k = \pm 1$, то есть (14) - это либо условия CR, либо $\overline{CR}$.

Пусть теперь одна из частных производных равна нулю, например, $u_x = 0$. Если при этом и $u_y = 0$, то из (13) получим $v_x = v_y = 0$; если же $u_y \neq 0$, то из второго равенства (13) следует $v_y = 0$, а из первого: ${u_y}^2 = {v_x}^2$ или $u_y = \pm v_x$. И в том и другом случае здесь мы снова имеем либо условия CR, либо $\overline{CR}$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 13. *В условиях теоремы 7 в области D найдется всюду плотное открытое множество O, в каждой компоненте которого либо f, либо $\overline{f}$ будет аналитической.*

Можно сформулировать иначе: это — условие K''' либо для f, либо для сопряженной ей $\bar{f}$ (но не только для лучей, а и полных координатных прямых $x, y = \mathrm{const}$).

Лемма 14. *Пусть в области $\overline{D}$ задана непрерывная функция f и нигде не плотное замкнутое множество P, такое, что в каждой компоненте открытого множества $D \setminus P$ либо f, либо $\overline{f}$ является аналитической. Если $f|_P$ - липшицева, то f - локально-липшицева всюду в $\overline{D}$.*

Подчеркнем, что в условиях теоремы 7 на каждом замкнутом множестве в D найдется порция, на которой наша функция f будет липшицевой. Поэтому при ее доказательстве мы можем считать, что f в области D уже липшицева, что имеется открытое плотное множество O, в каждой компоненте которого либо f, либо $\overline{f}$ является аналитической.

Если дополнительное (как легко видеть, совершенное) множество $P = D \setminus G$ пусто, то доказывать нечего.

Предположим теперь, что $P \neq \varnothing$

Наше дальнейшее доказательство будет основано на одной геометрической - точнее, топологической - теореме.

Определение. Скажем, что непрерывное отображение $f : D \to \mathbb{C}$ или, иначе, $w = f(z)$, обладает свойством T в точке z_0, если в этой точке пересекаются две различные прямые l_1, l_2, такие, что образы их $l_k (k = 1, 2)$ являются кривыми L_k в w-плоскости с различными касательными T_k в точке $w = f(z)$. При этом образы начальных отрезков прямых l_1, l_2, уже не проходят через точку $w_0 = f(z_0)$.

Теорема, о которой мы упомянули, формулируется следующим образом:

Теорема 7. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ - непрерывное отображение, обладающее свойством T в каждой точке области D, исключая не более чем счетное их множество. Тогда f является внутренним отображением области D* (по Стоилову [4]).

Для доказательства нам потребуется одна лемма о свойстве T, фактически доказанная в §1 гл. X; поэтому приведем лишь ее заключение:

Лемма 15.*Пусть отображение* $f : D \to \mathbb{C}$ *непрерывно и* $P \subset D$ - *произвольное замкнутое множество; пусть* f *обладает свойством* T *во всех точках множества* $N \subset P$ *не первой категории на* P. *Тогда найдутся открыто-замкнутая порция* $P' \subset P$, *числа* σ, $\delta > 0$ *такие, что через каждую точку* $z \in P$ *проходят две прямые* $\lambda_k(z)(k = 1, 2)$, *обладающие следующими свойствами:*

1) угол $[\lambda_k\widehat{(z), \lambda_k}(z')] < \sigma$ $(k = 1, 2)$ *для любых точек* $z, z' \in P'$;

2) $100\sigma < [\lambda_1\widehat{(z), \lambda_2}(z)] < \pi - 100\sigma$ *для каждой точки* $z \in P'$;

3) расстояние $\rho(P', \partial D) > \delta$;

4) если $P_1' = f(P')$, *то каждая точка* $w = f(z) \in P_1'$ *является совместной вершиной двух пар вертикальных углов* $\Omega_k(w)$ $(k = 1, 2)$ *раствора* 4σ *каждая, полученные параллельным переносом фиксированых углов* Λ_k *с общей вершиной, и обладающие тем свойством, что образы* $\Omega_k(w)$ *двух отрезков* $\lambda_k(z)$ $k = 1, 2$, *имеющих длину* δ *при отображении* $w = f(z)$, *расположены внутри соответствующих вертикальных углов* $\Omega_k(w)$; *при этом* $100\sigma < [\widehat{\Omega_1, \Omega_2}] < \pi - 100\sigma$, *если понимать* $[\widehat{\Omega_1, \Omega_2}]$ *как угол между биссектрисами углов* Ω_1, Ω_2.

Доказательство теоремы. Прежде всего докажем нульмерность отображения f, то есть что прообраз $f^{-1}(w)$ произвольной точки w имеет размерность нуль.

Пусть не так; тогда найдется невырожденный континуум $K \subset D$, для которого $f(K) = w_0$, где w_0 - некоторая точка плоскости $\mathbb{C}_w$. По лемме находим открытую порцию K_1, для которой выполнены все ее свойства; можем считать диаметр K_1 меньшим чем $\delta > 0$.

При доказательстве леммы в § 1 гл. X на K_1 существовало плотное множество точек, в каждой из которых имело место первоначальное свойство T. Поэтому возьмем произвольные и различные точки $z', z'' \in K_1$; это означает, в частности, что ни одна из них не принадлежит прямым l_1, l_2 для другой точки. Это значит, что должны пересекаться "разноименные"прямые $l_1(z')$ и $l_2(z'')$, а также $l_2(z'')$ и $l_1(z')$; но так как $f(z') = f(z'')$, то, в силу леммы, в образе они пересекаться не могут. Это противоречие доказывает нульмерность f.

Докажем теперь открытость отображения f.

Опять-таки, предполагая противное, найдем такой круг $Q(z_0, r)$, для которого образ $w_0 = f(z_0)$ центра является граничной для образа $f(\overline{Q})$ замыкания Q. Взяв, если необходимо, меньший круг в Q, можем считать что граница образа $f(\overline{Q})$ содержит целый континуум k, точкам которого соответствуют внутренние точки круга Q.

Рассмотрим граничную точку $w' \in k$, обладающую тем свойством, что ее можно коснуться некоторым кругом q, все внутренние точки которого являются внешними для компакта $f(\overline{Q})$; легко показать, что такие "хорошо видимые"извне точки образуют плотное множество на граничном континууме компакта. Но в каждой внутренней точке z' круга Q, для которой $f(z') = w'$ имеет место свойство T и образ начального отрезка хотя бы одной из прямых $l_1(z')$, $l_2(z'')$ должен был бы войти внутрь круга q, чего нет по построению.

Этим теорема доказана полностью.

Нам потребуется один достаточный критерий, обеспечивающий выполнение свойства T, который известен для случая полной диференцируемости отображения $f = u + iv$, но который легко доказать и в нашем случае.

Именно имеет место следующая теорема.

Теорема 8. *Если отображение $f : D \to \mathbb{C}$ обладает частными производными $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$ в некоторой точке $z_0 \in D$ и (формальный якобиан)*

$$J(z_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то в этой точке имеет место свойство T.

Другими словами, образы координатных линий $u, v = const$, пересекающихся в точке z_0, обладают различными касательными в точке $w_0 = f(z_0)$, и с нужным дополнительным условием относительно начальных отрезков этих линий.

Конечно, и в этом случае, даже при возможно неполной дифференцируемости u, v, касательные к образам линий $u, v = const$ параллельны векторам $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, а последние, по условию теоремы, линейно независимы.

И в наших, хотя и в более ограничительных условиях, можна ввести формальные производные $f_z, f_{\overline{z}}$:

$$f_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$
$$f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

а якобиан $J(f)$ отображения f представить в виде

$$J(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2.$$

И здесь, конечно, для аналитической функции f имеем $f_{\overline{z}} = 0$, а для функции, сопряженной аналитической: $f_z = 0$.

Мы говорим о формальных производных просто потому, что в наших условиях существования только частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, уже нельзя, например, считать что

$$f_{\overline{z}} = \lim_{d(\Gamma)\to 0} \frac{1}{S} \int\limits_{\Gamma} f(z)dz,$$

которая справедлива для f, обладающей полным дифференциалом; здесь Γ - замкнутый контур, содержащий данную точку, $d(\Gamma)$ - его диаметр, а S - площадь области с границей Γ.

Доказательство основной теоремы.

Итак, мы имеем условия: 1) в замкнутом круге $\overline{Q}$ функция f удовлетворяет условию Липшица; 2) имеется всюду плотное в Q открытое множество O, в каждой компоненте которого либо f, либо ей сопряженная $\overline{f}$ является аналитической. При нашем дополнительном условии существовании всюду в Q частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ требуется доказать, что либо f, либо $\overline{f}$ является аналитической во всем круге Q.

Возьмем вместо f функцию $g(z) = f(z) + \varphi(z)$, где $\varphi(z) = e^{Az}$ выберем произвольные две точки z_1, z_2 из компонент аналитичности f, рассмотрим отображение осуществляемое функцией

$$h(z) = \frac{g(z) - g(z_1)}{z - z_1} - \frac{g(z) - g(z_2)}{z - z_2} = \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - \frac{f(z) - f(z_2)}{z - z_2} +$$

$$+ \frac{\varphi(z) - \varphi(z_1)}{z - z_1} - \frac{\varphi(z) - \varphi(z_2)}{z - z_2}$$

В качестве значений последних дробей в точках z_1, z_2 мы примем, конечно, значения производных числителя.

Мы покажем сначала, что при определенном выборе положительного A это отображение оказывается внутренним.

Для этого воспользуемся леммой и подсчитаем якобиан $J(h)$ в точках из Q.

В точках аналитичности f сама функция h будет аналитической и при дальнейшем выборе A производная $h'(z) \neq 0$ в Q, а значит $J(h) > 0$.

В точках "антианалитичности"f, то есть там, где аналитической является сопряженная $\overline{f}$, имеем:

$$h_z = -\frac{f(z)-f(z_1)}{(z-z_1)^2} + \frac{f(z)-f(z_2)}{(z-z_2)^2} + \frac{\varphi'\cdot(z-z_1)-[\varphi(z)-\varphi(z_1)]}{(z-z_1)^2} - \\ -\frac{\varphi'\cdot(z-z_2)-[\varphi(z)-\varphi(z_2)]}{(z-z_2)^2}$$

$$h_{\overline{z}} = \frac{f_{\overline{z}}}{z-z_1} - \frac{f_{\overline{z}}}{z-z_2}$$

Далее:

$$-\frac{f(z)-f(z_1)}{(z-z_1)^2} + \frac{f(z)-f(z_2)}{(z-z_2)^2} = [f(z)-f(z_1)]\frac{(z_1-z_2)(z_1+z_2-2z)}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2} + \\ \frac{f(z_1)-f(z_2)}{(z-z_2)^2} = \frac{z_1-z_2}{(z-z_1)(z-z_2)^2}\left[\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}(z_1+z_2-2z) - \right. \\ \left. + \frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}(z-z_1)\right];$$

$$\frac{\varphi'(z-z_1)-[\varphi(z)-\varphi(z_1)]}{(z-z_1)^2} - \frac{\varphi'\cdot(z-z_2)-[\varphi(z)-\varphi(z_2)]}{(z-z_2)^2} = \\ = \varphi'\left(\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2}\right) - \frac{\varphi(z)-\varphi(z_1)}{(z-z_1)^2} + \frac{\varphi(z)-\varphi(z_2)}{(z-z_2)^2} =$$

$$= \varphi'\frac{z_1-z_2}{(z-z_1)(z-z_2)} + \frac{z_1-z_2}{(z-z_1)(z-z_2)^2}\left[\frac{\varphi(z)-\varphi(z_1)}{z-z_1}(z_1+z_2-2z) - \right. \\ \left. + \frac{\varphi(z_1)-\varphi(z_2)}{z_1-z_2}(z-z_1)\right]$$

В результате получим:

$$h_z = \frac{z_1-z_2}{(z-z_1)(z-z_2)^2}\left[\varphi'\cdot(z-z_2) + \frac{1}{2}\left[\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} + \right.\right. \\ \left.\left. \frac{\varphi(z)-\varphi(z_1)}{z-z_1}\right](\frac{z_1+z_2}{2} - z) - \frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2} - \frac{\varphi(z_1)-\varphi(z_2)}{z_1-z_2}\right]$$

$$h_{\overline{z}} = f_{\overline{z}}\cdot\frac{z_1-z_2}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{z_1-z_2}{(z-z_1)(z-z_2)^2}\cdot f_{\overline{z}}(z-z_2)$$

Вспомним теперь, что f удовлетворяет условию Липшица

$$|f(z)-f(z')| \leqslant L|z-z'|,$$

$\varphi(z) = e^{Az}$, $|\varphi'(z)| = Ae^{Ax}$ (можем считать, что в круге Q $\operatorname{Re} z = x > 0$), $\frac{\varphi(z)-\varphi(z')}{z-z'_\xi} \approx Ae^{Ax'_\xi}$, $|f_{\overline{z}}| \leqslant L$, легко, взяв достаточно малый радиус круга Q и достаточно большое $A > 0$, достичь того, чтобы было $|h_z|^2 - |h_{\overline{z}}|^2 > 0$.

Наконец, в точках множества P получим:

$$h_z = \frac{f_z(z-z_1) - [f(z) - f(z_1)]}{(z-z_1)^2} - \frac{f_z(z-z_2) - [f(z) - f(z_2)]}{(z-z_2)^2} + ...$$

$$h_{\overline{z}} = \frac{f_{\overline{z}}}{z-z_1} - \frac{f_{\overline{z}}}{z-z_2}$$

По сравнению с предыдущим случаем здесь возникают дополнительные слагаемые с f_z, влияние которых на значение $|h_z|$ можно "заглушить"увеличением числа A.

Итак, найдется такое A, что отображение h оказывается внутренним в области Q; напомним, что оно непрерывно в замкнутом круге Q.

Возьмем произвольную точку $z_0 \in P$ внутри Q и две произвольные последовательности $\{z'_n\}, \{z''_n\}$ точек аналитичности f, сходящихся к z_0. По доказаному выше каждое отображение h_n из последовательности $\{h_n(z)\}$:

$$h_n(z) = \frac{g(z) - g(z'_n)}{z - z'_n} - \frac{g(z) - g(z''_n)}{z - z''_n}$$

является внутренним. Это означает, в частности, что максимум модуля $|h_n|$ достигается на границе ∂Q круга Q. Но, в силу аналитичности $\varphi = (e^{Az})^3$ выражение

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(z'_n)}{z - z'_n} - \frac{\varphi(z) - \varphi(z''_n)}{z - z''_n}$$

стремится к нулю во всем замкнутом круге, а модуль $|h_n|$ на границе ∂Q, очевидно, также стремится к нулю. А это означает, в частности, стремление $h_n(z_0)$ к нулю и в точке z_0.

Это же, наконец, означает существование производной $g'(z_0)$, а значит, и $f'(z_0)$ вдоль точек аналитичности функции f.

Аналогично, рассматривая сопряжение $\overline{f}$, придем к выводу о существовании предела

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{\overline{z - z_0}}$$

в точках антианалитичности f.

Теперь легко видеть, что все это возможно лишь в случае, когда оба этих пределах равны нулю.

Для этого возьмем произвольную последовательность $\{z_n\}$ точек из P, сходящихся к z_0: $\lim z_n = z_0$. В окрестности каждой точки z_n возьмем точку z'_n аналитичности f и точку z''_n антианалитичности, причем так, что бы $\frac{|z''_n - z'_n|}{|z_n - z_0|} \to 0$. Так, как f - липшицева, то

$$\lim \frac{f(z'_n) - f(z_0)}{z'_n - z_0} = \lim \frac{f(z''_n) - f(z_0)}{z''_n - z_0} = \lim \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}. \tag{15}$$

Пусть теперь этот предел не равен нулю. Так как по точкам аналитичности существует предел $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, то из (15) следует, что z_n, как и z'_n, z''_n приближаются к z_0 только по касательной к P, паралельной действительной оси. Пусть выше этой касательной (вблизи z_0) f аналитична и $\Delta f = ke^{i\alpha}\Delta z + o(\Delta z)$, а ниже $\Delta f = ke^{i\beta}\overline{\Delta z} + o(\Delta z)$: это из (15) следует, что модули соотведствующих "производных"одинаковы.

Тогда, с одной стороны, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ike^{i\alpha}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -ike^{i\beta},$$

т. е. $\beta = \pi + \alpha$. С другой, учитывая последовалельности точек z'_n, z''_n и (15), имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ke^{i\alpha}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -ke^{i\alpha}$$

что может быть только при $k = 0$.

Итак, нами доказано, что если множество $P = D \backslash O$ непусто, то на нем функция f моногенна и производная ее f' всюду на P равна нулю.

Последним решающим нашим шагом будет теперь доказательство непрерывности частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ на множестве P - относительно области D!

Итак, пусть $z_0 \in P$ снова произвольная точка и $\varepsilon > 0$ - произвольное число; найдется такое $\delta > 0$, что в круге $U_\delta(z_0)$ имеем равенство

$$|f(z) - f(z_0)| = \varepsilon(z)(z - z_0), |\varepsilon(z)| < \varepsilon$$

и для произвольных $z', z'' \in U_\delta \bigcap P$:

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon|z' - z''|.$$

Обозначим $\delta_0 = \frac{\varepsilon\delta}{L}$ (L - константа Липшица для f); очевидно, можно предположить, что $\delta_0 < \delta$. Докажем, что в $U_{\delta_0} \backslash P$ имеют место равенства (для компонент соотведствующего рода): $|f'(z)| \leq 3\varepsilon, |\overline{f}'(z)| \leq 3\varepsilon$.

Предположим, что в некоторой точке z_1 из компоненты $g \subset U \setminus P$ аналитичности f имеем: $f'(z_1) = a, |a| > 3\varepsilon$

Продолжим функцию $f|_{\overline{g}}$ с компоненты g на дополнение $U\backslash\overline{g}$ до липшицевой функции с константой ε: относительная граница ∂g в U принадлежит P и фактически с этой границы, как известно [6], можем продолжить f до нужной липшицевой функции даже на всю плоскость; но нам она потребуется только в $U\backslash g$. Эту новую функцию обозначим через $\tilde{f}$.

Рассмотрим теперь функцию

$$F(z) = \tilde{f}(z) - \tilde{f}(z_0) - a(z - z_0).$$

В точках множества P функция F моногенна и $F' = a$, а в точках, внешних к $\overline{g}$, все производные числа по модулю больше 2ε.

В компоненте $g \subset U\backslash P$ она является аналитической и отличной от константы: иначе функция $f|_g$ была бы линейной и на границе $\partial g \bigcap P$ производная не равнялась нулю; то есть она осуществляет невырожденное внутреннее отображение области g.

В дополнении $U\backslash\overline{g}$ она является даже гомеоморфизмом: для произвольных z', z'' из $U\backslash g$ имеем:

$$|F(z') - F(z'')| \geq |a||z' - z''| - |\tilde{f}(z') - \tilde{f}(z'')| \geq (|a| - \varepsilon)|z' - z''|.$$

Рассмотрим произвольную точку $\tilde{z} \in U\backslash\overline{g}$ дифференциируемости $\tilde{f}$: что множество производных чисел ее, то есть предельных значений отношения $\frac{\tilde{f}(z)-\tilde{f}(\tilde{z})}{z-\tilde{z}}$, есть окружность $\mathfrak{M}_z$ с центром $\tilde{f}_z$ и радиусом $|\tilde{f}_{\bar{z}}|$ или точка. По условию это множество лежит в круге радиуса $< \varepsilon$; следовательно, для функции F эта окружность (диаметра $< 2\varepsilon$) отстоит от начала координат более чем на 2ε и, значит, в точке $\tilde{z}$ имеем:

$$J(F) = |F_z|^2 |F_{\overline{z}}|^2 = |\tilde{f}_z - a|^2 - |\tilde{f}_{\overline{z}}|^2 > 3\varepsilon^2$$

Это означает, что и весь гомеоморфизм $F|_{U\backslash\overline{g}}$ — прямой, то есть сохраняет локальную ориентацию замкнутых кривых.

Наконец, мы уже знаем, что $F|_P$ - гомеоморфизм. По известной теореме о продолжении мы заключаем, что F на всей окрестности $U_\delta \supset U_{\delta_0}$ является (прямым) внутренним отображением.

Имеем: $F(z_0) = 0$ и образ окружности $K_0 : |z - z_0| = \delta$ при отображении $w = a(z - z_0)$ есть окружность $|w| = |a|\delta > 3\varepsilon\delta$.

Так как $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon|z - z_0| = \varepsilon\delta$, то диаметр образа K_0 при отображении $w = f(z) - f(z_0)$ будет меньше $2\varepsilon\delta$. Отсюда следует, что все точки круга $|w| \leq \varepsilon\delta$ имеют порядок γ относительно образа

$F(K_0)$, равный $+1$. Из принципа аргумента для внутреннего отображения следует, что все точки этого круга однократны в U_δ и прообраз его в U_δ есть область g_0 - очевидно, содержащая точку z_0, - в которой F есть гомеоморфизм.

Оценим радиус круга $|z - z_0| \leq r$, принадлежащего g_0; если $|w - w_0| = \rho$, то из условия Липшица получим

$$|w - w_0| \leq L|z - z_0|,$$

то есть для соотведствующих точек z и z_0 имеем $|z - z_0| \geq \frac{\rho}{L}$. Отсюда следует, что область g_0 содержит по крайней мере круг $|z - z_0| \geq \frac{\varepsilon\delta}{L} = \delta_0$, то есть U_{δ_0}.

Итак, $F|_{U_{\delta_0}}$ - гомеоморфизм. С другой стороны, в точке $z_1 \in U_{\delta_0} \setminus P$ имеем

$$F'(z_1) = f'(z_1) - a = 0.$$

Но в такой точке аналитическая функция не может быть даже локальным гомеоморфизмом. Полученное противоречие доказывает нужное неравенство $|f'(z)| < 3\varepsilon$ для точек аналитичности функции f. Но взятием сопряжения $\overline{f}$ функции f мы и для компонент антианалитичности ее точно так же докажем, что $|\overline{f}(z)| < 3\varepsilon$.

Все это и доказывает непрерывность производных $f'(z), \overline{f}'(z)$ в точках P, на котором они обращаются в нуль.

Но тогда, если $P \neq \emptyset$, то в каждой компоненте из $D \setminus P$ эти производные равны нулю в силу известной теоремы единственности: если в области D функция F аналитична и на открытой порции границы ∂D она непрерывна и обращается в нуль, то она тождественно равна нулю во всей области D.

Возвращаясь к нашим условиям, мы убеждаемся теперь, что наша функция f есть константа.

Итак, мы показали, что в условиях нашей теоремы в области обязательно найдутся точки, где либо f либо $\overline{f}$ оказываются аналитическими и если имеются точки обоих родов, то эта функция, "вырождается"в константу.

А это ведь и есть другая формулировка нашей теоремы.

7. Моногенность на множестве. Обобщение теоремы Радо

Функция f, заданная на некотором плоском множестве E, называется моногенной в точке $z_0 \in E$ по множеству E — или относительно E — если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z)}{\Delta z} = f'_E(z_0), \quad z_0 + \Delta z \in E,$$

который называется производной функции f по множеству E.

Скажем, что f обладает в области D неполной моногенностью, если

$$D = \bigcup_k E_k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

причем $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и f моногенна на каждом E_k (относительно E_k).

Помпейю высказал без доказательства следующую теорему.

Теорема 9. *Если непрерывная функция f обладает неполной моногенностью в области D, то она является аналитической всюду в D.*

Для доказательства этой теоремы приведем некоторые леммы.

Лемма 16. Пусть непрерывная в области D функция f имеет полный дифференциал в некоторой точке $z \in D$ относительно множества E, контингенция которого в этой точке содержит по крайней мере два луча, расположенных на различных прямых. Если функция f имеет обычный полный дифференциал в этой же точке, то он совпадает с относительным дифференциалом.

Доказательство. По условию леммы имеем одновременно

$$\Delta f = \tilde{f}_z \Delta z + \tilde{f}_{\bar{z}} \Delta \bar{z} + o(\Delta z),$$

где $\tilde{f}_z$, $\tilde{f}_{\bar{z}}$ — коэффициенты относительного дифференциала ($z + \Delta z \in E$) и

$$\Delta f = f_z \Delta z + f_{\bar{z}} \Delta \bar{z} + o(\Delta z)$$

для любых $z + \Delta z \in D$.

Выберем две последовательности значений $\Delta z = |\Delta z| e^{i\alpha}$ так, чтобы точки $z + \Delta z \in E$ сходились к z по двум путям с двумя полукасательными $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ в точке z. Из написанных равенств получим одновременно

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} \to \tilde{f}_z + \tilde{f}_{\bar{z}} e^{-2i\alpha}, \quad \alpha = \alpha_1, \alpha_2,$$

и

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} \to f_z + f_{\bar{z}} e^{-2i\alpha}, \quad \alpha = \alpha_1, \alpha_2.$$

Так как $\alpha_1 \neq \alpha_2 \pmod \pi$, то отсюда легко следует, что $\tilde{f}_z = f_z$ и $\tilde{f}_{\bar{z}} = f_{\bar{z}}$. Лемма 5 доказана.

В силу теоремы о точках плотности произвольное плоское множество E в каждой своей точке, исключая множество плоской меры нуль, имеет контингенцию — полную плоскость; поэтому из леммы 12 следует.

Л е м м а 17. *Если функция f дифференцируема относительно множества $E \subset D$ в каждой его точке и обладает почти всюду на E обычным полным дифференциалом, то он совпадает с относительным полным дифференциалом почти всюду на E.*

Заметим еще, что множество E может оказаться неизмеримым, но термин «почти всюду», очевидно, имеет смысл для произвольных множеств.

Л е м м а 18. *Пусть непрерывная в области D функция f является аналитической вне некоторого совершенного и нигде не плотного множества $P \subset D$, причем*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq n|z_2 - z_1|$$

для любых $z_1, z_2 \in P$ (n — постоянная). Если функция f обладает неполной моногенностью в D, то f является аналитической функцией всюду внутри области D.

Из теоремы 4 об условии Липшица § 2 гл. XI следует, что в нашем случае функция f липшицева в каждом замкнутом круге из D. Поэтому f почти всюду на P (и, конечно, в D) имеем (обычный) полный дифференциал

$$\Delta f = f_z \Delta z + f_{\bar{z}} \Delta \bar{z} + o(\Delta z)$$

Из моногенности f в точке $z \in E_k$ (относительно E_k) следует, что

$$\Delta f = f'_{E_k}(z) \Delta z + o(\Delta z).$$

Так как совокупность всех E_k — не более чем счетна и $\bigcup\limits_k E_k = D$, то в силу леммы 17 относительный полный дифференциал функции f совпадает с обычным дифференциалом почти всюду в D; в частности, почти для всех $z \in P$ имеем:

$$\Delta f = f'(z) \Delta z + o(\Delta z).$$

где $f'(z) = f'_{E_k}(z)$ для $z \in E_k \cap P$ ($k = 1, 2, \ldots$). Это означает, что f моногенна почти всюду в D. условие Липшица завершает доказательство леммы 18.

Теперь мы можем доказать теорему 9.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 9.

1. Покажем сначала, что в условиях теоремы существует всюду плотное открытое множество O точек аналитичности функции f.

Положим

$$E_k^{(n)} = E_k \left\{ \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| \le n, \quad |z' - z| < \frac{1}{n}; \quad z' \in E_k \right\}.$$

Так как, очевидно, $E_k = \bigcup\limits_k E_k^{(n)}$, то

$$D = \bigcup_{k,n} E_k^{(n)} \quad (k, n = 1, 2, \ldots).$$

Возьмем произвольную область $\bar{d} \subset D$; вводя обозначения $d_k^{(n)} = d \cap E_k^{(n)}$ получим

$$d = \bigcup_{k,n} d_k^{(n)}.$$

Так как d — второй категории (в себе и на плоскости), то найдется круг d', $\overline{d'} \subset d$, на котором одно из множеств $d_k^{(n)}$ окажется всюду плотным; будем считать, что диаметр d' меньше $\frac{1}{n}$.

Из непрерывности f в $\overline{d'}$ легко следует, что для произвольный точек $z, z' \in \overline{d'}$ выполняется условие

$$\left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| \le n.$$

В силу леммы 18 функция f аналитична внутри $d' \subset d$. Из произвольности области $d \subset D$ и следует доказываемое.

2. Предположим теперь, что теорема неверна; тогда совершенное множество P всех точек D, где f не является аналитической, не пусто и, согласно доказанному, нигде не плотно в D. Вводя обозначение $P_k^{(n)} = P \cap E_k^{(n)}$, имеем

$$P = \bigcup_{k,n} P_k^{(n)}.$$

Обычным путем находим порцию $P' = P \cap D'$ ($\overline{D}' \subset Q$ — круг), на которой одно из множеств $P_k^{(n)}$ всюду плотно; взяв диаметр D' меньшим $\frac{1}{n}$, как и выше, получим:

$$|f(z') - f(z)| \le n|z' - z|$$

для любых $z, z' \in P$.

В силу леммы 18 функция f аналитична всюду в $D' \supset P'$, что противоречит определению множества P. Теорема 7 доказана.

Введем следующее понятие.

Определение. Функция f в области $D \subset \mathbb{C}^n$ называется кусочно-голоморфной, если:

1) $D = \bigcup_k E_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$;

2) $f\ |_{E_k} = f_k\ |_{E_k}$, где f_k — голоморфная функция в окрестности множества E_k.

Очевидным следствием доказанной теоремы 7 является следующее утверждение.

Теорема 10. *Непрерывная функция f, кусочно-голоморфная в области $D \subset \mathbb{C}^n$, является голоморфной в этой области.*

Это обобщает известную теорему Радо ([5, 6]): если непрерывная функция f голоморфна в каждой точке области $D \subset \mathbb{C}^n$, где $f \neq 0$, то она голоморфна всюду в D.

8. Другие критерии голоморфности

Здесь мы докажем следующую теорему, которая охватывает много известных критериев аналитичности:

Теорема 11. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывна для каждой точки области D, исключая не более чем счетное их множество, множество моногенности $\mathfrak{M}_z(f)$ есть нигде не плотный континуум, не являющийся полной окружностью. Тогда функция $f(z)$ аналитична в области D.*

Из этой теоремы сразу следует, например, аналитичность конформного отображения области: ведь, как мы уже знаем, в этом случае $\mathfrak{M}_z$ является подмножеством прямолинейного луча, выходящего из начала координат. Далее, аналитичность f следует из существования предела в каждой точке z не самого разностного отношения $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ (при $\Delta z \to 0$), а только его вещественной части $\mathrm{Re}\frac{\Delta f}{\Delta z}$: в этом случае $\mathfrak{M}_z$ принадлежит "вертикальной"прямой $\mathrm{Re}\zeta = \mathrm{const}$ плоскости Z и т. д.

Перед доказательством нашей теоремы приведем пару простеньких лемм.

Лемма 19. *Пусть для непрерывного отображения $f : D \to \mathbb{C}$ выполняются следующие условия:*

1) Отображение f изолированно в D

и

2) На плотном в D множестве моногенно и в точках этого множества $f' \neq 0$.

Тогда f является положительным внутренним отображением области D.

Доказательство. Из изолированности f следует, что существует плотное в D открытое множество O, в каждой компоненте которого f является внутренним отображением. Так как в точках, где $f' \neq 0$, локальная степень $\gamma(z) = 1$, то ограничение f на каждую такую компоненту является положительным отображением. Пусть теперь замкнутое $P = D \setminus 0 \neq \emptyset$, причем ни в какой окрестности любой точки из P отображение f не является внутренним; по условию, P нигде не плотно в D. Из изолированности f четко следует, что найдется порция $P' = P \cap d$ ($d \subset D$ — круг), в которой f является гомеоморфизмом; но тогда по одной из теорем о продолжении f было бы внутренним отображением всюду в d; но это противоречит определению множества P. Лемма доказана.

Определение. Отображение $f : D \to \mathbb{C}$ назовем отталкивающим в точке $z \in D$, если существует постоянная $\delta > 0$ такая что в некоторой окрестности $U(z)$ имеем:

$$|f(z') - f(z)| \geq \delta |z' - z|$$

для любой точки $z' \in U(z)$.

Очевидно, что из леммы 19 следует такое утверждение:

Лемма 20. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — непрерывное отображение. Если оно отталкивающее и на плотном в D множестве моногенно, то f является положительным внутренним отображением.*

Доказательство. теоремы 11.

I. Пусть в точке $z \in D$ множество моногенности $\mathfrak{M}_z(f)$ нигде не плотно. Возможны два случая:

1) $\mathfrak{M}_z(f)$ разбивает плоскость $\mathbb{C}_\zeta$,

2) $\mathfrak{M}_z(f)$ не разбивает этой плоскости.

В первом случае можно выбрать две рациональные точки r, r', отличные от начала координат и принадлежащие различным компонентам дополнения $\mathbb{C}_\zeta \setminus \mathfrak{M}_z$. Во втором случае r, r' выбираем произвольно, но при условии, что $r \neq r'$ и $r, r' \neq 0$.

Выпишем теперь все рациональные точки плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, отличные от нуля, в определенную последовательность:

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \tag{16}$$

Определим множества $D_n \subset D$ ($n = 1, 2, \ldots$): $z \in D_n$, если выбранная для нее пара рациональных точек r_n, r'_n из (16) удовлетворяет следующим условиям:

1) $|r_n - r'_n| \geq 4/n$, и круги $|\zeta - r_n| \leq 1/n$ и $|\zeta - r'_n| \leq 1/n$ не содержат начала координат $\zeta = 0$;

2)

$$\left|\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}-r_n\right|\geq 1/n,\quad \left|\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}-r'_n\right|\geq 1/n \tag{17}$$

$\forall z' : |z'-z|<1/n$.

Мы знаем, что все D_n замкнуты и

$$D=\left(\bigcup_n D_n\right)\bigcup H, \tag{18}$$

где H не более чем счетное множество.

Возьмем произвольную подобласть $d'\subset D$; тогда из (17) следует, что

$$d'=\left(\bigcup d'\right)\bigcup_n h_n$$

где $d'_n=D_n\cap d'$, $h=H\cap d'$.

Так как d' — второй категории в себе, то найдется круг $d\subset d'$, в котором одно из замкнутых множеств d'_n плотно, т. е. $d'_n\supset d$; можем предположить радиус круга d меньшим чем $1/n$. В этом случае обе функции $f(z)-r_nz$ и $f(z)-r'_nz$ будут однолистными в d и отталкивающими в каждой точке из d с одной и той же константой $\delta=1/n$, что следует из (17).

Рассмотрим отображение $w=f_1(z)=f(z)-r_nz$; соответствующий образ $d_1=f(d)$ в w-плоскости есть область, в которой определена обратная функция $g_1(w)$. Так как f_1 — отталкивающее отображение с постоянной $1/n$, то g_1 — липшицева функция с постоянной n:

$$|g_1(w')-g_1(w)|\leq n|w'-w|\quad \forall w',w\in d_1.$$

По условию теоремы $\mathfrak{M}_z(f)$ является нигде не плотным континуумом. По построению d'_n существуют две рациональные точки r_n, r'_n такие, что $1/n$ — окрестности этих точек не содержат точек из $\mathfrak{M}_z(f)$ на плоскости ζ. По построению функции f_1 множество моногенности $\mathfrak{M}_z(f_1)$ на плоскости ζ_1 не содержит точек кругов: $|\zeta_1|<1/n$ и $|\zeta_1-r'_n|<1/n$, где $\tilde{r}'_n=r'_n-r_n$. Из определения D_n следует, что множества моногенности $\mathfrak{M}_z(g_1)$ в плоскости ω_1 не проходят через точки круга с центром $1/\tilde{r}'_n$ радиуса $1/n|\tilde{r}'_n|^2$.

Пусть $E\subset d_1$ — множество точек дифференцируемооти g_1 : $\mathrm{Mes}E=\mathrm{Mes}d_1$. Имеем: $E=E_0\cup E_1$, где E_0 — множество точек моногенности g_1, а E_1 — остальные точки. Покажем, что $\mathrm{Mes}E_1=0$. Если $\mathrm{Mes}E_1>0$, то найдется точка дифференцируемости $w\in E_1$, для которой, следовательно, множество моногенности $\mathfrak{M}_w(g_1)$ есть окружность. Если бы эта окружность не проходила через начало координат $\omega_1 = 0$, то и для обратной функции f_1, а потому и для f, соответствующее множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ также было бы полной окружностью, но это может иметь место лишь на счетном множестве точек $z \in d$. Итак, можем считать, что для всех точек множества E_1, в которых g_1 дифференцируема (т. е. почти всюду в E_1), соответствующие множества моногенности являются полными окружностями, проходящими через начало координат $\omega_1 = 0$; это же означает, что в этих точках, якобиан отображения g_1 равен нулю: $J(g_1) = 0$.

Далее, множество тех точек из E_0, где $g_1'(w) \neq 0$ плотно в d_1 и каждая порция его — положительной меры. В самом деле, если бы в некоторой подобласти $d_1' \subset d_1$ мера таких точек была равна нулю, то для липшицевого отображения g_1 якобиан $J(g_1)$ равнялся бы нулю почти всюду в d_1 и, следовательно, образ $g_1(d_1')$ имел бы меру нуль в z-плоскости, что противоречит гомеоморфизму g_1.

Мы предполагали, что $\mathrm{Mes} E_1 > 0$; снова возьмем точку $w \in E_1$ дифференцируемости g_1, в которой $\mathfrak{M}_w(g_1)$ есть окружность, проходящая через $\omega_1 = 0$. Так как область $d \subset D_n$, то соответствующее множество $\mathfrak{M}_z(f_1)$ прямой функции f_1 является полной прямой ζ-плоскости. Поэтому точки r_n, r_n' вместе с кругами $|\zeta - r_n| \leq 1/n$ и $|\zeta_1 - r_n'| \leq 1/n$ лежат по разные стороны от этой прямой. Отсюда следует, что все окружности $\mathfrak{M}_w(g_1)$, $w \in E_1$, содержат внутри круг

$$|\omega_1 - 1/\tilde{r}_n'| \leq 1/n|\tilde{r}_n'|^2.$$

Это же означает, что отображение $g_2(w) = g_1(w) - w/\tilde{r}_n'$ является отталкивающим в d_1 и моногенным на плотном множестве. По лемме 19 отображение g_2 должно быть положительным внутренним отображением. С другой стороны, по нашему построению, все $\mathfrak{M}_w(g_2)$, $w \in E_1$, зацепляют начало координат и, следовательно, в соответствующих точках якобиан $J(g_2) < 0$, что противоречиво.

Итак, нами доказано, что липшицева функция g_1 в области d_1 моногенна почти всюду; следовательно, она в d_1 аналитична вместе с f_1 в d, а потому и f.

Тем самым в условиях теоремы доказано существование плотного множества $O \subset D$ точек аналитичности функции f.

Докажем теперь, что $O = D$. Предположим противное; тогда $P = D \setminus O = \emptyset$ является совершенным, и по предыдущему, нигде не плотным в D.

Введем обозначения: $P_n = P \cap D_n$, $h' = P \cap H$; из (18) следует, что

$$P = \left(\bigcup_n P_n \right) \bigcup h' :$$

P_n — замкнуты в D и h' — не более чем счетно.

Так как P — второй категории в себе, то найдется порция $p = P \cap d$ ($\bar{d} \subset D$ — круг), которая содержится в одном из множеств P_n; мы можем считать диаметр круга d меньшим чем $1/n$. Тогда снова обе функции $f(z) - r_n z$, $f(z) - r'_n z$ являются гомеоморфизмами на p. Рассмотрим отображение $w = f_1(z) = f(z) - r_n z$. Из теоремы о продолжении внутренних отображений следует, что f_1 является внутренним отображением круга d; взяв, если нужно, меньший круг, можем считать, что $f_1 \mid_d$ есть гомеоморфизм.

Пусть $d_1 = f_1(d)$, $p_1 = f_1(p)$; тогда обратная функция $g_1(w)$, $w \in d_1$, голоморфна в дополнении $d_1 \setminus p_1$ и липшицева на p_1; в силу теоремы об условии Липшица (§ 2 гл. XI) можем считать, что g_1 — липшицева во всей области d_1.

Теперь приложимы все предыдущие рассмотрения, из которых снова следует, что множество точек дифференцируемости на p, где g_1 не моногенна, имеет меру нуль, а отсюда следует голоморфность g_1 всюду в d_1. Поэтому и f_1 (вместе с f) голоморфна в $d \supset p \neq \emptyset$; это же противоречит определению особого множества $P \supset p$. Теорема 11 доказана.

Скажем, что $f : D \to \mathbb{C}$ обладает свойством K в точке $z \in D$, если для некоторого $\gamma \in [0, 2\pi)$ существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Re} \left[\frac{\Delta f}{\Delta z} e^{i\gamma} \right].$$

Отсюда следует, что множество моногенности $\mathfrak{M}_z(f)$ в такой точке принадлежит некоторой прямой. Поэтому из нашей теоремы имеем

Следствие. Если отображение $f : D \to \mathbb{C}$ обладает свойством K в каждой точке $z \in D$, исключая не более чем счетное их множество, то f голоморфно всюду в D.

Глава 14

Устранимые особенности аналитических функций

1. Особые множества меры нуль

На протяжении всей этой главы общими исходными данными будут: область $D \subset \mathbb{C}$, непрерывная в D функция f, голоморфная в $D \setminus P$, где P — нигде не плотное совершенное множество точек. Постоянным будет вопрос: при каких условиях на f и P функция f оказывается аналитической всюду в области D? В этом и заключается знаменитая проблема "стираемости" возможных особенностей аналитической функции, иногда, впрочем, в этой проблеме не предполагается и непрерывность f вблизи P. Мы будем рассматривать проблему в сформулированном виде.

Конечно, возвращаясь, например, к гл. XIII, мы можем сказать, что выполнение всюду на P одного из условий K', K'', K''' стирает особенность P (которое может быть и положительной и нулевой меры). Но дело в том, что указанные условия вообще необходимы, когда мы рассматриваем произвольные непрерывные отображения. Когда же f уже обладает плотным множеством точек аналитичности, условия стираемости оказываются часто качественно другими: теоремы Пенлеве или теорема о стираемости спрямляемой дуги принадлежат к такого рода результатам.

В этой главе мы приведем некоторые нетривиальные критерии устранимости ("стираемости") особых множеств аналитических функций. Рассмотрим различные случаи "стираемости" при условии, что плоская мера множества P равна нулю: $\mathrm{Mes}P = 0$. Самый тривиальный критерий стираемости в этом случае — условие Липшица для f в области D: это, например, легко следует из леммы той же гл. XIII. Тем не менее методом доказательства наших дальнейших и уже не столь очевидных критериев явится именно сведение к этому тривиальному.

Теорема 1. *Пусть в области D задана непрерывная функция f и пусть совершенное множество $P \subset D$ меры нуль такое, что f голоморфно в $D \setminus P$ и из каждой точки $z \in P$, исключая не более* *чем счетное их множество, исходят два линейно независимых луча $t_1(z)$, и $t_2(z)$, вдоль которых*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right| < \infty \quad (z+h \in t_1(z), t_2(z)).$$

Тогда f голоморфна в D.

Доказательство достаточно простое. Как всегда, предполагая теорему неверной, можем считать, что ни в какой окрестности точки из P функция f не является аналитической. По лемме Меньшова находим порцию $P' \subset P$, для которой направления t_1, t_2 "почти" одинаковы, а растяжения отображения f вдоль них ограничены одним числом. Но тогда, как и при доказательстве теоремы о свойстве K''', легко докажем, что вблизи P' функция f удовлетворяет условию Липшица, что, как мы знаем, дает голоморфность f в окрестности $P' \subset P$ — противоречие.

Теорема 1. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция, аналитическая вне совершенного и простого множества P меры нуль. Если через каждую точку $z \in P$, исключая не более чем счетное их множество, проходит прямая $l(z)$, вдоль которой*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right| < \infty \quad (z+h \in l(z)),$$

то f аналитична всюду в D.

Доказательство. В доказательстве теоремы о свойстве K''' (§3, гл. XIII) локальная липшицевость f вне P — с одной и той же константой! — напрямую следовала из первой теоремы о продолжении внутреннего отображения, относящейся к произвольному нигде не плотному P, но с парой линейно независимых лучей. Точно так же, но уже из второй теоремы о продолжении мы легко докажем локальную липшицевость f вне P (с одной и той же константой) и в условиях нашей теоремы. А из §5, гл. XII отсюда следует локальная липшицевость и всюду в области D, что и означает аналитичность f.

Теорема 3. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ и $\mathrm{Mes}P = 0$. Если в каждой точке $z \in P$ отображение f обладает свойством T и угол между образами лучей $t_1(z)$, $t_2(z)$, $z \in P$, не является прямым $\left(т. е. \neq \frac{\pi}{2}\right)$, то f аналитична всюду в D.*

Доказательство. По лемме 1 гл. X мы можем считать, что D — круг, а P удовлетворяет следующим условиям:

1) $[\widehat{\tau_i(z'), \tau_i(z'')}] < \sigma$ для любых $z', z'' \in P$;

2) $100\sigma < [\widehat{\tau_1(z), \tau_2(z)}] < \pi - 100\sigma$ для каждой точки $z \in P$;

3) если $P_1 = f(P)$, то из каждой точки $w = f(z) \in P_1$ как из вершины исходят два угла $\Omega_k(w)$ $(k = 1, 2)$, раствора 4σ каждый, полученные параллельным переносом фиксированной пары углов Ω с общей вершиной и обладающие тем свойством, что образ $\lambda_k(w)$ отрезка $\tau_k(z)$ $(k = 1, 2)$, имеющего длину δ (при отображении $w = f(z)$), расположен внутри угла $\Omega_k(w)$; при этом $100\sigma < [\widehat{\Omega_1, \Omega_2}] < \pi - 100\sigma$. Кроме того, мы можем считать, что угол β между биссектрисами Ω_1, Ω_2 удовлетворяет неравенству $\left|\beta - \frac{\pi}{2}\right| > 10\sigma$. Так как в леммах типа Меньшова число σ может быть взято наперед и произвольно малым, то это последнее условие легко достижимо. Далее, очевидно, можем предположить, что биссектриса угла Ω_1, совпадает с положительной полуосью абсцисс w-плоскости $(w = f(z) = u + iv)$, а Ω_2 расположен в верхней полуплоскости $v \geq 0$.

Из этих предварительных построений следует, что значения отношения

$$\frac{f(z') - f(z)}{z' - z}, \quad z' \in t_1(z), \quad z \in P,$$

принадлежат углу ω_1 раствора 2σ с биссектрисой, являющейся положительной полуосью ζ-плоскости. Для лучей $t_2(z)$, $z \in P$, значения того же отношения принадлежат углу ω_2 того же раствора, при этом угол между биссектрисами ω_1 и ω_2 принадлежит интервалу $(0, \pi)$.

Рассмотрим отображение $f_1 = f - rz$, $r > 0$. Тогда значения отношения $\frac{f(z') - f(z)}{z' - z}$ будут принадлежать сдвинутым на $r > 0$ углам $\omega_1 + r$ и $\omega_2 + r$.

Первоначальный угол ω_1 содержит строго внутри угол $\omega_1 + r$ и часть угла $\omega_2 + r$. Возьмем вместо полных лучей $\tau_2(z)$, $z \in P$, их начальные отрезки, образы которых при отображении

$$\frac{f_2(z') - f_1(z)}{z' - z}, \quad s' \in t_2(z),$$

принадлежат углу ω_1. По построению относительный поворот точек этих отрезков меньше σ; то же справедливо и для полных лучей $\tau_1(z)$.

Так как по теореме 1 гл. X отображение f_1 является внутренним (как и f), то можем считать его однолистным. Но тогда растяжения обратного к нему отображения φ_1 вдоль образов лучей τ_1, τ_2 не превышают $a = \frac{1}{r}$. На основании рассуждения в теореме о свойстве K''' f_1 удовлетворяет условию Липшица.

Образ $P_1 = f(P)$ есть замкнутое множество в $D_1 = f(D)$. Предположим, что $\mathrm{Mes} P_1 > 0$. Тогда из того, что образ $f_1(P_1) = P$ имеет меру нуль и $f_1 \in \mathrm{Lip}$, следует, что почти всюду на P_1 якобиан $J(f_1) = 0$. Если бы при этом $df_1 \neq 0$, то образы (в z-плоскости) дуг, пересекающихся в такой точке не под прямым углом, были бы дугами с общей касательной, в то же время по условию лучи $t_1(z)$, $t_2(z)$, $z \in P$, линейно независимы (ср. с леммой 10 гл. XIII). Но тогда почти всюду на P_1 липшицева функция $\varphi_1(w)$ была бы моногенна, а значит, аналитична в, D_1 вместе с обратной ей функцией $f_1 = f + az$ в D_1. Это завершает доказательство теоремы.

Пример функции $f = x + \theta(x) + iy$, где θ — "канторова лестница", показывает, что условие нашей теоремы относительно угла в образе является существенным.

Рассмотрим строго возрастающую функцию $\varphi(x) = x + \theta(x)$, $x \in J$, где θ — обычная "канторова лестница". Обозначим обратную ей через $\psi(y)$, $y \in [0, 2]$, а образ $\varphi(P_0)$ канторова множества P_0 через P_1. Наконец, возьмем функцию $f(z) = x+\theta(x)+i\psi(y)$. Она гомеоморфно отображает прямоугольник $[0, 1]\times[0, 2]$ на прямоугольник $[0, 2]\times[0, 1]$ и в каждой компоненте вне "особого" множества $(P_0\times I)\cup(P_1\times[0, 2])$ имеет вид $z + \mathrm{const}$. Образ этого особого множества есть множество $(P_1 \times [0, 2]) \cup (P_0 \times [0, 2])$ и также имеет меру нуль. Можно высказать предположение, что если в задаче стираемости множество меры нуль P является простым, то оно стираемо, если и его образ имеет меру нуль. Из теорем о продолжении внутренних отображений следует, что такую теорему достаточно доказать для однолистных функций (в окрестности P).

Приведем еще одно утверждение (принадлежащее С. П. Пономареву). Оно связано с квазиконформными отображениями и, в частности, с так называемыми квазиконформными кривыми. Мы не будем давать точного определения класса квазиконформных отображений — оно нам, в сущности, не потребуется, — а сошлемся на работу [1]. Зато приведем те понятия и утверждения, которые мы используем существенно.

1. Если $f : D \to \mathbb{C}$ — квазиконформный гомеоморфизм, то для него справедлива формула Грина

$$\int\limits_{\Lambda} f dz = 2i \iint\limits_{(\Lambda)} f_{\bar z} dxdy$$

для каждой замкнутой спрямляемой кривой $\Lambda \sim 0$ (в D).

2. Простая дуга Λ называется квазиконформной, если существуют область $D \subset \Lambda$ и квазиконформный гомеоморфизм φ области D такой, что образ $\varphi(\Lambda)$ есть прямолинейный отрезок.

3. Существует квазиконформная дуга Λ в $\mathbb{C}$, такая, что некоторая аналитическая в $\mathbb{C}\backslash\Lambda$ функция f, непрерывная на Λ, $f(\infty) = 0$, имеет Λ в качестве множества своих особых точек [2].

4. Если $f : D \to \mathbb{C}$ — гомеоморфизм и Λ — прямолинейный отрезок (возможно, с концами на dD) и f вне Λ есть квазиконформное отображение, то f — квазиконформно всюду в D.

Имеет место следующая

Теорема 5. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — непрерывное отображение и $\Lambda \subset D$ — квазиконформная кривая. Если f в $D \setminus \Lambda$ голоморфно, а образ $f(\Lambda)$ — первой категории на $\mathbb{C}$ (в частности, нигде не плотен), то f аналитично всюду в D.*

Доказательство. Из теоремы 4 гл. IX следует, что отображение f можно предполагать гомеоморфизмом. Предполагая теорему неверной, можем считать, что в концах Λ (принадлежащих границе D) контингенция кривой Λ отлична от всей плоскости, поэтому [3] существует квазиконформный гомеоморфизм $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такой, что $\Lambda \subset \Phi(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ — вещественная ось). Пусть $\Omega = \Phi^{-1}(D)$. Обозначим через g сужение Φ на $\Omega : g = \Phi\mid_{\Omega}$. Пусть $\lambda = g^{-1}(\Lambda)$ (это — отрезок прямой $\mathbb{R}$). Имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f"] & f(D) \\
\Omega \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "f\circ g"'] &
\end{tikzcd}$$

Отображение $f \circ g$ квазиконформно в $\Omega \setminus \Lambda$, поэтому $f \circ g$ — квазиконформно в Ω. Следовательно, отображение $f = (f \circ g) \circ g^{-1}$ также квазиконформно (как композиция таких же отображений). Так как оно голоморфно почти всюду в D — ведь Λ имеем плоскую меру нуль,, — то оно голоморфно всюду: например, в силу свойства 1 квазиконформных гомеоморфизмов. Теорема доказана.

2. Основная теорема

Пример всюду дифференцируемой "канторовой лестници"$f(z) = \theta_0(x)$, приводимой уже нами выше, показывает, что даже полная R-дифференцируемость в каждой точке особого множества может не обеспечивать аналитичности функции. Опять-таки, это в данном случае связано с наличием "канторова гребешка".

А теперь напомним свойство K (гл. XI) функции $f(z)$ в точке $z_0 \in D$: это означает существование прямой $t(z_0)$, проходящей через эту точку, вдоль которой f имеет конечную производную $\frac{\partial f}{\partial t}\,|_{z_0}$.

Докажем следующую теорему

Теорема 5. *Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция и $P \subset D$ — простое замкнутое множество. Если f аналитична в $D \setminus P$ и в каждой точке P, исключая не более чем счетное его подмножество, обладает свойством K? то она аналитична всюду в D.*

Доказательство будет использовать лемму (опять-таки — типа Меньшова), которая в определенном смысле объединяет лемму 1 во второй теореме о продолжении (§2 гл. X) и лемму 7 для свойства K' (§4 гл. VIII). Поэтому мы ее просто сформулируем.

Согласимся, как и ранее, в свойстве K рассматривать прямую $t(z_0)$ как ориентированную, на которой зафиксирован отмеченный луч $t_0(z_0)$ с начальной точкой z_0.

Лемма. *Пусть отображение $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывно и $P \subset D$ — произвольное замкнутое множество; пусть, далее, f обладает свойством K во всех точках множество $N \subset P$ не первой категории на P. Тогда наайдутся порция $P' \subset$ и числа B, σ, $\delta > 0$ $(\sigma < \frac{\pi}{1000})$, такие, что через каждую точку $z \in P'$ проходит ориентированная прямая $\tau(z)$ с отмеченным лучом $\tau_0(z)$ и со следующими свойствами:*

1) $[\widehat{\tau_0(z'), \tau_0(z'')}] < \sigma$ для любых точек $z', z'' \in P'$;

2) $\rho(P', \partial D) > \delta$;

3) $\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\right| \le B$ для каждой точки $z \in P'$ и всех $\zeta \in \tau(z)$, удовлетворяющих неравенствам $0 < |\zeta - z| < \delta$;

4) функция вида $w(z) = e^{i\Phi_0} f(z) + az$ (Φ_0 фиксированная почтоянная, $a > 0$ — произвольно) на прямых $\tau(z)$, $z \in P'$ удовлетворяет неравенствам

$$\left|\frac{w(z') - w(z)}{z' - z}\right| \ge a > 0$$

при $|z' - z| < \delta$;

5) если P_1' — образ множества P' при отображении $w = w(z)$, то каждая точка $w \in P_1'$ является вершиной пары вертикальных углов $\Omega(w) = \Omega_0 \cup \Omega_1$ раствора 4σ, полученных параллельным переносом фиксированной пары углов $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ и обладающих тем *свойством, что образ $\lambda(w)$ отрезка прямой $\tau(z)$ с центром z и длины 2δ расположен внутри углов $\Omega(w)$: каждая половина — в своем угле; при этом образ отрезка из τ_0 принадлежит $\Omega_0(w)$.*

Направление общей биссектрисы углов Ω_0, Ω_1, при этом, вообще, зависит от a.

Доказательство основна теоремы.

Так как при любом $a > 0$ функция $w(z) = e^{i\Phi_0} f(z) + az$ осуществляет (в силу второй теоремы о продолжении) внутреннее отображение круга, содержащего из возможных особенностей только точки из порции $P' \subset P$, то пользуясь методом из §2 гл. XI, убедимся, что $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица вне P' с одной и той же константой, а тогда, в силу простоты P, она удовлетворяет этому условию всюду в выбраном круге.

А теперь, как и в § 4 гл. XIII, рассматривая вспомагательную функцию $f(z) + \varphi(z)$ и

$$h(z) = \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - \frac{f(z) - f(z_2)}{z - z_2} + \frac{\varphi(z) - \varphi(z_1)}{z - z_1} - \frac{\varphi(z) - \varphi(z_2)}{z - z_2}$$

при $\varphi(z) = (z + A)^3$ и выбирая достаточно большое (но фиксированное) A так, чтобы производная $h'(\zeta)$ из свойства K для $\zeta \in P$ была отлична от нуля, убедимся в том, что $h(z)$ осуществляет внутреннее отображение при любых $z_1, z_2 \in D \setminus P$, для которого имеет место принцип максимума. А так как на границе ∂D $h(z) \to 0$ при $|z_1 - z_2| \to 0$ $(z_1, z_2 \to P)$, то отсюда следует (комплексная) дифференцируемость f в каждой точке P.

Другими словами, f аналитична в точках выбранной порции из P', что противоречит нашему обычному предположению о существенной особенности всего P.

Теорема доказана.

Дополнение

1. Об открытых нульмерных отображениях многообразий

В главе VIII мы уже упоминали теорему Стоилова о том, что произвольное открытое нульмерное отображение ориентируемых двумерных многообразий: $f : X \to Y$ сводится к композиции гомеоморфизма X на себя и аналитической функции. В частности, такое отображение оказывается локальным гомеоморфизмом в X исключая лишь изолированное множество точек; именно эту часть теоремы Стоилова мы фактически доказали выше.

Известно [1], что счетно-кратное открытое отображение произвольного хаусдорфова локально компактного пространства X на метрическое Y обладает плотным множеством точек локального гомеоморфизма. Что же касается произвольного открытого и нульмерного отображения, то даже для случая многообразий X, Y одинаковой размерности $n > 2$ вопрос до сих пор не решен.

Но, подчеркнем, что лемма о простой дуге из главы VIII имеет место и в этом случае.

Поэтому рассматривают открытые отображения X на Y, уже предполагая наперед их изолированность; такие отображения мы и будем называть внутренними.

Известно [3], что "множество ветвления"B_f такого отображения (т. е. точек, ни в какой окрестности которых f не есть гомеоморфизм) имеет размерность $\leq n-2$, поэтому точки локального гомеоморфизма образуют связную область в X.

Докажем следующую теорему:

Теорема. *Пусть X, Y — гладкие n-многообразия и $f : X \to Y$ — открытое нульмерное почти всюду в X дифференцируемое отображение, обладающее N-свойством. Тогда f — внутреннее отображение.*

Конечно, это утверждение есть аналог теоремы Вяйсяйля, которую мы приводили в главе IX (и фактически ее доказали); нужно только (что легко сделать) переформулировать последнюю для гладких многообразий.

Доказательство теоремы. Поскольку мы фактически изучаем локальные свойства отображений, то здесь, очевидно достаточно предполагать, что X и Y — n-мерные ориентированные эвклидовы пространства, причем $f : X \to Y$ — замкнуто.

Если обозначить

$$A = \{x : f \text{ недифференцируемо в } x\}$$
$$B = \{x \in X \setminus A : J(x) = 0\},$$

то легко, пользуясь N-свойством, показать, что мера множества $f(A \cup B)$ равна нулю. Поэтому как $f(X) \setminus f(A \cup B)$, так и $X \setminus f^{-1}f(A \cup B)$ плотны соответственно в fX и X. Поскольку в каждой точек $x \in f^{-1}(y)$ для $fX \setminus f(A \cup B)$ якобиан $J(x) \neq 0$, то $f^{-1}(y)$ состоит из конечного числа точек,в каждой из которых локальная степень $\gamma = \pm 1$ $(= \mathrm{sgn} J(x))$.

Покажем теперь, что вблизи любой точки x где $J(x) \neq 0$, якобиан не меняет знака. Тогда на основании теоремы Вяйсяля мы выведем, что f является внутренним в каждой компоненте некоторого плотного открытого множества $O \subset X$.

Предположим противное и пусть, например, точка x_0, $\gamma(x_0) = 1$ является предельной для точек x_k, $\gamma(x_k) = -1$. Из конечности $f^{-1}f(x_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ следует, что можно предполагать точки $y_k = f(x_k)$ попарно различными и что в некоторой окрестности $U(x_0)$ отображение f замкнуто, причем, $U \cap f^{-1}f(x_0) = x_0$. Выделяя, если нужно, подпоследовательность из $\{y_k\}$, можно предположить еще, что y_k можно соединить гладкой (т. е. класса C^1) дугой λ с определенными полукасательными и в концах y_0, y_1. Действительно, сначала выделяем такую подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$,чтобы лучи $\overrightarrow{y_0 y_{n_k}}$ имели определенное предельное положение (полукасательной в y_0); затем выбираем новую подпоследовательность $\{y_{n_{k_2}}\}$ так, чтобы в безконечнозвенной ломаной с вершинами в них направления звеньев имели в качестве предельного положения ту же полукасательную. Наконец, в полученной ломаной "сглаживание"углов представляет тривиальное построение. Поэтому будем считать, что уже $\{y_k\}$ есть нужная последовательность.

Выберем положительное направление на $\lambda \subset Y$ от y_0 к y_1 : $\bar{\lambda} = \overline{y_0 y_1}$ и в каждой точке y_k построим касательные единичные векторы τ_k в этом направлении. Возьмем дугу $l \subset X$, для которой $f\mid_l\colon l \to \lambda$ — гомеоморфизм; ясно, что на l индуцируется положительное направление $\bar{l} = \overline{x_0 x_1}$ (не нарушая общности, точки $f^{-1}f(x_k) \cap l$ мы снова обозначаем через x_k). В каждой точке x_k проведем в этом направлении касательные векторы t_k.

Напомним, что для обратимого однородного аффинного отображения $A : R_1^n \to R_2^n$, для которого $\det A < 0$, существуют плоскость R^{n-1} и прямая R^1 в общем положении (т.е. с единственной общей точкой — началом координат), такие, что A сводится к "симметрии"относительно R^{n-1} вдоль прямых параллельных R^1 при этом

$$\det\left(A\mid_{R^{n-1}}\right) > 0.$$

Построим теперь в каждой точке x_k $(k = 1, 2, \dots)$ плоскости "симметрии"P_k линейных отображений j_k с якобиевыми матрицами; если P_k проходит через t_k, то "слегка"изменяя направления λ вблизи y_k при "сглаживании"углов, мы сможем изменить направление τ_k, а вместе с ним и t_k, не нарушая гладкости λ, после чего P_k и t_k будут в общем положении. В точке x_0 строим пока произвольную плоскость P_0 в общем положении с t_0 (выбор ее несколько уточним дальше). Ориентируем теперь плоскости $P_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ так, чтобы было

$$(P_k \times t_k) = 1;$$

иными словами, на каждой P_k задан положительно ориентированный $(n-1)$-репер V_k, который с дополнением t_k даёт положительно ориентированный n-репер пространства X.

Образ достаточно малого куска плоскости P_k есть континуум Π_k^1, пересекающий дугу λ в единственной точке y_k и в этой точке имеющий касательную плоскость Π_k в общем положении с τ_k (мы все время пользуемся условием $J(x_k) \neq 0$). Возьмем, наконец, плоскость P_0 так, чтобы в достаточно узком шаровом конусе с вершиной x_0 (в ее окрестности) и осью t_0, часть λ' кривой λ имела все касательные в общем положении к Π_0 (т.е. к касательной плоскости к образу P_0). Из дальнейшего будет ясно, что нужные нам свойства прямолинейных реперов легко переносятся на криволинейные (это относится к ориентации, индексу пересечения и т.д.), т.е. состоящие из непрерывных кривых (не обязательно простых дуг), которые обладают определенными касательными в единственной общей точке и образуют уже прямолинейный репер. Поэтому далее будем говорить просто о реперах.

Из проделанного выше построения следует, что если ориентировать плоскость Π_0 так, что

$$(\Pi_0 \times t_0) = 1,$$

то, во-первых, этим определяется положительная, ориентация эвклидова пространства Y (поскольку $J(x_0) > 0$), а во-вторых, ориентация Π_0 переносится проектированием вдоль τ_k на каждую плоскость Π_k

(начиная с некоторого k), причем, очевидно,

$$(\Pi_k \times t_k) = 1;$$

иными словами, для этих k положительно ориентированными являются верхние полупространства (относительно направления τ_k) с границей Π_k.

Рассмотрим теперь какое-либо P_k $(k \geq 1)$; поскольку $J(x_k) < 0$ и P_k — плоскость "симметрии"отображения f, то положительно ориентированное полупространство (содержащее вектор t_k) должно перейти в отрицательно ориентированное (т. е. "нижнее") полупространство с границей Π_k, так как ориентация f на самой плоскости P_k — положительна. Но это означает, что при движении точки x от x_k до x_1 на $\bar{l}$ образ ее должен двигаться от y_k до y_0 на $\bar{\lambda}$, т. е. в отрицательном направлении, чего не может быть, поскольку $f\mid_l$ — гомеоморфизм.

Как указывалось выше, полученный результат означает, что в наших условиях существует плотное открытое множество O, в каждой компоненте которого f является внутренним отображением.

2. Обозначим через P (замкнутое) множество точек, ни в какой окрестности которых f не является внутренним. Из доказанного следует, что P — нигде не плотно в X, и во всех точках $x \in O = X \setminus P$ определена локальная степень $\gamma(x)$ отображения f.

Покажем, что вблизи каждой точки из P степень $\gamma(x)$ меняет знак. Пусть для $x_0 \in P$ это не так. Из доказанного выше следует, что в каждой компоненте O имеется плотное множество точек, где $J \neq 0$ и, следовательно, в них якобиан сохраняет знак. Можем поэтому считать, что в окрестности $U(x_0)$ $J(x) \geq 0$, $x \in O \cap U$, а на множестве, плотном в $UJ < 0$. Но тогда ни в одной точке $P \cap U$ не может быть: $J < 0$. На основании теоремы Вяйсяйля отсюда следует, что $f\mid_U$ — внутреннее отображение, что противоречит определению P, $P \cap U \neq 0$. Рассмотрим нигде не плотное замкнутое множество $f^{-1}fP$ и выберем произвольную компоненту $D \subset fX \setminus fP$. Обозначим: $\gamma_0 = \sum\limits_i |\gamma(f\mid_{g_i})|$, где суммирование распространено на все компоненты $g_i \subset f^{-1}D$.

Пусть $y \in \partial D \cap fX$; покажем, что $f^{-1}(y)$ содержит $\leq \gamma_0$ точек. В противном случае нашлись бы точка $y' \in \partial D$ и ее окрестность V такие, что $f^{-1}V$ содержит $\geq \gamma_0 + 1$ компонент, в каждой из которых f замкнуто и образы которых совпадают с V; но тогда каждая точка из $V \cap D$ имела бы кратность $\geq \gamma_0 + 1$, чего не может быть.

Выберем теперь точку $y_0 \in \partial D \cap fX$ с максимальной кратностью $\bar{\gamma} \leq \gamma_0$, окрестность V такие, чтобы $f^{-1}V$ распадалось на $\bar{\gamma}$ компонент

$h_1, \ldots, h_{\bar\gamma}$, в которых f замкнуто и $fh_j = V$ $(j = 1, \ldots, \bar\gamma)$. Тогда ясно, что на границе $\partial(h_j \cap g_i)$ отображение f взаимно однозначно. Поэтому [3] $f \mid h_j \cap g_i$ — гомеоморфизм, причем $f(h_j \cap g_i) \cap f(h_j \setminus g_i) = \emptyset$ поскольку $f(h_j \cap g_i) \subset \overline{D}$, а $f(h_j \setminus g_i) \subset V \setminus \overline{D}$. Отсюда, в частности, следует, что $\bar\gamma = \gamma_0$. По крайней мере одна область h_j содержит точки P, так как иначе, по теореме продолжения f было бы внутренним в каждой h_j и область $V = fh_j$ не содержала бы точек fP.

Теорема будет теперь доказана, если справедлива следующая лемма:

Лемма. *Пусть $f : h \to V$ — открыто-замкнутое нульмерное отображение на и $p \subset h$ — замкнуто и нигде не плотно. Если 1) $f(p)$ — нигде не плотно в V, 2) в каждой компоненте из $h \setminus p$ f — внутреннее отображение, 3) существует подобласть, $h' \subset h$, для которой $f\,|_{h'}$ — гомеоморфизм, причем $f(h') \cap f(h \setminus h') = \emptyset$, то f — внутреннее отображение h.*

Доказательство леммы. Если $\gamma(x)$ — постоянного знака во всех точках $h \setminus p$, лемма следует из теоремы о продолжении (гл. IX). Предположим, что этого нет. Тогда компоненты открытого множества $h \setminus p$ можно считать максимальными по отношению к свойству f быть внутренним; при этом в любой близости к каждой точке из p степень $\gamma(x)$ меняет знак.

Точку $x \in h$ назовем однократной, если $f^{-1}f(x) = x$. Из открытости f легко следует [1], что множество M_1 однократных точек замкнуто (в h). Возьмем компоненту M_1, содержащую h', и в ней — максимальную подобласть $h_0 \supset h'$; тогда $\bar h_0 \subset M_1$.

Возьмем теперь компоненту $d \subset h \setminus p$, содержащую h_0, и покажем, что $d \equiv h_0$ (а потому и $\bar d \equiv \bar h_0$). Если это не так, то граница ∂h_0 разбивает d (иначе было бы $h_0 \subset \bar d$, а это нам и нужно), поэтому имеет размерность $n-1$. Но размерность множества ветвления $\le n-2$, поэтому найдется точка $x_0 \in d \cap \partial h_0$, в окрестности $U \subset d$ которой f — гомеоморфизм. По построению найдется последовательность $x_k \to x_0$, $x_k \in d \setminus \bar h_0$, т. е. таких точек x_k, для которых $f^{-1}f(x_k)$ содержит по крайней мере две точки. Поскольку $f\,|_U$ — гомеоморфизм, то U может содержать лишь по одной точке из $f^{-1}f(x_k)$; тогда остальные точки обладают предельными точками вне U и в этих последних значение f совпадает с $\lim f(x_k) = f(x_0)$, что противоречит тому, что $x_0 \in M_1$.

Итак действительно, $\bar d \equiv \bar h_0 \subset M_1$. Не ограничивая общности, можем считать, что $\gamma = 1$ в точках $\bar d$: в точках d это ясно, для граничных же точек $x \in \bar d$ это следует из того, что они однократны, f

открыто, $\bar{d} \subset M_1$ и степень постоянна вблизи точки $f(x)$ (и, очевидно, равна 1).

Пусть образ $f(\bar{d}) = \overline{D}$; тогда $f(\partial d) = \partial D$. Пусть $y_0 \in \partial D$ и V — достаточно малая окрестность y_0. Возьмем точку $y' \in D \cap V$ и семейство расширяющихся шаров $V_r(y')$ с центром y' радиуса r; найдется первое значение $r = r_0$, для которого граница S_0 шара $V_{r_0}(y') = V_0$ содержит точки на ∂D. Одну из них обозначим снова через y_0; взяв, если нужно, изнутри S_0 касающийся шар в V_0, будем считать, что y_0 — единственная общая точка V_0 с ∂D. Ясно, что $f^{-1}V_0$ есть топологический шар $v \subset \bar{d}$ с граничной сферой $s_0 = f^{-1}S_0$, проходящей через единственную точку $x_0 = f^{-1}(y_0) \in \partial d$.

По построению существует последовательность $\{x_k\}$, $x_k \in h \setminus p$, $x_k \to x_0$ и $\gamma(x_k) < 0$. Ясно, что мы можем выбрать x_k точками локального гомеорморфизма f. Поэтому будем считать, что $\gamma(x_k) = -1$. Теперь мы хотим повторить в основных чертах уже проделанное выше построение.

Выделяя, если нужно, подпоследовательности, мы можем считать, что $y_k = f(x_k)$ вместе с предельной точкой $y_0 = f(x_0)$ и центром y' шара V_0 соединены простой дугой λ, такой, что 1) отрезок ее от y' до y_0 есть радиус шара V_0 и 2) каждая сфера $S_r(y')$ радиуса $r > r_0$ пересекает λ не более чем в одной точке.

Ориентируем дугу λ от точки y' до y_1; из построения следует, что если ориентацию сфер S_r выбрать так, чтобы

$$(S_r \times \bar{\lambda}) = 1,$$

то они (ориентации) будут переходить одна в другую при гомотетии с центром y'.

Возьмем произвольную точку x_k (k=1,2,...) и дугу l, проходящую через нее, для которой $f : l \to \lambda$ — гомеоморфизм; на l индуцируется ориентация $\bar{l}$ от $x' = f^{-1}(y')$ до x_1.

Для шаров V_0 и V_k сфера S_k которого проходит через y_k, прообразы $f^{-1}V_0 = v_0$, $f^{-1}V_k = v_k$ содержат по одной компоненте (так как $x' \in M_1$, причем $v_k \supset v_0$ и вблизи x_k граница ∂v_k есть $(n-1)$-мерная поверхность τ_k: x_k — точка локального гомеоморфизма f). Ориентируем сферу $s_0 = f^{-1}S_0$ и поверхность τ_k так, чтобы

$$(s_0 \times l) = (\tau_k \times \bar{l}) = 1.$$

Поскольку каждая из $\partial v_0 = s_0$ и ∂v_k делит пространство X на две области и является их совместной границей [3], то ясно, что при движении вдоль l вблизи x_0 и x_k кривая $\bar{l}$ переходит из внутренности области ∂v_0 (или ∂v_k) в ее внешность.

По построению $\gamma(x_0) = 1$ и внешний к ∂v_0 отрезок $\overline{x_0 x_1} \subset \bar{l}$ лежит вне V_0; поэтому, так как $\gamma(x_k) = -1$, внешний к v_k (по крайней мере достаточно малый) отрезок $\overline{x_k x'} \subset \bar{l}$ должен отобразиться внутрь $fv_k = V_k$, что невозможно.

Тем самым лемма, а вместе и теорема доказаны.

2. О локальной степени нульмерного отображения

1. Основная теорема. Введем следующее понятие.

Определение. Отображение $f_\eta : V^n \to \mathbb{R}^n$ замкнутого шара V^n в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ назовем отображением типа (η), если для произвольной точки $y \in \mathbb{R}^n$ найдется $\delta(y) > 0$, такое, что прообраз $f_\eta^{-1} B$ шара $B(y)$ с центром в y и диаметра $< \delta(y)$ состоит из (открытых в V^n) компонент, каждая из которых имеет диаметр $< \eta$.

В силу компактности V указанное в определении условие равносильно тому, что (замкнутые) компоненты прообраза $f_\eta^{-1}(y)$ любой точки имеют диаметр $< \eta$

Докажем следующую лемму:

Лемма 1. *Существует $\eta_0 > 0$, такое, что любое отображение типа (η), $0 < \eta \le \eta_0$ не понижает размерности, т.е.* $\dim f_\eta(V) = n$.

Доказательство. Выберем $\eta_0 > 0$ так, чтобы при любом η, $0 < \eta \le \eta_0$ шар V^n не имел открытых η-покрытий кратности $\le n$. При фиксированном η, $0 < \eta \le \eta_0$, указанные в определении шары $B(y)$, $y \in f_\eta V$, образуют открытое покрытие компакта $f_\eta V$, из которого выделим некоторое конечное подпокрытие: $\{B(y_k)\}$, $k = 1, \ldots, k_0$. Пусть δ_0 — его лебегово число и $\{B_1, \ldots, B_s\}$ — некоторое покрытие $f_\eta V$ открытыми множествами диаметра $< \delta$, $0 < \delta \le \delta_0$. Тогда каждое из множеств B_i, $i = 1, \ldots, s$, содержится в некотором шаре $B(y_{k_i})$ с центром $y_{k_i} \in f_\eta V$ и, следовательно прообраз $f_\eta^{-1} B_i$ состоит из (открытых) компонент $G_i^{(\alpha)}$ ($i = 1, \ldots, s$; $\alpha = 1, 2, \ldots$) диаметра $< \eta$.

Очевидио, что $\left\{G_i^{(\alpha)}\right\}_{i,\alpha}$ есть открытое покрытие шара V^n; пусть

$$\left\{G_1^{(\alpha_1)}, G_2^{(\alpha_2)}, \ldots, G_N^{(\alpha_N)}\right\} -$$

некоторое его конечное подпокрытие. Кратность его, в силу выбора η будет $\ge n+1$. Поскольку различные компоненты прообраза $f_n^{-1} B_i$ не пересекаются, то найдется система $n+1$ попарно различных индексов

$i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$, таких, что

$$G_{i_1}^{(\alpha_{i_1})} \cap G_{i_2}^{(\alpha_{i_2})} \cap \ldots \cap G_{i_{n+1}}^{(\alpha_{i_{n+1}})} \neq \emptyset$$

Но в таком случае, если обозначить $G_i^{(\alpha_i)}$ и $B(y_{k_i})$ при $i = i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$ соответственно через $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots, G^{(n+1)}$ и $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(n+1)}$, получаем

$$B^{(1)} \cap B^{(2)} \cap \ldots \cap B^{(n+1)} \supset f_\eta G^{(1)} \cap f_\eta G^{(2)} \cap \ldots \\ \ldots \cap f_\eta G^{(n+1)} \supset f_\eta (G^{(1)} \cap G^{(2)} \cap \ldots \cap G^{(n+1)}) \neq \emptyset,$$

т. е. кратность покрытия $\{B_i\}$ будет $\geq n+1$. Поскольку это верно для любого δ-покрытия при $0 < \delta \leq \delta_0$, то отсюда и следует, что $\dim f_\eta(V) \geq n$ из очевидности обратного неравенства и следует утверждение леммы.

Прежде чем переходить к основной теореме, напомним и одновременно уточним определение локальной ε-степени и степени нульмерного отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, где D — область n-мерного эвклидова пространства (§1 гл.IX).

Итак, по условию, для произвольной точки $x \in D$ $\bar{f}_x = f^{-1} f(x)$ есть (замкнутое в D) разрывное множество; выберем в некоторой ε-окрестности точки x определенную открыто-компактную частa $Q^{(\varepsilon)} \subset F_x$, содержащую x, и построим открытый полиэдр $P^{(\varepsilon)}$, содержащий $Q^{(\varepsilon)}$ и такой, что $\overline{P}^{(\varepsilon)} \cap F_x = Q^{(\varepsilon)}$. Коэффициент зацепления $\mathfrak{v} \left[f \partial \overline{P}^{(\varepsilon)}, f(x) \right]$ мы и будем для краткости называть (не совсем однозначно) ε-степенью отображения f в точке $x \in D$ и обозначать через

$$\gamma \left(Q_x^{(\varepsilon)}, f, f(x) \right) = \gamma \left(\overline{P}^{(\varepsilon)}, f, f(x) \right) = \gamma_\varepsilon(x).$$

При этом если найдется такое $\varepsilon(x) > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon(x)$ ε-степень не зависит от ε : $\gamma_\varepsilon(x) = \gamma(x)$ (т. е. при любом выборе открыто-компактной порции $Q_x \subset F_x$ в $\varepsilon(x)$-окрестности x), то $\gamma(x)$ назовем степенью отображения f в точке x.

Докажем теперь основное предложение.

Основная теорема. *Пусть D — область n-мерного эвклидова пространства и $f : D \to \mathbb{R}^n$ непрерывное нульмерное отображение. Тогда множество E тех точек $x \in D$, в которых существует степень $\gamma(x)$, причем $\gamma(x) = 0$, не содержит внутренних точек (т. е. $D \setminus E$ всюду плотно в D).*

Доказательство. Пусть, вопреки утверждению теоремы, существует замкнутый шар $V \subset E$ радиуса r. По лемме выберем η_0

так, чтобы для любого отображения типа (η_0) было:

$$\dim f_{\eta_0} V = n \quad \text{и} \quad \rho(V, \partial D) > 2\eta_0.$$

Замкнутый шар, концентричный с V и радиуса $r + \eta_0$, обозначим через $V_1 : V \subset V_1 \subset D$. Поскольку нульмерное отображение $f_1 = f\,|_{V_1}$ компакта V_1 является равномерно-нульмерным [4], то существует $\delta > 0$ такое, что прообраз f_1^{-1} любого множества $B \subset f_1 V_1$ диаметра $< \delta$ состоит из компонент, диаметр каждой из которых $< \eta_0/2$. Будем пользоваться следующим свойством, непосредственно, вытекающим из доказательства леммы 2 (§1гл. IX): если $F_x = f^{-1}f(x)$ и в каждой точке $x' \in F_x$ степень $\gamma(x') = 0$, то для любой открыто-компактной порции $Q_x \subset F_x$ имеем:

$$\gamma(Q_x, f, f(x)) = 0.$$

Покроем теперь компакт $f_1 V = fV$ некоторой триангуляцией L, симплексы которой имеют диаметры $< \delta$; очевидно, можно считать, что каждый n-симплекс $T_k \subset L$ $(k = 1, 2, \ldots, k_0)$ содержит внутри точки $f_1 V$. Выберем в каждом (открытом) симплексе T_k точку y_k, принадлежащую $f_1 V$ и рассмотрим $f_1^{-1} T_k$ и $f_1^{-1}(y_k)$. Тогда компоненты $O_k^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_k; \alpha_k \leq \infty)$ открытого множества $O_k = f_1^{-1} T_k$, пересекающиеся с V, имеют диаметры

$< \eta_0/2$, следовательно, $\overline{\bigcup\limits_k O_k} \subset V_1$.

Будем считать, что $O_k = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{\alpha_k} O_k^{(\alpha_k)}$ (другие компоненты O_k нам не понадобятся). Поэтому порция замкнутого разрывного множества $\bigcup\limits_k F_k = \bigcup\limits_k f_1^{-1}(y_k)$, лежит внутри $\bigcup\limits_k O_k$, компакта в $V_1 \setminus \partial V_1$ (это следует из того, что компакт $\bigcup\limits_k F_k \subset V_1$ фактически покрыт конечным числом компонент $O_k^{(\alpha)}$ — в силу леммы Бореля - Лебега).

Пусть $\rho_{kl} = \rho(F_k, F_l) > 0$ $(k, l = 1, 2, \ldots, k_0)$ и $\rho = \min\limits_{k,l} \rho_{kl}$; обозначим, далее $\rho(\bigcup\limits_k F_k, V_1 \setminus \bigcup\limits_k O_k) = \rho_1$. Выберем, наконец, произвольно $\mu > 0$ так, чтобы $2\mu < \min(\rho_0, \rho_1)$.

Разобьем пространство $\mathbb{R}^n \supset D$ на равные кубы диаметра $< \mu$ и дополнительно столь малого, чтобы совокупность кубов, содержащих точки нульмерного множества $\bigcup\limits_k F_k$ внутри или на границе, распадалась на конечное число связных компонент диаметра $< \eta_0$.

Эта совокупность, в свою очередь, распадается на некоторое число (замкнутых) n-мерных, сильно связных полиэдров $K^{(j)}$, $(j =$

$1, 2, \dots, j_0$); в силу выбора μ каждое $K^{(j)}$ содержится внутри одной из компонент $O_k^{(\alpha)}$. При этом если $K^{(j)}$ и $K^{(j')}$ пересекаются, то $\dim(K^{(j)} \cap K^{(j')}) \leq n-2$; из построения следует тогда,что $\dim(K^{(j)} \cap K^{(j')})$ не содержит точек $\bigcup\limits_k F_k$; другими словами, каждый полиэдр $K^{(j)}$ отделяет от $\bigcup\limits_k F_k$ некоторую открыто-компактную порцию $Q^{(j)}$.

Наконец, поскольку $2\mu < \rho_{kl} = \rho(F_k, F_l)$ для всех $k, l = 1, 2, \dots, k_0$ то каждый $K^{(j)}$ содержит порцию $Q^{(j)}$ лишь одного из множеств F_k ($k = 1, 2, \dots, k_0$), которое обозначим F_{k_j}. Итак,

$$(1) \qquad \gamma(Q^{(j)}, f, y_{k_j}) = O = \gamma(K^{(j)}, f, y_{k_j}), \quad (j = 1, 2, \dots, j_0),$$

при этом образ $f_1 K_{k_j} = f K_{k_j}$ лежит внутри симплекса T_{r_j}. Из всего этого построения следует, важное для дальнейшего, замечание: если отображение $f_1 \mid_{V_1} \setminus \bigcup\limits_j K_{k_j}$ продолжить внутрь каждого K_{k_j} в (непрерывное) отображение $f_0 \mid_{V_1}$, так, что образ $f_0 K_{k_j}$ принадлежит $\overline{T}_{k_j}$, то $f_0 \mid_V$ — отображение типа (η_0); это вытекает из нульмерности f_1 вне $K^{(j)}$, $(j = 1, 2, \dots, j_0)$ и выбора диаметров связных компонент, покрывающих $\bigcup\limits_k F_k$.

Рассмотрим теперь некоторое фиксированное $K^{(j)} = K$; составляющие еще n-мерные кубы определяют клеточное разбиение. По построению K является псевдомногообразием с краем $K_0 = \partial K$, ориентацию которого можно получить, взяв цепь C_n когерентно ориентированных n-кубов (клеток), составляющих K, приписав значение ее на каждом из них, равное 1; тогда ∂C_n и даст одну из ориентаций ∂K. Далее, легко видеть (это следует из сильной связности K), что каждый $(n-1)$-мерный цикл z_{n-1}, лежащий на K_0 и гомологичный нулю в K, есть кратное цикла ∂C_n. А поскольку по (1) имеем:

$$\gamma(K, f, y_{k_j}) = w(f\partial K, y_{k_j}) = 0,$$

то и

$$\mathfrak{v}(z_{n-1}, y_{k_j}) = 0.$$

Но тогда по теореме Хопфа [4] отображение $f_1 \mid_{K_0}$ можно продолжить в отображение $\tilde{f} \mid_K$ всего K в $\overline{T}_{k_j} \setminus y_{k_j}$. Проделаем это для каждого $K^{(j)}$, $(j = 1, 2, \dots, j_0)$; тогда образ $\tilde{f}V$ не содержит точек

y_k $(k = 1, 2, \ldots, k_0)$. Обозначим через ψ — одновременную проекцию из точек y_k на границу ∂T_k, получим отображение $f_0 = \psi\tilde{f}$ шара V_1, ограничение которого на V, будет типа (η_0) (см. выше). Но $\dim f_0 V \leq n-1$ по построению, а это противоречит выбору η_0.

Этим основная теорема доказана.

Отметим,что эта теорема до сих пор была известна лишь для дифференцируемых отображений.

Далее, одно время казалось, что имеет место более общее утверждение: если для каждой точки $x \in E \subset D$ найдется последовательность стягивающихся к ней открыто-компактных порций $Q_x^{(m)}$ для которых $\gamma(Q_x^{(m)}, f, f(x)) = 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$, то $D \setminus E$ всюду плотно. Что это в общем случае не так, показывает пример нульмерного отображения: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (\phi(x_1), x_2, \ldots, x_n)$, где $\phi(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$ — функция, обладающая любыми производными числами в каждой точке x (§2 гл. III). В самом деле, легко видеть, что к каждой точке $x \in \mathbb{R}^1$ стягивается некоторая последовательность интервалов $(\alpha_\rho(x), \beta_\rho(x))$, в концах которых $\phi(\alpha_\rho), \phi(\beta_\rho)$ постоянно либо $>$ либо $< \phi(x)$.

2. Теорема о точках взаимной однозначности. Докажем сначала некоторые леммы, которые нам понадобятся и в дальнейшем.

Лемма 2. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное нульмерное отображение. Множество $E(\gamma_0) \subset D$ всех точек, в которых существует локальная степень $\gamma(x)$ и $\gamma(x) = \gamma_0$, есть множество типа F_σ.*

Доказательство. Пусть F_s $(s = 1, 2, \ldots)$ — множество всех точек $x \in D$, в которых $\gamma_\varepsilon(x) = \gamma_0$ для всех $\varepsilon \leq \frac{1}{s}$; покажем, что F_s замкнуто. Пусть $x_k \in F_s$ и $x_k \to x_0 \in D$, а $U(x_k)$ и $U(x_0)$ — $\frac{1}{s}$-окрестности. Возьмем произвольную полиэдральную окрестность $P \subset U(x_0)$ точки x_0 отделяющую от $f^{-1}f(x_0)$ открыто-компактную порцию Q_{x_0}. В каждой из окрестностей $U(x_k)$ возьмем полиэдр P_k, полученный параллельным переносом из P и расположенный относительно x_k так же, как и P относительно x_0. Начиная с некоторого k множества $P_k \cap f^{-1}f(x_k)$ и $P \cap f^{-1}f(x_0)$ попадут внутрь пересечения $P_k \cap P$, а потому (для этих k):

$$\gamma(P, f, f(x_0)) = \gamma(P_k, f, f(x_k)) = \gamma_0.$$

Итак, $x_0 \in F_s$. Очевидное равенство $E(\gamma_0) = \bigcup\limits_s F_s$ доказывает лемму 2.

Лемма 3. *Множество E всех точек, в которых существует локальная степень, есть множество типа F_σ. Более точно: E*

представимо в виде объединения $E = \cup F_m$, *где* F_m *— замкнуто и* $\gamma(x) = \gamma_m = \mathrm{const}$ *в каждой точке* $x \in F_m$.

Это — очевидное следствие из леммы 2 и ее доказательства.

В силу основной теоремы и леммы 2 множество $E_0 = E(0)$ есть множество первой категории в D. Пусть $E_0 = \bigcup\limits_s F_s^0$ как в лемме 2. Покажем, что образ fG_s плотного в D открытого множества $G_s = D \backslash F_s^0$ есть открытое множество (и, конечно, плотное в fD). Пусть $x \in G_s$; тогда в $\frac{1}{s}$-окрестности $U(x)$ найдется $P \supset Q_x$ $[\subset f^{-1}f(x)]$, такое, что $\gamma(P, f, f(x)) \neq 0$. Поэтому и для всех точек y' некоторой окрестности $V(y)$ точки $y = f(x)$ также будем иметь $\gamma(P, f, y') \neq 0$. Эту окрестность возьмем столь малой, чтобы ее прообраз внутри P, не паресекался с F_s^0, т. е. лежал в G_s: это возможно в силу нульмерности f. На основании теоремы существования корней §3 гл. IX окрестность $V(y)$ принадлежит образу fG_s, что и требовалось.

Т е о р е м а 1. *Если* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *нульмерно, то в* D *существует множество* $\mathcal{G}$ *всюду второй категории (и типа* G_δ*) такое, что: 1)* $\mathcal{G}_1 = f(\mathcal{G})$ *есть также множество всюду второй категории в* fD *(и типа* G_δ*) и 2) в каждой точке* $x \in \mathcal{G}$ ε*-степень* $\gamma_\varepsilon(x) \neq 0$ *для бесконечной последовательности (зависящей от* x*) значений стремящихся к нулю.*

При доказательстве следует лишь иметь в виду, что образ fD есть множество всюду второй категории в своем замыкании $\overline{fD}$ (и тем более, в себе).

Введем следующее понятие.

О п р е д е л е н и е. Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Точка $x_0 \in D$ называется точкой взаимной однозначности f, если $f^{-1}f(x_0) = x_0$.

Л е м м а 4. *Множество* D_1 *точек взаимной однозначности непрерывного отображения есть множество типа* G_δ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через A_m множество точек $x \in D$, для которых $f^{-1}f(x_0)$ содержит две точки x_1, x_2, такие, что $\rho(x_1, x_2) \geq \frac{1}{m}$ и $\rho(x_1 \cup x_2, \partial D) \geq \frac{1}{m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Легко видеть, что A_m — замкнутое множество. Очевидное равенство $D_1 = D \setminus \bigcup\limits_m A_m$ завершает доказательство.

Докажем теперь одно важное утверждение о точках взаимной однозначности.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *— нульмерное отображение. Если множество точек взаимной однозначности* D_1 *плотно в* D, *то* f *— гомеоморфизм (точнее — топологическое вложение).*

Доказательство. Поскольку во всех точках $x \in D_1$ отображение f, очевидно, изолированно, то в них существует локальная степень $\gamma(x)$. Но D_1 — плотное G_s, следовательно, множество E точек существования локальной степени во всяком случае всюду второй категории в D.

Возьмем произвольный шар $\bar{d} \subset D$; по лемме 3 $\bar{d} \cap E = \bigcup\limits_m (\bar{d} \cap F_m)$. Но $\bar{d} \cap E$ — второй категории в $\bar{d}$; поэтому одно из множеств F_m будет где-то плотным d. Из замкнутости F_m следует: найдется шар $d' \subset d$, к каждой точке которого существует $\gamma(x) = \mathrm{const} \neq 0$; последнее неравенство — в силу основной теоремы.

Поэтому (гл. IX) отображение f — открыто в d'. Если бы имелись точки $x_1, x_2 \in d'$, $x_1 \neq x_2$ и $f(x_1) = f(x_2)$, то в силу открытости f, некоторые окрестности $U(x_1)$, $U(x_2)$ также имели бы одинаковые образы, что противоречит условию теоремы. Но отсюда следует, что $f \mid d'$ — гомеоморфизм и, следовательно, $\gamma(x) = \pm 1$, $x \in d'$.

Поскольку шар $\bar{d} \subset D$ — произволен, то из доказанного следует, что существует открытое всюду плотное множество O точек локального гомеоморфизма f. Обозначим через O^+, соответственно O^-, те компоненты из O, где $\gamma = 1$, соответственно -1; покажем, что ни одна точка из $D \setminus O$ не является одновременно предельной и для O^+ и для O^-. В самом деле, пусть существует такая точка $x_0 \in D \setminus O$; возьмем произвольный полиэдр $P \subset D$, определяющий открыто-компактную порцию $Q_{x_0} \subset f^{-1}f(x_0)$. Тогда $\gamma(P, x_0) = \gamma_0$. Найдется шар $V(y_0)$, $y_0 = f(x_0)$, такой, что $\overline{V} \cap f\partial P = \emptyset$; в компоненте из $f^{-1}V$, содержащей x_0, выберем точки $x' \in O^+ \cap D_1$ и $x'' \in O^- \cap D_1$; тогда $\gamma(P, x_0) = \gamma_0$ равно, с одной стороны, $\gamma(P, x') = +1$, а с другой $\gamma(P, x'') = -1$. Полученное противоречие и доказывает, что вблизи каждой точки из $D \setminus O$ знак $\gamma(x)$ сохраняется. Далее, легко показать, что в условиях теоремы образ $f(D \setminus O)$ нигде не плотного замкнутого множества $D \setminus O$ также нигде не плотен (в $\mathbb{R}^n$): если некоторый шар $V' \subset f(D \setminus O)$, то в $f^{-1}V'$ выбираем открытое множество U', $\overline{U}' \subset O$; но тогда ни одна точка U' не есть точка взаимной однозначности f.

Из всего этого и из теоремы о продолжении (гл. IX) следует, что в каждой точке $x \in D \setminus O$ существует степень $\gamma(x) \neq 0$. Но тогда f — открыто в D, а это, как и выше, равносильно тому, что f — гомеоморфизм.

Теорема 2 доказана.

Следствие. Если $f : M^n \to N^n$ — нульмерное отображение многообразий, обладающее плотным множеством точек взаимной однозначности, то оно — топологическое вложение.

Для доказательства следует лишь покрыть N^n гомеоморфами эвклидовых областей и, используя теорему 2, доказать, что каждая точка M^n есть точка локального гомеоморфизма. Такое f — открыто, а это, как и в теореме 2, приводит к нужному результату.

3. Локальная степень. Если отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ — изолированно, т. е. для каждого $x \in D$ множество $f^{-1}f(x)$ состоит лишь из изолированных точек, то из определения локальной степени $\gamma(x)$, очевидно, следует, что она существует в каждой точке области D.

Предположим теперь, что некоторое нульмерное отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ обладает локальной степенью в каждой точке $x \in D$. Из леммы 3 непосредственно вытекает такое утверждение:

Теорема 3. *Если степень $\gamma(x)$ существует всюду в D, то она - функция 1 класса (по Бэру).*

Напомним теперь, что отображение f называется внутренним, если оно изолированно и открыто. Из результатов А.В. Чернавского и леммы 2 §1 гл. IX следует, что класс внутренних отображений совпадает с классом нульмерных отображений, для которых в каждой точке существует локальная степень $\gamma(x) \neq 0$.

Докажем следующую теорему:

Теорема 4. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное нульмерное отображение, для которого $\gamma(x)$ существует в каждой точке $x \in D$. Тогда: 1) существует всюду плотное в D открытое множество O, в каждой компоненте которого f является внутренним отображением; 2) если множество $P = D \setminus O \neq \emptyset$, то оно совершенно, вблизи каждой его точки $\gamma(x)$ меняет знак и $\dim p = n - 1$; 3) $\dim fP = \dim P$; 4) на P имеется открытое плотное множество точек, в которых $\gamma(x) = 0$.*

Доказательство. По лемме 3 $D = \bigcup\limits_m F_m$; $\gamma(x) = \gamma_m = \mathrm{const}$ для $x \in F_m$.

Возьмем произвольный шар $\bar{d} \subset D$; тогда $\bar{d} = \bigcup\limits_m (\bar{d} \cap F_m)$. Как и в теореме 2, находим шар $d' \subset d$ в каждой точке которого $\gamma(x) = \gamma_m = \mathrm{const}\ (\neq 0)$.[1] Но тогда, по сделанному выше замечанию, $f\ |_{d'}$ внутреннее отображение. Из произвольности $\bar{d} \subset D$ и следует утверждение 1).

Рассмотрим множество O. Пользуясь, если нужно, методом, подобным аналитическому продолжению, мы можем считать компоненты O максимальными по отношению к свойству f быть внутренним отображением. Тогда, если $P = D \setminus O \neq \emptyset$, то ни в какой окрестности

[1] Легко видеть, что в этом случае $\gamma_m = \pm 1$, но это нам не понадобится

каждой точки из P отображение f не является внутренним. Пусть $P' = P \cap d'$, где $\bar{d}' \subset D$ — шар; тогда fP' — нигде не плотно. В самом деле, в противном случае по теореме 3 гл. IX нашлась бы точка $x_0 \in P'$ и бесконечная последовательность $\{x_k\}$, $x_k \to x_0$, $x_k \subset O$, такая, что $f(x_k) = f(x_0)$. Но в этом случае (см. ниже теорему 5), степень $\gamma(x)$ не может существовать.

Отсюда и из теоремы о продолжении (гл. IX) следует, что вблизи каждой точки из P степень $\gamma(x)$ меняет знак, а потому P разбивает область D, т. е. $\dim P = n - 1$ тем самым доказано 2).

Поскольку нульмерное отображение не понижает размерности, то из доказанного о порциях P сразу следует 3).

Наконец, имеем: $P = \bigcup\limits_m (P \cap F_m)$. По теореме Бэра найдется порция $P' = P \cap d'$ принадлежащая некоторому F_m. Если бы $\gamma_m \neq 0$, то всюду в d' было бы: $\gamma(x) \neq 0$, т. е. в d' отображение f было бы внутренним. Но тогда компоненты O, пересекающиеся с d', не были бы максимальными по отношению к свойству f быть внутренним. Но тем самым доказано 4).

Теорема 4 доказана.

Если высказываться не совсем точно,то она утверждает, что класс отображений со всюду существующей локальной степенью достаточно близок к классу изолированных отображений, причем в подавляющем большинстве точек, где свойство изолированности нарушается, степень $\gamma(x) = 0$. Все это говорит о том, что условие существования локальной степени (в точке и, тем более, всюду) является достаточно сильным ограничением для отображения.

В связи с теоремой 4 уже больший интерес приобретают различные признаки существования локальной степени, а также различные ее обобщения. Мы приведем здесь несколько простых утверждений.

Теорема 5. *Для того чтобы локальная степень $\gamma(x_0)$ существовала в точке $x_0 \in D$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой окрестности $U(x_0)$ в каждой точке $x' \in f^{-1}f(x_0) \cap U \setminus x_0$ степень $\gamma(x')$ существовала и равнялась нулю.*

Доказательство просто: необходимость следует прямо из определения $\gamma(x_0)$, а достаточность — из того же свойства степени, которое мы использовали выше в основной теореме: если $Q_{x_0} \subset f^{-1}f(x_0)$ — открыто-компактная порция и при $x' \in Q_{x_0}$ степень $\gamma(x') = 0$, то $\gamma(Q_{x_0}, f, f(x_0)) = 0$.

Теорема 6. *Если в некоторой точке $x_0 \in D$ ε-степень $\gamma_\varepsilon(x_0) \geq m$ (или $\leq M$), $0 < \varepsilon < \varepsilon(x_0)$, то для некоторой окрестности $U(x_0)$ имеем: $\gamma_{\varepsilon'}(x') \geq 0$ (≤ 0), $x' \in f^{-1}f(x_0)$ и $0 < \varepsilon' < \varepsilon'(x')$*

Доказательство. Предположим противное; тогда найдется последовательность точек $x_k \to x_0$, $x_k \in f^{-1}f(x_0)$, для которых $\gamma_\varepsilon(x_k) > 0$ при $\varepsilon = \varepsilon_l^{(k)}$,

$$\lim_{l\to\infty} \varepsilon_l^{(k)} = 0 \tag{2}$$

Возьмем в некоторой ε-окрестности, $0 < \varepsilon < \varepsilon(x_0)$, порцию $Q_{x_0} \subset f^{-1}f(x_0)$ и пусть $\gamma(Q_{x_0}, f(x_0)) = m_0 \geq m$. Выберем произвольно из последовательности x_k ровно $x = |m| + |m_0| + 1$ точек и обозначим их просто: $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$. В силу условия (2) можно выделить попарно не пересекающиеся порции $Q_{l_i}(x_i) \subset f^{-1}f(x_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, \kappa)$, для которых $\gamma(Q_{l_i}, f(x_0)) > 0$. Но тогда:

$$\gamma(Q_{x_0}) = \sum_{i=1}^{\kappa} \gamma(Q_{l_i}) + \gamma(Q_{x_0} \setminus \bigcup_{i=1}^{\kappa} Q_{l_i}) \geq \kappa + m \geq |m_0| + 1,$$

что противоречиво.

Отметим два следствия из этих теорем:

Следствие 1. Существование локальной степени $\gamma(x_0)$ равносильно ограниченности ε-степени $\gamma_\varepsilon(x_0)$, $\varepsilon < \varepsilon(x_0)$.

Следствие 2. Если ε-степень $\gamma_\varepsilon(x_0)$ ограничена снизу (сверху), то для некоторой окрестности $(U(x_0))$ во всех точках $x' \in f^{-1}f(x_0) \cap U \setminus x_0$ существует степень $\gamma(x') \leq 0$ (≥ 0). При этом точки, где $\gamma < 0$ (> 0), образуют изолированное множество в $U \setminus x_0$.

Это — следствие теоремы 6 и леммы 2 §1 гл. IX. Из него вытекает также, что если точек, где $\gamma < 0$ (> 0), бесчисленное множество, то $\gamma_\varepsilon(x_0) \to +\infty$ $(-\infty)$ при $\varepsilon \to 0$.

4. Счетнократные отображения. Известно [1], что открытое счетно-кратное отображение локально компактного хаусдорфова пространства в метрическое обладает плотным множеством точек локального гомеоморфизма. Окаэывается, что в случае многообразий одинаковой размерности предположение об открытости отображения излишне.

Теорема 7. *Если отображение $f : M^n \to N^n$ двух многообразий счетно-кратно, то существует плотное открытое множество O точек, локальнього гомеоморфизма f.*

Доказательство. Очевидно, это достаточно доказать для ограниченных эвклидовых областей.

Итак, пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — счетно-кратное отображение. Обозначим через S_{pq} множество тех $x \in D$, для которых найдется точка x', такая, что $f(x') = f(x)$ и $\frac{1}{p} \leq \rho(x', x) \leq \frac{1}{q}$ $(p, q = 1, 2, \ldots)$; легко видеть, что каждое S_{pq} — замкнуто. Множество $C_p = D \setminus \bigcup_q S_{pq}$ обладает тогда следующим свойством: замкнутая $\frac{1}{p}$-окрестность каждой его точки x не содержит отличных от иее точек из $f^{-1}f(x)$. Каждое C_p — типа G_δ, а $\bigcup_p C_p$ — плотно в D, поскольку каждое непустое $f^{-1}(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$, содержит изолированные точки.

Мы покажем теперь, что $\bigcup_p C_p$ всюду второй категории в D. Покажем сначала, что все C_p не могут быть нигде не плотными в D. Пусть это не так и все C_p, а потому и $\overline{C}_p$ — нигде не плотны в D. Выберем произвольную точку $x \in C_p$ и такую ее окрестность $U(x)$, $\overline{U} \subset D$, чтобы $d(U) < \frac{1}{2p}$ и $f\,|_U$ было замкнутым (§1 гл. VIII).

Обозначим $C'_p = C_p \cap U$ и предположим, что $f\overline{C}'_p$ содержит некоторый шар $\overline{V}$; тогда fC'_p плотно в $\overline{V}$. Но тогда и $f^{-1}fC'_p$ будет плотным в открытом множестве $f^{-1}V$; это следует из того, что образ каждой подобласти из $f^{-1}V$ содержит внутренние точки: ведь f — нульмерно. Возьмем V_0, $\overline{V}_0 \subset V$; компакт $f^{-1}\overline{V}_0 \cap \overline{C}'_p = C_p$ принадлежит открытому множеству $f^{-1}V$ и, следовательно, лишь конечному числу его компонент. Одну из них, которая содержит точки $f^{-1}V_0$, обозначим через $g : g \subset f^{-1}V$. В каждой компоненте открытого множества $f^{-1}V_0 \cap g$ множество $f^{-1}fC'_p$ всюду плотно, а так как $C'_p \subset C_p$ нигде не плотно в U то найдется точка $x' \inf^{-1} fC'_p$, такая, что $x' \notin C'_p$. Наконец, возьмем точку $x' \in C'_p$, лля которой $f(x_0) = f(x')$. По построению $x_0 \neq x'$ и $\rho(x_0, x') < \frac{1}{2\rho}$, но это противоречит определению точек множества $C_p \supset C'_p$.

Из доказанного следует, что в предположении нигде не плотности C_p образ компакта $\overline{C}_p$ (ведь $\rho(C_p, \partial D) \geq \frac{1}{P}!$) также нигде не плотен в $\mathbb{R}^n$.

Предполагая снова, что все C_p нигде не плотны, рассмотрим множества $A = \bigcup_p \overline{C}_p$ и $B = f^{-1}fA$; по доказанному это — множества первой категории (и типа F_σ). Возьмем произвольно $x_0 \in D \setminus B$; тогда $f^{-1}f(x_0) \subset D \setminus A$. Но $f^{-1}f(x_0)$ обязательно содержит изолированные точки, т. е. пересекается с некоторыми из C_p, но это противоречит последнему включению.

Итак, множество $\bigcup_p C_p$ (типа $G_{\delta\sigma}$) всегда не первой категории в D. Но этот же вывод мы получим, взяв ограничение f на любой подобласти D; из свойства Бэра для борелевских множеств отсюда и следует, что $\bigcup\limits_p C_p$ всюду второй категории в D.

Из доказанного вытекает, что множество $E \subset D$ тех точек, где существует локальная степень, также — всюду второй категории. По лемме 3 для любого шара $\bar{d} \subset D$ имеем:

$$E \cap \bar{d} = \bigcup_m (F_m \cap \bar{d}).$$

Поскольку слева здесь — множество второй категории (в $\bar{d}$), то на некотором шаре $\bar{d}' \subset \bar{d}$ одно из множеств $F_m \cap \bar{d}$ будет всюду плотным; из замкнутости последнего получаем: $F_m \cap \bar{d} \subset \bar{d}'$, т. е. $\gamma(x) = \mathrm{const} \neq 0$.

Как и в теореме 4 заключаем, что $f\mid_{d'}$ — внутреннее отображение; но тогда в d' имеются точки локального гомеоморфизма (гл. VIII). Из произвольности $\bar{d} \subset D$ отсюда и следует теорема 7.

Желательно было бы максимально приблизить эту теорему по формулировке к теореме 4.