Національна академія наук України
Інститут математики

И.П. Мельниченко, С.А. Плакса

Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля

Киев — 2008

УДК 517.9, 517.5

$\boxed{\text{Мельниченко И.П.}}$, Плакса С.А. **Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля**. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. — 230 с.

В монографии развит алгебраико-аналитический подход к описанию пространственных потенциальных полей, идея которого состоит в построении коммутативных ассоциативных банаховых алгебр и моногенных (то есть дифференцируемых по Гато) функций, принимающих значения в этих алгебрах и имеющих компоненты, удовлетворяющие заданным уравнениям с частными производными. В результате разработан метод построения потенциалов пространственных потенциальных полей с осевой симметрией и функций тока Стокса в виде эффективных в приложениях интегральных представлений, с использованием которых развиты методы решения краевых задач для указанных полей.

Предназначена для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов вузов.

Ответственный редактор:
член-корреспондент НАН Украины П.М. Тамразов

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор В.Я. Гутлянский
доктор физ.-мат. наук, профессор И.А. Шевчук
доктор физ.-мат. наук, профессор Ю.А. Дрозд

Утверждено к печати ученым советом
Института математики НАН Украины

ISBN 966-02-2571-7
ISBN 978-966-02-4648-5

И.П. Мельниченко
С.А. Плакса

Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля

ПРАЦІ

Інституту математики НАН України

Математика та її застосування
Том 71

Засновано в 1994 році

Оглавление

Предисловие

Эта книга задумана нами несколько лет назад, тогда же была начата работа по воплощению замысла. К великому сожалению, скоропостижная смерть одного из авторов — Игоря Петровича Мельниченка — прервала совместную работу.

Игорь Петрович был человеком необыкновенным, неподражаемым и очень самобытным, с разнообразными интересами, включавшими естествознание, обществоведение, искусство, политологию. Широкий круг друзей самых разных профессий отражал многогранность его личности, разносторонним было его творчество. Все, чем бы не занимался: математика, история, живопись, литература, публицистика, — он делал с полной самоотдачей. Игорь Петрович оставил после себя яркие публицистические статьи и книги, отразившие его глубокие исследования по истории, при написании которых он, как настоящий математик, тщательно взвешивая каждое слово, не оставлял свои выводы бездоказательными.

Заканчивая работу над нашей книгой, я снова и снова с болью в сердце вспоминаю так внезапно ушедшего из жизни Игоря Петровича, привлекшего меня к исследованию моногенных функций в коммутативных алгебрах, ассоциированных с уравнениями математической физики. Я безмерно благодарен ему за долголетнее плодотворное сотрудничество, доброжелательность, щедрость в общении и бескорыстную дружбу. Очень надеюсь, что эта книга, в доступной форме реализующая математические идеи моего коллеги и друга, найдет отклик у молодых талантливых математиков, побуждая их к самостоятельному научному творчеству.

С. Плакса

Мельниченко Игорь Петрович

(1938 – 2004)

Игорь Петрович Мельниченко родился 10 февраля 1938 года в Киеве. В 1961 году окончил Киевский государственный университет им. Т.Г. Шевченко, там же в 1966 году защитил кандидатскую диссертацию. С 1970 года работал в Институте математики АН УССР на должности старшего научного сотрудника. В 1970 – 1974 годах им был завершен ряд исследований, начатых в Институте гидромеханики АН УССР и относящихся к динамике движения с большими скоростями. В этот период он получил принципиально новые результаты в задачах стартовых режимов движения гидродинамических объектов, в частности, в случае забора рабочего тела из приграничного слоя.

С 1974 года И.П. Мельниченко сосредоточил свои научные интересы на разработке математического аппарата для решения задач математической физики путем построения функциональных алгебр, ассоциированных с основными эллиптическими уравнениями. Для двумерного бигармонического уравнения и обобщенного бигармонического уравнения (случай анизотропии) им построены коммутативные банаховы алгебры такие, что моногенные функции, заданные в этих алгебрах, имеют компоненты, являющиеся решениями указанных уравнений. В ассоциативных коммутативных алгебрах третьего ранга с единицей над комплексным полем описаны все базисы такие, что компоненты разложения моногенных функций по этим базисам являются решениями трехмерного уравнения Лапласа.

Особого упоминания заслуживают полученные И.П. Мельниченко результаты по разработке указанного алгебраико-аналитического аппарата применительно к задачам пространственных потенциальных полей с осевой симметрией. При этом построена бесконечномерная коммутативная банахова алгебра, в которой главные продолжения аналитических функций комплексной переменной дают возможность при выделении специальных двумерных линейных многообразий этой алгебры получать потенциалы и функции тока Стокса в виде новых эффективных в приложениях интегральных представлений, которые аналогичны представлению плоских гармонических функций интегралами Коши. Применительно к осесимметричным полям этот результат является решением проблемы М.А. Лаврентьева о разработке методов исследования пространственных потенциальных полей, аналогичных методам теории аналитических функций.

Внезапная тяжелая болезнь безжалостно оборвала жизнь Игоря Петровича 19 июня 2004 года. Невосполнимая утрата, постигшая всех его близких, друзей и коллег, тяжелой болью отзывается в наших сердцах.

Игоря Петровича отличали высокая культура и исключительная доброжелательность к людям. Он пользовался большим авторитетом у всех, кто его знал. Невольное восхищение вызывали его кипучая энергия и работоспособность, широта интересов и эрудиция, многогранные таланты в сочетании с отзывчивостью и неподдельной искренностью. Таким он навсегда останется в нашей памяти.

Почетный директор ИМ НАН Украины академик	Ю.А. Митропольский
Директор ИМ НАН Украины академик	А.М. Самойленко
Член-корреспондент НАН Украины	П.М. Тамразов

Введение

Важнейшим достижением математики является описание плоских потенциальных полей аналитическими функциями комплексной переменной.

Потенциал $u(x,y)$ плоского стационарного потенциального соленоидального поля и функция тока $v(x,y)$, удовлетворяющие условиям Коши–Римана

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\,, \tag{1}$$

образуют комплексный потенциал $F(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, являющийся аналитической функцией комплексной переменной $x + iy$. В свою очередь, каждая аналитическая функция $F(x + iy)$ удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа

$$\Delta_2 F := \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

вследствие равенства $1^2 + i^2 = 0$ для единицы 1 и мнимой единицы i алгебры комплексных чисел.

Эффективность применения методов теории аналитических функций комплексной переменной к исследованию плоских потенциальных полей побуждает математиков к развитию аналогичных методов для пространственных полей. Проблема разработки таких методов для пространственных потенциальных полей очерчена М.А. Лаврентьевым (см., например, [32, с. 205]).

В этом направлении исследовались разные пути. Ниже развивается алгебраико-аналитический подход к решению указанной проблемы, идея которого состоит в построении коммутативных ассоциативных банаховых алгебр таких, что дифференцируемые по Гато функции, принимающие значения в этих алгебрах, имеют компоненты, удовлетворяющие заданным уравнениям с частными производными.

Так, рассматривая в коммутативной ассоциативной банаховой алгебре $\mathbb{A}$ ранга $n \geq 3$ дважды дифференцируемую по Гато гиперкомплексную функцию $\Phi(\zeta)$ переменной $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$, где x, y, z — действительные числа и векторы e_1, e_2, e_3 принадлежат базису алгебры $\mathbb{A}$, замечаем, что

$$\Delta_3\Phi(\zeta) := \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \Phi''(\zeta)\,(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)\,.$$

Следовательно, каждая из таких функций удовлетворяет трехмерному уравнению Лапласа $\Delta_3\,\Phi = 0$ при выполнении равенства

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0 \tag{3}$$

для базисных элементов e_1, e_2, e_3.

В главе 1 описываются все базисы коммутативных ассоциативных алгебр третьего ранга с главной единицей над полем комплексних чисел, удовлетворяющие равенству (3), а также рассматривается бесконечномерная коммутативная ассоциативная банахова алгебра $\mathbb{F}$, в которой выполняется равенство (3).

В главе 2 указанный алгебраико-аналитический подход применяется к описанию пространственных потенциальных полей с осевой симметрией при помощи моногенных функций, принимающих значения в бесконечномерной коммутативной банаховой алгебре $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, ассоциированной с этими полями. В результате реализации такого подхода установлена связь между основными характеристиками (потенциал и функция тока Стокса) пространственного потенциального поля с осевой симметрией и аналитическими функциями гиперкомплексной переменной, которая аналогична связи плоских гармонических функций с интегралами Коши. При этом разработан эффективный способ построения осесимметричных потенциалов и функций тока Стокса при помощи компонент разложения по элементам базиса моногенных функций гиперкомплексной переменной, которые, в свою очередь, строятся в явном виде как главные продолжения аналитических функций комплексной переменной.

Установленные таким способом интегральные представления осесимметричного потенциала и функции тока Стокса применяются затем в главе 3 к решению краевых задач в меридианной плоскости пространственного потенциального поля с осевой симметрией.

Глава 1. Коммутативные алгебры, ассоциированные с трехмерным уравнением Лапласа

§ 1. Основные понятия теории пространственных стационарных потенциальных соленоидальных векторных полей

Рассмотрим пространственное стационарное векторное поле, заданное вектор-функцией $\mathbf{V}(x, y, z)$ декартовых координат x, y, z. При этом вектор $\mathbf{V}$ определяется тремя скалярными функциями $v_1 := v_1(x, y, z)$, $v_2 := v_2(x, y, z)$, $v_3 := v_3(x, y, z)$, задающими его координаты в точке (x, y, z), а именно: $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$.

Пространственное стационарное векторное поле $\mathbf{V}(x, y, z)$ называют *потенциальным*, если существует скалярная потенциальная функция (*потенциал*) $u(x, y, z)$, градиент которой $\operatorname{grad} u$ тождественно равен вектору $\mathbf{V}$. В декартовых координатах равенство $\mathbf{V} = \operatorname{grad} u$ равносильно трем равенствам

$$v_1 = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \qquad v_2 = \frac{\partial u}{\partial y}\,, \qquad v_3 = \frac{\partial u}{\partial z}\,. \tag{1.1}$$

В односвязной области пространства векторное поле $\mathbf{V}$ потенциально тогда и только тогда, когда его ротор, определяемый в декартовых координатах равенством

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} := \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\,,\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\,,\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right),$$

тождественно равен нулю: $\operatorname{rot}\mathbf{V} \equiv 0$.

Если тождественно равна нулю дивергенция поля:

$$\operatorname{div}\mathbf{V} := \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \equiv 0,$$

то векторное поле $\mathbf{V}$ называется *соленоидальным.*

Таким образом, вектор $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$, задающий стационарное потенциальное соленоидальное поле, удовлетворяет системе уравнений

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0\,, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{V} = 0\,, \tag{1.2}$$

которые запишем также в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0\,,\\
&\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0\,,\\
&\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0\,,\\
&\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0\,.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Если векторное поле $\mathbf{V}(x,y,z)$ потенциально и соленоидально в некоторой области пространства, то его потенциал $u(x,y,z)$ в этой области удовлетворяет трехмерному уравнению Лапласа

$$\Delta_3\, u(x,y,z) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u(x,y,z) = 0\,, \tag{1.4}$$

которое является следствием равенств $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta_3 u$ и $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$.

В то же время каждое решение уравнения (1.4) порождает вектор $\mathbf{V} = \operatorname{grad} u$, удовлетворяющий системе уравнений (1.2), при этом компоненты (1.1) вектора $\mathbf{V}$, в свою очередь, являются решениями уравнения (1.4).

Функции, непрерывные вместе со своими производными до второго порядка и удовлетворяющие уравнению (1.4), называются *гармоническими*, а решения системы (1.2) — *гармоническими векторами.*

§ 2. Постановка задачи о выделении в алгебре гармонической тройки векторов

По-видимому, первые попытки построения алгебры, ассоциированной с трехмерным уравнением Лапласа (1.4) в том смысле, что дифференцируемые функции со значениями в этой алгебре имеют компоненты, удовлетворяющие уравнению (1.4), были сделаны Гамильтоном, однако, после построения алгебры кватернионов вопрос о построении какой-либо другой алгебры им не рассматривался (см. [26, с. 223]).

В работе [39] рассмотрена задача о построении коммутативных ассоциативных банаховых алгебр с главной единицей таких, что моногенные (то есть дифференцируемые по Гато) функции со значениями в этих алгебрах имеют компоненты, удовлетворяющие уравнению (1.4). Очевидно, что задача о построении алгебр с указанными свойствами возникает как попытка обобщения фундаментальной связи между алгеброй комплексных чисел и двумерным уравнением Лапласа, которая, как это хорошо известно, состоит в том, что с одной стороны, аналитические функции комплексной переменной удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа (2), а с другой стороны, плоские гармонические функции, связанные между собой условиями Коши – Римана (1), являются компонентами некоторой аналитической функции комплексной переменной.

Пусть $\mathbb{A}$ — коммутативная ассоциативная банахова алгебра (над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ или над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$) с базисом $\{e_k\}_{k=1}^{n}$, $3 \le n \le \infty$. Выделим в алгебре $\mathbb{A}$ линейную оболочку $E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ над полем $\mathbb{R}$, порожденную векторами e_1, e_2, e_3. Области Q трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ поставим в соответствие конгруэнтную ей область $Q_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : (x, y, z) \in Q\}$ в E_3.

Функцию $\Phi : Q_\zeta \longrightarrow \mathbb{A}$ назовем *моногенной* в Q_ζ, если Φ является дифференцируемой по Гато в каждой точке области Q_ζ, то есть если для каждого $\zeta \in Q_\zeta$ существует элемент $\Phi'(\zeta)$ алгебры $\mathbb{A}$ такой, что выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \big(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\big)\, \varepsilon^{-1} = h\, \Phi'(\zeta) \qquad \forall\; h \in E_3\,. \tag{1.5}$$

Отметим, что если найдется по меньшей мере одна дважды дифференцируемая по Гато функция $\Phi : Q_\zeta \longrightarrow \mathbb{A}$, которая хотя бы в одной точке $\zeta := xe_1 + ye_2 + ze_3 \in Q_\zeta$ удовлетворяет уравнению (1.4) и неравенству $\Phi''(\zeta) \neq 0$, то в этом случае базисные элементы e_1, e_2, e_3

необходимо удовлетворяют условию

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0\,. \tag{1.6}$$

Действительно, последовательно выбирая в качестве вектора h в равенствах вида (1.5), определяющих производные $\Phi'(\zeta)$ и $\Phi''(\zeta)$, базисные элементы e_1, e_2, e_3, получаем равенства

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = e_1^2\,\Phi''(\zeta), \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = e_2^2\,\Phi''(\zeta), \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = e_3^2\,\Phi''(\zeta),$$

поэтому

$$\Delta_3\Phi(\zeta) := \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \Phi''(\zeta)(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \tag{1.7}$$

и, следовательно, равенство $\Delta_3\Phi(\zeta) = 0$ при условии $\Phi''(\zeta) \neq 0$ равносильно равенству (1.6).

Алгебру $\mathbb{A}$ назовем ***гармонической***, если в ней можно выделить хотя бы одну тройку линейно независимых векторов $\{e_1, e_2, e_3\}$, удовлетворяющих равенству (1.6) при условии, что $e_j^2 \neq 0$ при $j = 1, 2, 3$. Указанную тройку векторов $\{e_1, e_2, e_3\}$ также назовем ***гармонической***.

Заметим, что условие $e_j^2 \neq 0$ при $j = 1, 2, 3$ исключает из рассмотрения тривиальный случай расширения поля комплексных чисел до алгебры третьего ранга над полем $\mathbb{C}$. В качестве примера такой алгебры может служить алгебра с главной единицей $e_1 = 1$, задаваемая таблицей умножения: $e_2^2 = -1$, $e_2e_3 = e_3e_2 = ie_3$, $e_3^2 = 0$.

Далее в этой главе рассматривается *задача о выделении гармонической тройки векторов в коммутативной ассоциативной алгебре с главной единицей.*

§ 3. Необходимые и достаточные условия гармоничности базиса $\{1, e_2, e_3\}$ в терминах структурных констант алгебры

Заметим, что алгебра третьего ранга с гармоническим базисом (если такая существует) дает наиболее простое решение задачи, поставленной в § 2.

Исследуем, при каких условиях в коммутативной ассоциативной алгебре $\mathbb{A}$ третьего ранга с главной единицей существует гармонический базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, где $e_1 = 1$ — главная единица алгебры.

Пусть базисные элементы алгебры $\mathbb{A}$ умножаются по закону

$$e_i\, e_j = \sum_{k=1}^{3} \gamma_{jk}^{i}\, e_k\,, \qquad i,j = 1,2,3\,, \tag{1.8}$$

где γ_{jk}^{i} — структурные константы алгебры, причем при каждом $i = 2,3$ хотя бы одно из чисел γ_{i1}^{i}, γ_{i2}^{i}, γ_{i3}^{i} отлично от нуля.

Теорема 1.1. *Для того чтобы алгебра $\mathbb{A}$ третьего ранга с главной единицей e_1 была коммутативной и ассоциативной, а ее базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ при этом был гармоническим, необходимо и достаточно, чтобы для структурных констант алгебры выполнялись равенства*

$$\begin{aligned}
&\gamma_{21}^{3} = \gamma_{31}^{2}\,, \qquad \gamma_{22}^{3} = \gamma_{32}^{2}\,, \qquad \gamma_{23}^{3} = \gamma_{33}^{2}\,,\\
&\gamma_{31}^{3} = -\gamma_{21}^{2} - 1\,, \qquad \gamma_{32}^{3} = -\gamma_{22}^{2}\,, \qquad \gamma_{33}^{3} = -\gamma_{23}^{2}\,,\\
&\gamma_{21}^{2}\,\gamma_{32}^{2} + \gamma_{31}^{2}\,\gamma_{33}^{2} = -\gamma_{23}^{2} - \gamma_{21}^{2}\,\gamma_{23}^{2} + \gamma_{31}^{2}\,\gamma_{22}^{2}\,,\\
&\gamma_{31}^{2}\,\gamma_{32}^{2} - \gamma_{33}^{2} - \gamma_{21}^{2}\,\gamma_{33}^{2} = -\gamma_{21}^{2}\,\gamma_{22}^{2} - \gamma_{31}^{2}\,\gamma_{23}^{2}\,,\\
&\gamma_{31}^{2} + \gamma_{32}^{2}\,\gamma_{33}^{2} = -\gamma_{22}^{2}\,\gamma_{23}^{2}\,,\\
&\gamma_{32}^{2}\,\gamma_{32}^{2} - \gamma_{22}^{2}\,\gamma_{33}^{2} = -1 - \gamma_{21}^{2} - \gamma_{22}^{2}\,\gamma_{22}^{2} - \gamma_{32}^{2}\,\gamma_{23}^{2}\,,\\
&\gamma_{33}^{2}\,\gamma_{33}^{2} + \gamma_{23}^{2}\,\gamma_{32}^{2} = \gamma_{21}^{2} + \gamma_{33}^{2}\,\gamma_{22}^{2} - \gamma_{23}^{2}\,\gamma_{23}^{2}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Доказательство. *Необходимость.* Поскольку алгебра $\mathbb{A}$ коммутативна, то выполняются равенства

$$\gamma_{ik}^{j} = \gamma_{jk}^{i}\,, \qquad i,j,k = 1,2,3\,. \tag{1.10}$$

Кроме того, ассоциативность умножения в алгебре $\mathbb{A}$ равносильна выполнению соотношений (см., например, [86, с. 9])

$$\sum_{i=1}^{3} \gamma_{ks}^{i}\,\gamma_{ji}^{m} = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{is}^{m}\,\gamma_{ki}^{j}\,, \qquad k,s,m,j = 1,2,3\,. \tag{1.11}$$

Поскольку e_1 — главная единица алгебры $\mathbb{A}$, то

$$\gamma_{11}^{1} = \gamma_{22}^{1} = \gamma_{33}^{1} = 1\,, \quad \gamma_{12}^{1} = \gamma_{13}^{1} = \gamma_{21}^{1} = \gamma_{23}^{1} = \gamma_{31}^{1} = \gamma_{32}^{1} = 0\,. \tag{1.12}$$

Теперь с учетом равенств (1.10), (1.12) легко устанавливаем, что среди условий ассоциативности (1.11) имеется лишь 5 нетривиальных условий:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{21}^2\,\gamma_{32}^2+\gamma_{31}^2\,\gamma_{33}^2=\gamma_{31}^2\,\gamma_{22}^2+\gamma_{31}^3\,\gamma_{23}^2\,,\\
&\gamma_{31}^2\,\gamma_{32}^2+\gamma_{31}^3\,\gamma_{33}^2=\gamma_{21}^2\,\gamma_{32}^3+\gamma_{31}^2\,\gamma_{33}^3\,,\\
&\gamma_{31}^2+\gamma_{32}^2\,\gamma_{33}^2=\gamma_{32}^3\,\gamma_{23}^2\,,\\
&\gamma_{32}^2\,\gamma_{32}^2+\gamma_{32}^3\,\gamma_{33}^2=\gamma_{31}^3+\gamma_{22}^2\,\gamma_{32}^3+\gamma_{32}^2\,\gamma_{33}^3\,,\\
&\gamma_{33}^2\,\gamma_{33}^2+\gamma_{23}^2\,\gamma_{32}^2=\gamma_{21}^2+\gamma_{33}^2\,\gamma_{22}^2+\gamma_{33}^3\,\gamma_{23}^2\,.
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

Вдобавок, условие гармоничности базиса (1.6) влечет выполнение равенств

$$
1+\gamma_{21}^2+\gamma_{31}^3=0\,,\qquad \gamma_{22}^2+\gamma_{32}^3=0\,,\qquad \gamma_{23}^2+\gamma_{33}^3=0\,. \tag{1.14}
$$

Поэтому, выражая γ_{31}^3, γ_{32}^3, γ_{33}^3 из равенств (1.14) и подставляя соответствующие выражения в равенства (1.13), убеждаемся в справедливости всех соотношений (1.9).

Достаточность. Поскольку e_1 — главная единица алгебры $\mathbb{A}$, то выполняются равенства (1.12), а также равенства

$$
\gamma_{12}^2=\gamma_{13}^3=1\,,\quad \gamma_{11}^2=\gamma_{13}^2=\gamma_{11}^3=\gamma_{12}^3=0\,. \tag{1.15}
$$

Следствием равенств (1.9), (1.12), (1.15), являются соотношения (1.10), (1.11), т.е. алгебра $\mathbb{A}$ коммутативна и ассоциативна.

Кроме того, равенства (1.14), являющиеся следствием системы (1.9), влекут выполнение равенства (1.6), т.е. базис $\{e_1,e_2,e_3\}$ является гармоническим. Теорема доказана.

В следующей теореме устанавливается, что система (1.9) с неизвестными структурными константами не имеет решений в поле действительных чисел.

Теорема 1.2. *В коммутативной ассоциативной алгебре третьего ранга с главной единицей e_1 над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ базис $\{e_1,e_2,e_3\}$ не является гармоническим.*

Доказательство. Складывая последние два из равенств (1.9), получаем равенство

$$
1+(\gamma_{22}^2-\gamma_{33}^2)^2+(\gamma_{23}^2+\gamma_{32}^2)^2=0\,,
$$

которое не может выполняться ни для каких структурных констант из поля $\mathbb{R}$. Следовательно, по теореме 1.1 базис $\{e_1,e_2,e_3\}$ не является гармоническим. Теорема доказана.

Ниже будет показано, что система (1.9) с неизвестными структурными константами имеет решения в поле комплексных чисел.

§ 4. Моногенные функции в коммутативной ассоциативной алгебре третьего ранга с главной единицей. Условия Коши–Римана

4.1. Необходимые и достаточные условия моногенности. Пусть $\mathbb{A}$ — коммутативная ассоциативная банахова алгебра третьего ранга с главной единицей e_1 над полем $\mathbb{P}$, при этом допускается равенство $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{P} = \mathbb{C}$. Установим необходимые и достаточные условия моногенности функции $\Phi : Q_\zeta \longrightarrow \mathbb{A}$, где Q_ζ — область в E_3.

Теорема 1.3. *Для того чтобы функция $\Phi : Q_\zeta \longrightarrow \mathbb{A}$ вида*

$$\Phi(xe_1 + ye_2 + ze_3) = \sum_{k=1}^{3} U_k(x, y, z)\ e_k, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}\,, \tag{1.16}$$

где $U_k : Q \longrightarrow \mathbb{P}$, была моногенной в области $Q_\zeta \subset E_3$, необходимо и достаточно, чтобы функции U_1, U_2, U_3 были дифференцируемыми в области Q и при этом в Q выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_1}{\partial y} = \gamma_{21}^2\,\frac{\partial U_2}{\partial x} + \gamma_{31}^2\,\frac{\partial U_3}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_2}{\partial y} = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \gamma_{22}^2\,\frac{\partial U_2}{\partial x} + \gamma_{32}^2\,\frac{\partial U_3}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_3}{\partial y} = \gamma_{23}^2\,\frac{\partial U_2}{\partial x} + \gamma_{33}^2\,\frac{\partial U_3}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_1}{\partial z} = \gamma_{31}^2\,\frac{\partial U_2}{\partial x} + \gamma_{31}^3\,\frac{\partial U_3}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_2}{\partial z} = \gamma_{32}^2\,\frac{\partial U_2}{\partial x} + \gamma_{32}^3\,\frac{\partial U_3}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_3}{\partial z} = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \gamma_{33}^2\,\frac{\partial U_2}{\partial x} + \gamma_{33}^3\,\frac{\partial U_3}{\partial x}\,.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Доказательство. *Необходимость.* Если функция (1.16) моногенна в области Q_ζ, то при $h = e_1$ равенство (1.5) превращается в равенство

$$\Phi'(\zeta) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial U_k(x, y, z)}{\partial x}\ e_k\,, \qquad \zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in Q_\zeta\,. \tag{1.18}$$

Теперь, полагая в равенстве (1.5) сначала $h = e_2$, а затем $h = e_3$, с учетом равенств (1.8) получаем условия (1.17) для компонент моногенной функции (1.16).

Достаточность. Пусть $\zeta := xe_1 + ye_2 + ze_3 \in Q_\zeta$, $h := h_1e_1 + h_2e_2 + h_3e_3$, где $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$, и положительное число ε такое, что $\zeta + \varepsilon h \in Q_\zeta$. Тогда, используя обозначения $\partial U_k/\partial x := \partial U_k(x,y,z)/\partial x$, $k = 1,2,3$, и учитывая равенства (1.17), имеем

$$[\Phi(\zeta+\varepsilon h)-\Phi(\zeta)]\varepsilon^{-1} - h\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\,e_k =$$

$$= \varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{3}\Big(U_k(x+\varepsilon h_1, y+\varepsilon h_2, z+\varepsilon h_3) - U_k(x,y,z)\Big)e_k -$$

$$-\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\,h_1 + \left(\gamma_{21}^2\,\frac{\partial U_2}{\partial x} + \gamma_{31}^2\,\frac{\partial U_3}{\partial x}\right)h_2 + \left(\gamma_{31}^2\,\frac{\partial U_2}{\partial x} + \gamma_{31}^3\,\frac{\partial U_3}{\partial x}\right)h_3\right)e_1 -$$

$$-\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\,h_1 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \gamma_{22}^2\,\frac{\partial U_2}{\partial x} + \gamma_{32}^2\,\frac{\partial U_3}{\partial x}\right)h_2 + \left(\gamma_{32}^2\,\frac{\partial U_2}{\partial x} + \gamma_{32}^3\,\frac{\partial U_3}{\partial x}\right)h_3\right)e_2 -$$

$$-\left(\frac{\partial U_3}{\partial x}\,h_1 + \left(\gamma_{23}^2\,\frac{\partial U_2}{\partial x} + \gamma_{33}^2\,\frac{\partial U_3}{\partial x}\right)h_2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \gamma_{33}^2\,\frac{\partial U_2}{\partial x} + \gamma_{33}^3\,\frac{\partial U_3}{\partial x}\right)h_3\right)e_3 =$$

$$= \varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{3}\left(U_k(x+\varepsilon h_1, y+\varepsilon h_2, z+\varepsilon h_3) - U_k(x,y,z) - \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\,\varepsilon h_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial y}\,\varepsilon h_2 - \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial z}\,\varepsilon h_3\right)e_k\,. \tag{1.19}$$

Вследствие дифференцируемости функций U_1, U_2, U_3 в области Q справедливы соотношения

$$U_k(x+\varepsilon h_1, y+\varepsilon h_2, z+\varepsilon h_3) - U_k(x,y,z) - \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\,\varepsilon h_1 -$$

$$-\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial y}\,\varepsilon h_2 - \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial z}\,\varepsilon h_3 = o(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0, \quad k = 1,2,3\,.$$

Поэтому, переходя к пределу в равенстве (1.19) при $\varepsilon \to 0$, получаем равенство (1.5), в котором производная $\Phi'(\zeta)$ выражается равенством (1.18). Теорема доказана.

Заметим, что условия (1.17) по своей природе аналогичны условиям Коши – Римана для моногенных функций комплексной переменной.

4.2. Главные продолжения голоморфных функций комплексной переменной. В случае, когда рассматривается коммутативная ассоциативная банахова алгебра $\mathbb{A}$ с главной единицей e_1 над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, важный подкласс класса моногенных функций, принимающих значения в алгебре $\mathbb{A}$, составляют так называемые главные продолжения голоморфных функций комплексной переменной [87, с. 182].

Для голоморфной в круге $\{t \in \mathbb{C} : |t - t_0| < r,\, t_0 \in \mathbb{C}\}$ комплексной плоскости функции $F(t)$ ее *главным продолжением* в коммутативную банахову алгебру $\mathbb{A}$ называют функцию

$$\Phi_F(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^{(n)}(t_0)}{n!}\, (\zeta - t_0 e_1)^n,$$

являющуюся моногенной в шаре $\{\zeta \in \mathbb{A} : \|\zeta - t_0 e_1\|_{\mathbb{A}} < r\}$, где $\|\cdot\|_{\mathbb{A}}$ обозначает норму в алгебре $\mathbb{A}$.

Если функция $F(t)$ голоморфна в некоторой области G комплексной плоскости, а $B(G)$ есть объединение всех шаров $\{\zeta \in \mathbb{A} : \|\zeta - t_0 e_1\|_{\mathbb{A}} < r\}$ таких, что соответствующие круги $\{t \in \mathbb{C} : |t - t_0| < r, t_0 \in \mathbb{C}\}$ заключены в G, то существует единственное главное продолжение $\Phi_F(\zeta)$ функции $F(t)$ в каждый из указанных шаров, то есть в область $B(G)$, при этом справедливо равенство

$$\Phi_F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\zeta} F(t)\, (t - \zeta)^{-1}\, dt \tag{1.20}$$

при всех $\zeta \in B(G)$, где Γ_ζ — спрямляемый контур, лежащий в области G и охватывающий *спектр* элемента ζ, то есть множество комплексных чисел t, при которых элемент $(t - \zeta)$ необратим в алгебре $\mathbb{A}$.

Пусть $D(G)$ — множество тех $\zeta \in \mathbb{A}$, спектр которых содержится в области G. Тогда $D(G)$ — открытое множество и функция (1.20) является локально моногенной на $D(G)$.

§ 5. Построение гармонической алгебры третьего ранга над полем комплексных чисел

В следующей теореме строится гармоническая алгебра третьего ранга над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Теорема 1.4. *Пусть $\mathbb{A}$ — коммутативная ассоциативная алгебра, для базисных элементов e_1, e_2, e_3 которой выполняются* *следующие правила умножения:*

$$
\begin{aligned}
&e_k\, e_1 = e_k, \qquad k = 1, 2, 3;\\
&e_2\, e_2 = -\frac{1}{2}\, e_1 - \frac{i}{2}\,(\sin\omega)\, e_2 + \frac{i}{2}\,(\cos\omega)\, e_3\,,\\
&e_2\, e_3 = \frac{i}{2}\,(\cos\omega)\, e_2 + \frac{i}{2}\,(\sin\omega)\, e_3\,,\\
&e_3\, e_3 = -\frac{1}{2}\, e_1 + \frac{i}{2}\,(\sin\omega)\, e_2 - \frac{i}{2}\,(\cos\omega)\, e_3\,,
\end{aligned}
$$

где i — мнимая комплексная единица, $\omega \in \mathbb{C}$. Тогда компоненты моногенных функций вида (1.16) *порождают гармонический вектор* $\mathbf{V} := (U_1, -\frac{1}{2}\,U_2, -\frac{1}{2}\,U_3)$.

Доказательство. Покажем, что существуют комплексные структурные константы, удовлетворяющие системе (1.9), при которых следствием условий (1.17) являются равенства (1.2) для вектора $\mathbf{V} := (U_1, -\frac{1}{2}\,U_2, -\frac{1}{2}\,U_3)$, которые запишем в развернутом виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_2}{\partial y} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_3}{\partial z} = 0\,,\\
&\frac{\partial U_3}{\partial y} - \frac{\partial U_2}{\partial z} = 0\,,\\
&\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_2}{\partial x} = 0\,,\\
&\frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_3}{\partial x} = 0\,.
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

Полагая в (1.17) $\gamma_{21}^2 = \gamma_{31}^3 = -1/2$ и $\gamma_{31}^2 = 0$, получаем последние два уравнения из (1.21). При $\gamma_{32}^2 = \gamma_{23}^2$ и $\gamma_{33}^2 = \gamma_{32}^3 = -\gamma_{22}^2$ из условий (1.17) следует второе из уравнений (1.21). Полагая также $\gamma_{33}^3 = -\gamma_{23}^2$ и складывая при этом второе и последнее из условий (1.17), получаем первое из уравнений (1.21).

Таким образом, при сделанных предположениях все структурные константы, входящие в систему (1.9), будут определены после нахождения констант $\gamma_{22}^2, \gamma_{23}^2$, для которых из (1.9) получаем уравнение $(\gamma_{22}^2)^2 + (\gamma_{23}^2)^2 = -1/4$. Этому уравнению, в частности, удовлетворяют константы $\gamma_{22}^2 = -\frac{i}{2}\sin\omega$, $\gamma_{23}^2 = \frac{i}{2}\cos\omega$. Теорема доказана.

Необходимые и достаточные условия (1.17) моногенности функции (1.16) в построенной в теореме 1.4 алгебре $\mathbb{A}$ приобретают вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_1}{\partial y} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_2}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial U_1}{\partial z} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_3}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_2}{\partial y} = \frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{i}{2}\,(\sin\omega)\,\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{i}{2}\,(\cos\omega)\,\frac{\partial U_3}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_2}{\partial z} = \frac{\partial U_3}{\partial y} = \frac{i}{2}\,(\cos\omega)\,\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{i}{2}\,(\sin\omega)\,\frac{\partial U_3}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_3}{\partial z} = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{i}{2}\,(\sin\omega)\,\frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{i}{2}\,(\cos\omega)\,\frac{\partial U_3}{\partial x}\,.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Из теоремы 1.4 следует, что действительные и мнимые части компонент моногенных функций вида (1.16) порождают пару гармонических векторов $\mathbf{V_1} := (\mathrm{Re}\, U_1,\ -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\, U_2,\ -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\, U_3)$, $\mathbf{V_2} :=$ $:= (\mathrm{Im}\, U_1,\ -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\, U_2,\ -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\, U_3)$, сопряженных между собой условиями (1.22). При этом понятие сопряженности гармонических векторов аналогично понятию сопряженности плоских гармонических функций, связанных между собой классическими условиями Коши – Римана и являющихся компонентами аналитической функции комплексной переменной.

§ 6. Коммутативные ассоциативные алгебры третьего ранга $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3$, $\mathbb{A}_4$. Теорема о не существовании гармонических базисов в алгебре $\mathbb{A}_4$

6.1. Алгебры третьего ранга $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3$, $\mathbb{A}_4$. Существуют всего четыре коммутативные ассоциативные с главной единицей алгебры третьего ранга (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Если в качестве их образующих выбрать нильпотентные и идемпотентные элементы, то таблицы умножения рассматриваемых алгебр будут иметь наиболее простой вид. Приведем их.

Через $\mathbb{A}_1$ обозначим полупростую алгебру с базисом $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3\}$ и таблицей умножения

$$\mathcal{I}_1^2 = \mathcal{I}_1, \quad \mathcal{I}_2^2 = \mathcal{I}_2, \quad \mathcal{I}_3^2 = \mathcal{I}_3, \quad \mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_2\mathcal{I}_3 = 0, \tag{1.23}$$

при этом разложение главной единицы имеет вид: $1 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3$.

Другие алгебры содержат радикалы. Так, через $\mathbb{A}_2$ обозначим алгебру с базисом $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \rho\}$ и таблицей умножения

$$\mathcal{I}_1^2 = \mathcal{I}_1, \quad \mathcal{I}_2^2 = \mathcal{I}_2, \quad \mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 = 0, \quad \rho^2 = 0, \;\; \mathcal{I}_1\rho = 0, \;\; \mathcal{I}_2\rho = \rho, \tag{1.24}$$

при этом главная единица алгебры представляется в виде $1 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$.

Алгебры $\mathbb{A}_3$ и $\mathbb{A}_4$ с базисом $\{1, \rho_1, \rho_2\}$ не имеют идеалов, порождаемых идемпотентами. Таблица умножения базисных элементов алгебры $\mathbb{A}_3$ имеет вид:

$$\rho_1^2 = \rho_2, \qquad \rho_2^2 = 0, \qquad \rho_1\rho_2 = 0\,, \tag{1.25}$$

а в алгебре $\mathbb{A}_4$ базисные элементы умножаются по закону

$$\rho_1^2 = \rho_2^2 = \rho_1\rho_2 = 0\,. \tag{1.26}$$

6.2. Теорема о не существовании гармонических базисов в алгебре $\mathbb{A}_4$. В следующей теореме устанавливается, что в алгебре $\mathbb{A}_4$ гармонических базисов не существует.

Теорема 1.5. *Алгебра $\mathbb{A}_4$ не является гармонической.*

Доказательство. Предположим противное: пусть в $\mathbb{A}_4$ имеется базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, удовлетворяющий равенству (1.6).

Отметим, прежде всего, что в $\mathbb{A}_4$ гармонический базис должен состоять из обратимых элементов. Действительно, элементы гармонического базиса не могут принадлежать радикалу алгебры $\mathbb{A}_4$, а в $\mathbb{A}_4$ такие элементы обратимы.

Тогда базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, удовлетворяющий равенству (1.6), преобразуется в гармонический базис $\{1, e_2\,(e_1)^{-1}, e_3\,(e_1)^{-1}\}$, содержащий главную единицу.

Поэтому, не нарушая общности, полагаем $e_1 = 1$. Рассмотрим разложение элементов базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ по базису $\{1, \rho_1, \rho_2\}$:

$$\begin{aligned} &e_1 = 1, \\ &e_2 = n_1 + n_2\rho_1 + n_3\rho_2, \\ &e_3 = m_1 + m_2\rho_1 + m_3\rho_2, \end{aligned} \tag{1.27}$$

где n_k и m_k при $k = 1, 2, 3$ — комплексные числа. Поскольку система (1.27) должна быть разрешима относительно $1, \rho_1, \rho_2$, то матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}$$

является неособой, то есть ее определитель отличен от нуля. Отсюда для коэффициентов системы (1.27) получаем неравенство

$$n_2 m_3 - n_3 m_2 \neq 0. \tag{1.28}$$

Следствием разложений (1.27) и правил умножения (1.26) являются равенства

$$e_2^2 = n_1^2 + 2n_1 n_2 \rho_1 + 2n_1 n_3 \rho_2, \qquad e_3^2 = m_1^2 + 2m_1 m_2 \rho_1 + 2m_1 m_3 \rho_2,$$

с использованием которых в равенстве $1 + e_2^2 + e_3^2 = 0$ приходим к следующим необходимым условиям существования гармонического базиса $\{1, e_2, e_3\}$:

$$\begin{aligned} 1 + n_1^2 + m_1^2 &= 0, \\ n_1 n_2 + m_1 m_2 &= 0, \\ n_1 n_3 + m_1 m_3 &= 0. \end{aligned} \tag{1.29}$$

После вычитания третьего уравнения системы (1.29), умноженного на n_2, и второго, умноженного на n_3, получаем

$$m_1(n_2 m_3 - n_3 m_2) = 0. \tag{1.30}$$

А после вычитания второго уравнения системы (1.29), умноженного на m_3, и третьего, умноженного на m_2, приходим к уравнению

$$n_1(n_2 m_3 - n_3 m_2) = 0. \tag{1.31}$$

С учетом неравенства (1.28) из уравнений (1.30) и (1.31) следуют равенства $m_1 = n_1 = 0$, которые противоречат первому уравнению системы (1.29). Таким образом, в алгебре $\mathbb{A}_4$ гармонических базисов не существует. Теорема доказана.

§ 7. Моногенные потенциалы в алгебре $\mathbb{A}_3$

7.1. Выделение гармонических базисов в алгебре $\mathbb{A}_3$. В следующей теореме описывается структура гармонических базисов в алгебре $\mathbb{A}_3$ над полем комплексных чисел.

Теорема 1.6. *Алгебра $\mathbb{A}_3$ над полем $\mathbb{C}$ является гармонической. Гармоническими являются базисы $\{e_1, e_2, e_3\}$, разложения элементов которых по базису $\{1, \rho_1, \rho_2\}$ имеют вид* (1.27), *где n_k и m_k при $k = 1, 2, 3$ — комплексные числа, удовлетворяющие системе уравнений*

$$\begin{aligned} 1 + n_1^2 + m_1^2 &= 0, \\ n_1 n_2 + m_1 m_2 &= 0, \\ n_2^2 + m_2^2 + 2(n_1 n_3 + m_1 m_3) &= 0 \end{aligned} \tag{1.32}$$

и неравенству (1.28), *при этом хотя бы одно из чисел в каждой из пар* (n_1, n_2) *и* (m_1, m_2) *отлично от нуля. Таблица умножения элементов гармонического базиса* (1.27) *имеет вид:*

$$\begin{aligned}
&e_k\, e_1 = e_k, \qquad k = 1, 2, 3, \\
&e_2^2 = \left(-n_1^2 + \frac{n_2^2(n_1 m_2 - n_2 m_1)}{\det_3}\right) e_1 + \\
&\qquad\qquad + \left(2n_1 - \frac{m_2 n_2^2}{\det_3}\right) e_2 + \frac{n_2^3}{\det_3}\, e_3\,, \\
&e_3^2 = \left(-m_1^2 + \frac{m_2^2(n_1 m_2 - n_2 m_1)}{\det_3}\right) e_1 - \\
&\qquad\qquad - \frac{m_2^3}{\det_3}\, e_2 + \left(2m_1 + \frac{n_2 m_2^2}{\det_3}\right) e_3\,, \\
&e_2 e_3 = \left(-n_1 m_1 + \frac{n_2 m_2(n_1 m_2 - n_2 m_1)}{\det_3}\right) e_1 + \\
&\qquad\qquad + \left(m_1 - \frac{n_2 m_2^2}{\det_3}\right) e_2 + \left(n_1 + \frac{m_2 n_2^2}{\det_3}\right) e_3\,,
\end{aligned} \tag{1.33}$$

где $\det_3 := n_2 m_3 - n_3 m_2$.

Доказательство. Отметим, прежде всего, что хотя бы один из элементов базиса имеет вид $a + b\rho_1 + c\rho_2$, где $a, b, c \in \mathbb{C}$ и при этом $a \neq 0$. Следовательно, указанный элемент базиса является обратимым в алгебре $\mathbb{A}_3$. Тогда базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, удовлетворяющий равенству (1.6), преобразуется в гармонический базис, содержащий главную единицу. Поэтому, не уменьшая общности, имеем разложение (1.27) элементов базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ по базису $\{1, \rho_1, \rho_2\}$, в котором n_k и m_k при $k = 1, 2, 3$ — комплексные числа, удовлетворяющие неравенству (1.28).

Используя разложения (1.27) и правила умножения (1.25), получаем равенства

$$\begin{aligned}
e_2^2 &= n_1^2 + 2n_1 n_2\, \rho_1 + (n_2^2 + 2n_1 n_3)\, \rho_2\,, \\
e_3^2 &= m_1^2 + 2m_1 m_2\, \rho_1 + (m_2^2 + 2m_1 m_3)\, \rho_2\,.
\end{aligned}$$

Теперь неравенства $e_2^2 \neq 0$, $e_3^2 \neq 0$ равносильны тому, что в каждой из пар (n_1, n_2) и (m_1, m_2) хотя бы одно из чисел отлично от нуля, а условие гармоничности базиса (1.6) приводит к системе уравнений (1.32).

Системе (1.32) и неравенству (1.28) удовлетворяют, в частности, числа $n_1 = i \sin\omega$, $n_2 = \cos\omega$, $n_3 = i\cos\left(\frac{\pi}{6} - \omega\right)$, $m_1 = i\cos\omega$, $m_2 = -\sin\omega$, $m_3 = i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \omega\right)$, где $\omega \in \mathbb{C}$. Таким образом, алгебра $\mathbb{A}_3$ является гармонической.

Решая систему (1.27) относительно $1, \rho_1, \rho_2$, получаем разложение элементов базиса $\{1, \rho_1, \rho_2\}$ по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$\begin{aligned} &1 = e_1, \\ &\rho_1 = -\frac{n_1 m_3 - n_3 m_1}{\det_3}\, e_1 + \frac{m_3}{\det_3}\, e_2 - \frac{n_3}{\det_3}\, e_3\,, \\ &\rho_2 = \frac{n_1 m_2 - n_2 m_1}{\det_3}\, e_1 - \frac{m_2}{\det_3}\, e_2 + \frac{n_2}{\det_3}\, e_3\,. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Выполняя умножение базисных элементов e_1, e_2, e_3 с использованием разложений (1.27) и правил умножения (1.25), а затем подставляя в получаемые при этом равенства выражения (1.34), устанавливаем таблицу умножения (1.33) для элементов гармонического базиса. Теорема доказана.

Отметим, что указанному в доказательстве теоремы 1.6 частному решению системы (1.32) соответствует однопараметрическое семейство гармонических базисов в алгебре $\mathbb{A}_3$:

$$\begin{aligned} &e_1 = 1, \\ &e_2 = i \sin\omega + (\cos\omega)\, \rho_1 + i \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{6} - \omega\right)\right) \rho_2, \\ &e_3 = i \cos\omega - (\sin\omega)\, \rho_1 + i \left(\sin\left(\tfrac{\pi}{6} - \omega\right)\right) \rho_2 \end{aligned}$$

с таблицей умножения

$$\begin{aligned} &e_k\, e_1 = e_k, \qquad k = 1, 2, 3, \\ &e_2^2 = (-2 + 3\sin^2\omega)\, e_1 + 2i(\sin^3\omega)\, e_2 - 2i(\cos^3\omega)\, e_3\,, \\ &e_3^2 = (-2 + 3\cos^2\omega)\, e_1 - 2i(\sin^3\omega)\, e_2 + 2i(\cos^3\omega)\, e_3\,, \\ &e_2 e_3 = \tfrac{3}{2}\,(\sin 2\omega)\, e_1 + i\cos\omega(1 + 2\sin^2\omega)\, e_2 + i\sin\omega(1 + 2\cos^2\omega)\, e_3. \end{aligned}$$

Очевидно, что в результате умножения элементов описанных в теореме 1.6 гармонических базисов на произвольный обратимый элемент алгебры $\mathbb{A}_3$ также получаются гармонические базисы, причем таким способом могут быть получены все гармонические базисы в $\mathbb{A}_3$.

7.2. Моногенные потенциалы и главные продолжения голоморфных функций комплексной переменной. Рассмотрим моногенные функции, принимающие значения в алгебре $\mathbb{A}_3$ с гармоническим базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ и таблицей умножения (1.33). Необходимые и достаточные условия моногенности функции (1.16) имеют вид (1.17), при этом соответствующие структурные константы γ_{jk}^i, входящие в равенства (1.8), определены таблицей умножения (1.33).

Если Q — область в $\mathbb{R}^3$ и $Q_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : (x,y,z) \in Q\}$, то моногенная функция $\Phi : Q_\zeta \longrightarrow \mathbb{A}_3$ в силу равенства (1.7) и условия (1.6) удовлетворяет уравнению (1.4) в области Q (будем называть такие функции *моногенными потенциалами*).

Формула (1.20) позволяет эффективно конструировать моногенные потенциалы как продолжения голоморфных функций комплексной переменной по следующей схеме: сначала с использованием разложений элементов гармонического базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ алгебры $\mathbb{A}_3$ по базису $\{1, \rho_1, \rho_2\}$ и простых правил умножения (1.25) легко вычисляется резольвента $(t-\zeta)^{-1}$ в равенстве (1.20), после чего для получения в явном виде разложения функции (1.20) по элементам гармонического базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ остается воспользоваться формулами (1.34). Реализуем описанную схему.

Лемма 1.1. *Спектр элемента* $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ *(здесь* $x, y, z \in \mathbb{C}$*) алгебры* $\mathbb{A}_3$ *с гармоническим базисом* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и таблицей умножения* (1.33) *состоит из единственной точки* $t = x + n_1 y + m_1 z$, *при этом разложение резольвенты* $(t-\zeta)^{-1}$ *по базису* $\{1, \rho_1, \rho_2\}$ *имеет вид*

$$(t-\zeta)^{-1} = \frac{1}{t-x-n_1y-m_1z} + \frac{n_2y+m_2z}{(t-x-n_1y-m_1z)^2}\,\rho_1 +$$

$$+\left(\frac{n_3y+m_3z}{(t-x-n_1y-m_1z)^2} + \frac{(n_2y+m_2z)^2}{(t-x-n_1y-m_1z)^3}\right)\rho_2 \qquad (1.35)$$

$$\forall\, t \in \mathbb{C} : t \neq x + n_1y + m_1z\,.$$

Доказательство. Установим, при каких $t \in \mathbb{C}$ в алгебре $\mathbb{A}_3$ существует элемент $(t-\zeta)^{-1}$ и найдем коэффициенты $A, B, C \in \mathbb{C}$ его разложения по базису $\{1, \rho_1, \rho_2\}$:

$$(t-\zeta)^{-1} = A + B\,\rho_1 + C\,\rho_2\,.$$

Учитывая разложения (1.27) элементов гармонического базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ по базису $\{1, \rho_1, \rho_2\}$ и правила умножения (1.25), имеем

$$1 = (t-\zeta)^{-1}(t-\zeta) =$$

$$= (A + B\,\rho_1 + C\,\rho_2)\big(t - x - n_1y - m_1z - (n_2y+m_2z)\rho_1 - (n_3y+m_3z)\rho_2\big) =$$

$$= A(t-x-n_1y-m_1z) + \big(B(t-x-n_1y-m_1z) - A(n_2y+m_2z)\big)\rho_1 +$$

$$+\big(C(t-x-n_1y-m_1z) - B(n_2y+m_2z) - A(n_3y+m_3z)\big)\rho_2,$$

откуда для определения коэффициентов A, B, C получаем систему

$$\begin{aligned} &A(t-x-n_1y-m_1z) &&= 1,\\ &B(t-x-n_1y-m_1z)-A(n_2y+m_2z) &&= 0,\\ &C(t-x-n_1y-m_1z)-B(n_2y+m_2z)-A(n_3y+m_3z) &&= 0. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Система (1.36) разрешима, если $t-x-n_1y-m_1z \neq 0$, при этом

$$A = \frac{1}{t-x-n_1y-m_1z}\,, \qquad B = \frac{n_2y+m_2z}{(t-x-n_1y-m_1z)^2}\,,$$

$$C = \frac{n_3y+m_3z}{(t-x-n_1y-m_1z)^2} + \frac{(n_2y+m_2z)^2}{(t-x-n_1y-m_1z)^3}\,.$$

Таким образом, спектр элемента ζ состоит из единственной точки $t = x+n_1y+m_1z$ и справедливо равенство (1.35). Лемма доказана.

Теорема 1.7. *Пусть функция* $F : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *голоморфна в области* G *комплексной плоскости и* $D(G)$ *— множество тех элементов* $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ *(здесь* $x, y, z \in \mathbb{C}$*) алгебры* $\mathbb{A}_3$ *с гармоническим базисом* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и таблицей умножения* (1.33), *для которых* $x+n_1y+m_1z \in G$. *Тогда при всех* $\zeta \in D(G)$ *разложение функции* (1.20) *по базису* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *имеет вид*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta} F(t)\,(t-\zeta)^{-1}\,dt = \Bigg(F(x+n_1y+m_1z)+$$

$$+\Big(\frac{n_1m_2-n_2m_1}{\det_3}(n_3y+m_3z)-\frac{n_1m_3-n_3m_1}{\det_3}(n_2y+m_2z)\Big)F'(x+n_1y+m_1z)+$$

$$+\frac{n_1m_2-n_2m_1}{\det_3}\,\frac{(n_2y+m_2z)^2}{2}\,F''(x+n_1y+m_1z)\Bigg)e_1+$$

$$+\Bigg(\Big(\frac{m_3}{\det_3}\,(n_2y+m_2z)-\frac{m_2}{\det_3}\,(n_3y+m_3z)\Big)\,F'(x+n_1y+m_1z)-$$

$$-\frac{m_2}{\det_3}\,\frac{(n_2y+m_2z)^2}{2}\,F''(x+n_1y+m_1z)\Bigg)e_2+$$

$$+\Bigg(\Big(\frac{n_2}{\det_3}\,(n_3y+m_3z)-\frac{n_3}{\det_3}\,(n_2y+m_2z)\Big)\,F'(x+n_1y+m_1z)+$$

$$+\frac{n_2}{\det_3}\,\frac{(n_2y+m_2z)^2}{2}\,F''(x+n_1y+m_1z)\Bigg)e_3\,, \tag{1.37}$$

где замкнутая жорданова спрямляемая кривая Γ_ζ *лежит в области* G *и охватывает точку* $x+n_1y+m_1z$.

Доказательство. Учитывая равенство (1.35), имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta} F(t)\,(t-\zeta)^{-1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta} \frac{F(t)}{t-x-n_1y-m_1z}\,dt + \rho_1\,\frac{n_2y+m_2z}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta}\frac{F(t)}{(t-x-n_1y-m_1z)^2}\,dt +$$

$$+\rho_2\left(\frac{n_3y+m_3z}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta}\frac{F(t)}{(t-x-n_1y-m_1z)^2}\,dt +\right.$$

$$\left.+\frac{(n_2y+m_2z)^2}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta}\frac{F(t)}{(t-x-n_1y-m_1z)^3}\,dt\right) =$$

$$= F(x+n_1y+m_1z) + (n_2y+m_2z)F'(x+n_1y+m_1z)\,\rho_1 +$$

$$+\left((n_3y+m_3z)F'(x+n_1y+m_1z) + \frac{(n_2y+m_2z)^2}{2}F''(x+n_1y+m_1z)\right)\rho_2\,.$$

Теперь после подстановки в последнее равенство разложений (1.34) элементов $1,\rho_1,\rho_2$ по базису $\{e_1,e_2,e_3\}$ получаем равенство (1.37). Теорема доказана.

Таким образом, формула (1.37) описывает структуру главных продолжений голоморфных функций комплексной переменной в алгебру $\mathbb{A}_3$ с гармоническим базисом $\{e_1,e_2,e_3\}$.

§ 8. Моногенные потенциалы в алгебре $\mathbb{A}_2$

8.1. Выделение гармонических базисов в алгебре $\mathbb{A}_2$. Рассмотрим сначала вспомогательное утверждение.

Лемма 1.2. *Если в алгебре* $\mathbb{A}_2$ *имеется гармонический базис* $\{e_1,e_2,e_3\}$, *то хотя бы один из элементов этого базиса обратим.*

Доказательство. Пусть разложения элементов гармонического базиса $\{e_1,e_2,e_3\}$ по базису $\{\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\rho\}$ имеют вид

$$e_1 = k_1\mathcal{I}_1 + k_2\mathcal{I}_2 + k_3\rho,$$
$$e_2 = n_1\mathcal{I}_1 + n_2\mathcal{I}_2 + n_3\rho,$$
$$e_3 = m_1\mathcal{I}_1 + m_2\mathcal{I}_2 + m_3\rho,$$

при этом следствием равенства (1.6) и правил умножения (1.24) являются равенства

$$\begin{aligned} &k_1^2 + n_1^2 + m_1^2 = 0, \\ &k_2^2 + n_2^2 + m_2^2 = 0. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Предположим, что элементы e_2, e_3 необратимы в алгебре $\mathbb{A}_2$. Поскольку элемент $\zeta = a\mathcal{I}_1 + b\mathcal{I}_2 + c\rho$, где $a, b, c \in \mathbb{C}$, обратим в $\mathbb{A}_2$ тогда и только тогда, когда $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то, не ограничивая общности, можем считать, что $n_1 = 0$. Далее, подставляя это значение в первое из равенств (1.38), приходим к выводу, что $k_1 \neq 0$ и $m_1 \neq 0$ (иначе элементы e_1, e_2, e_3 не образовывали бы базис). Тогда в соответствии с предположением о том, что элемент e_3 необратим, выполняется равенство $m_2 = 0$. Теперь, подставляя это значение во второе из равенств (1.38), так же, как и выше, приходим к выводу о том, что $n_2 \neq 0$ и $k_2 \neq 0$. Таким образом, элемент e_1 обратим в алгебре $\mathbb{A}_2$ и доказательство завершено.

В следующей теореме описывается структура гармонических базисов в алгебре $\mathbb{A}_2$ над полем комплексных чисел.

Теорема 1.8. *Алгебра $\mathbb{A}_2$ над полем $\mathbb{C}$ является гармонической. Гармоническими являются базисы $\{e_1, e_2, e_3\}$, разложения элементов которых по базису $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \rho\}$ имеют вид*

$$\begin{aligned} &e_1 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2, \\ &e_2 = n_1\mathcal{I}_1 + n_2\mathcal{I}_2 + n_3\rho, \\ &e_3 = m_1\mathcal{I}_1 + m_2\mathcal{I}_2 + m_3\rho, \end{aligned} \tag{1.39}$$

где n_k и m_k при $k = 1, 2, 3$ — комплексные числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} &1 + n_1^2 + m_1^2 &&= 0, \\ &1 + n_2^2 + m_2^2 &&= 0, \\ &n_2 n_3 + m_2 m_3 &&= 0 \end{aligned} \tag{1.40}$$

и неравенству

$$\det\nolimits_2 := m_3(n_2 - n_1) + n_3(m_1 - m_2) \neq 0\,, \tag{1.41}$$

при этом хотя бы одно из чисел в каждой из пар (n_1, n_2) и (m_1, m_2) отлично от нуля. Таблица умножения элементов гармонического *базиса* (1.39) *имеет вид:*

$$
\begin{aligned}
&e_k\, e_1 = e_k, \qquad k = 1,2,3,\\
&e_2^2 = \left(-n_1 n_2 + \frac{n_3(n_2-n_1)(n_1m_2-n_2m_1)}{\det_2}\right)e_1 + \\
&\qquad + \left(2n_2 - \frac{m_3(n_2-n_1)^2}{\det_2}\right)e_2 + \frac{n_3(n_2-n_1)^2}{\det_2}\, e_3\,,\\
&e_3^2 = \left(-m_1 m_2 + \frac{m_3(m_2-m_1)(n_1m_2-n_2m_1)}{\det_2}\right)e_1 - \\
&\qquad - \frac{m_3(m_2-m_1)^2}{\det_2}\, e_2 + \left(2m_2 + \frac{n_3(m_2-m_1)^2}{\det_2}\right)e_3\,,\\
&e_2e_3 = \left(-n_2 m_1 + \frac{n_3(m_2-m_1)(n_1m_2-n_2m_1)}{\det_2}\right)e_1 + \\
&\qquad + \left(m_1 - \frac{n_3(m_2-m_1)^2}{\det_2}\right)e_2 + \left(n_1 + \frac{m_3(n_2-n_1)^2}{\det_2}\right)e_3\,.
\end{aligned}
\tag{1.42}
$$

Доказательство. Поскольку в $\mathbb{A}_2$ хотя бы один из элементов гармонического базиса должен быть обратимым, то базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, удовлетворяющий равенству (1.6), преобразуется в гармонический базис, содержащий главную единицу. Полагая без уменьшения общности $e_1 = 1$, имеем разложение (1.39) элементов базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ по базису $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \rho\}$, в котором n_k и m_k при $k = 1,2,3$ — комплексные числа, удовлетворяющие неравенству (1.41).

Используя разложения (1.39) и правила умножения (1.24), получаем равенства

$$
\begin{aligned}
e_2^2 &= n_1^2\,\mathcal{I}_1 + n_2^2\,\mathcal{I}_2 + 2n_2n_3\,\rho\,,\\
e_3^2 &= m_1^2\,\mathcal{I}_1 + m_2^2\,\mathcal{I}_2 + 2m_2m_3\,\rho\,.
\end{aligned}
$$

Теперь неравенства $e_2^2 \neq 0$, $e_3^2 \neq 0$ равносильны тому, что в каждой из пар (n_1, n_2) и (m_1, m_2) хотя бы одно из чисел отлично от нуля, а условие гармоничности базиса (1.6) приводит к системе уравнений (1.40), которой, в частности, удовлетворяют числа $n_1 = i\sin\omega$, $n_2 = i\cos\omega$, $n_3 = -\sin\omega$, $m_1 = i\cos\omega$, $m_2 = -i\sin\omega$, $m_3 = -\cos\omega$, где $\omega \in \mathbb{C}$. Таким образом, алгебра $\mathbb{A}_2$ является гармонической.

Решая систему (1.39) относительно $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \rho$, получаем разложение элементов базиса $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \rho\}$ по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \frac{n_2m_3 - n_3m_2}{\det_2}\, e_1 - \frac{m_3}{\det_2}\, e_2 + \frac{n_3}{\det_2}\, e_3\,,\\
\mathcal{I}_2 &= -\frac{n_1m_3 - n_3m_1}{\det_2}\, e_1 + \frac{m_3}{\det_2}\, e_2 - \frac{n_3}{\det_2}\, e_3\,,\\
\rho &= \frac{n_1m_2 - n_2m_1}{\det_2}\, e_1 - \frac{m_2 - m_1}{\det_2}\, e_2 + \frac{n_2 - n_1}{\det_2}\, e_3\,.
\end{aligned}
\tag{1.43}
$$

Выполняя умножение базисных элементов e_1, e_2, e_3 с использованием разложений (1.39) и правил умножения (1.24), а затем подставляя в получаемые при этом равенства выражения (1.43), устанавливаем таблицу умножения (1.42) для элементов гармонического базиса. Теорема доказана.

Указанному в доказательстве теоремы 1.8 частному решению системы (1.40) соответствует однопараметрическое семейство гармонических базисов в алгебре $\mathbb{A}_2$:

$$
\begin{aligned}
&e_1 = 1,\\
&e_2 = i(\sin\omega)\,\mathcal{I}_1 + i(\cos\omega)\,\mathcal{I}_2 - (\sin\omega)\,\rho,\\
&e_3 = i(\cos\omega)\,\mathcal{I}_1 - i(\sin\omega)\,\mathcal{I}_2 - (\cos\omega)\,\rho
\end{aligned}
$$

с таблицей умножения

$$
\begin{aligned}
&e_k\, e_1 = e_k, \qquad k = 1,2,3,\\
&e_2^2 = (\sin 2\omega - \sin^2\omega)\, e_1 + i\cos\omega(1+\sin 2\omega)\, e_2 + i\sin\omega(1-\sin 2\omega)\, e_3\,,\\
&e_3^2 = (-\sin 2\omega - \cos^2\omega)\, e_1 - i\cos\omega(1+\sin 2\omega)\, e_2 - i\sin\omega(1-\sin 2\omega)\, e_3,\\
&e_2e_3 = (\cos 2\omega - \tfrac{1}{2}\,\sin 2\omega)\, e_1 + i(\cos 2\omega\cos\omega - \sin\omega)\, e_2 +\\
&\qquad\qquad + i(\cos\omega - \cos 2\omega\sin\omega)\, e_3\,.
\end{aligned}
$$

Поскольку в результате умножения элементов описанных в теореме 1.8 гармонических базисов на произвольный обратимый элемент алгебры $\mathbb{A}_2$ также получаются гармонические базисы, то таким способом могут быть получены все гармонические базисы в $\mathbb{A}_2$.

8.2. Моногенные потенциалы и главные продолжения голоморфных функций комплексной переменной. Рассмотрим моногенные функции, принимающие значения в алгебре $\mathbb{A}_2$ с гармоническим базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ и таблицей умножения (1.42).

Пусть Q — область в $\mathbb{R}^3$ и $Q_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : (x,y,z) \in Q\}$. Необходимые и достаточные условия того, что функция $\Phi : Q_\zeta \longrightarrow \mathbb{A}_2$ является моногенным потенциалом, имеют вид (1.17), при этом соответствующие структурные константы γ^i_{jk}, входящие в равенства (1.8), определены таблицей умножения (1.42).

Построение главных продолжений голоморфных функций комплексной переменной в алгебру $\mathbb{A}_2$ опирается на следующую лемму.

Лемма 1.3. *Спектр элемента* $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ *(здесь* $x, y, z \in \mathbb{C}$*) алгебры* $\mathbb{A}_2$ *с гармоническим базисом* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и таблицей умножения* (1.42) *состоит из точек* $t = x+n_1y+m_1z$, $t = x+n_2y+m_2z$, *при этом разложение резольвенты* $(t-\zeta)^{-1}$ *по базису* $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \rho\}$ *имеет вид*

$$\begin{aligned}(t-\zeta)^{-1} = & \frac{1}{t-x-n_1y-m_1z}\,\mathcal{I}_1 + \frac{1}{t-x-n_2y-m_2z}\,\mathcal{I}_2 + \\ & + \frac{n_3y+m_3z}{(t-x-n_2y-m_2z)^2}\,\rho \end{aligned} \tag{1.44}$$

$$\forall\, t \in \mathbb{C}: \quad t \neq x+n_1y+m_1z\,, \quad t \neq x+n_2y+m_2z\,.$$

Доказательство. Установим, при каких $t \in \mathbb{C}$ в алгебре $\mathbb{A}_2$ существует элемент $(t-\zeta)^{-1}$ и найдем коэффициенты $A, B, C \in \mathbb{C}$ его разложения по базису $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \rho\}$:

$$(t-\zeta)^{-1} = A\,\mathcal{I}_1 + B\,\mathcal{I}_2 + C\,\rho\,.$$

Учитывая разложения (1.39) элементов гармонического базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ по базису $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \rho\}$ и правила умножения (1.24), имеем

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = 1 = (t-\zeta)^{-1}(t-\zeta) = (A\,\mathcal{I}_1 + B\,\mathcal{I}_2 + C\,\rho)\times$$

$$\begin{aligned}\times\big((t-x-n_1y-m_1z)\,\mathcal{I}_1 + (t-x-n_2y-m_2z)\,\mathcal{I}_2 - (n_3y+m_3z)\,\rho\big) = \\ = A(t-x-n_1y-m_1z)\,\mathcal{I}_1 + B(t-x-n_2y-m_2z)\,\mathcal{I}_2 + \\ + \big(C(t-x-n_2y-m_2z) - B(n_3y+m_3z)\big)\,\rho,\end{aligned}$$

откуда для определения коэффициентов A, B, C получаем систему

$$\begin{aligned} & A(t-x-n_1y-m_1z) && = 1, \\ & B(t-x-n_2y-m_2z) && = 1, \\ & C(t-x-n_2y-m_2z) - B(n_3y+m_3z) && = 0. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Система (1.45) разрешима, если $t-x-n_1y-m_1z \neq 0$ и $t-x-n_2y-m_2z \neq 0$, при этом

$$A = \frac{1}{t-x-n_1y-m_1z}\,, \qquad B = \frac{1}{t-x-n_2y-m_2z}\,,$$

$$C = \frac{n_3y+m_3z}{(t-x-n_2y-m_2z)^2}\,.$$

Таким образом, спектр элемента ζ состоит из точек $t = x+n_1y+m_1z$, $t = x + n_2y + m_2z$ и справедливо равенство (1.44). Лемма доказана.

В следующей теореме описывается структура главных продолжений голоморфных функций комплексной переменной в алгебру $\mathbb{A}_2$.

Теорема 1.9. *Пусть функция $F : G \longrightarrow \mathbb{C}$ голоморфна в области G комплексной плоскости и $D(G)$ — множество тех элементов $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ (здесь $x, y, z \in \mathbb{C}$) алгебры $\mathbb{A}_2$ с гармоническим базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ и таблицей умножения* (1.42), *для которых $x + n_1y + m_1z \in G$ и $x + n_2y + m_2z \in G$. Тогда при всех $\zeta \in D(G)$ разложение функции* (1.20) *по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$ имеет вид*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta} F(t)\,(t-\zeta)^{-1}\,dt =$$

$$= \Bigg(\frac{n_2m_3 - n_3m_2}{\det_2}\,F(x+n_1y+m_1z) - \frac{n_1m_3 - n_3m_1}{\det_2}\,F(x+n_2y+m_2z) +$$
$$+\frac{n_1m_2 - n_2m_1}{\det_2}(n_3y + m_3z)\,F'(x+n_2y+m_2z)\Bigg)e_1 +$$
$$+\Bigg(\frac{m_3}{\det_2}\,F(x+n_2y+m_2z) - \frac{m_3}{\det_2}\,F(x+n_1y+m_1z) +$$
$$+\frac{m_1 - m_2}{\det_2}\,(n_3y + m_3z)\,F'(x+n_2y+m_2z)\Bigg)e_2 +$$
$$+\Bigg(\frac{n_3}{\det_2}\,F(x+n_1y+m_1z) - \frac{n_3}{\det_2}\,F(x+n_2y+m_2z) -$$
$$-\frac{n_1 - n_2}{\det_2}\,(n_3y + m_3z)\,F'(x+n_2y+m_2z)\Bigg)e_3\,, \qquad (1.46)$$

где замкнутая жорданова спрямляемая кривая Γ_ζ лежит в области G и охватывает точки $x + n_1y + m_1z$, $x + n_2y + m_2z$.

Доказательство. С учетом разложения (1.44) имеем равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta} F(t)\,(t-\zeta)^{-1}\,dt = \mathcal{I}_1\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta}\frac{F(t)}{t - x - n_1y - m_1z}\,dt +$$

$$+\mathcal{I}_2\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta}\frac{F(t)}{t - x - n_2y - m_2z}\,dt + \rho\frac{n_3y + m_3z}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta}\frac{F(t)}{(t - x - n_2y - m_2z)^2}\,dt =$$

$$= F(x+n_1y+m_1z)\,\mathcal{I}_1+F(x+n_2y+m_2z)\,\mathcal{I}_2+(n_3y+m_3z)F'(x+n_2y+m_2z)\,\rho.$$

Теперь после подстановки в последнее равенство разложений (1.43) элементов $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \rho$ по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$ получим равенство (1.46). Теорема доказана.

§ 9. Моногенные потенциалы в алгебре $\mathbb{A}_1$

9.1. Выделение гармонических базисов в алгебре $\mathbb{A}_1$. В следующей теореме описывается структура гармонических базисов в алгебре $\mathbb{A}_1$ над полем комплексных чисел.

Теорема 1.10. *Алгебра $\mathbb{A}_1$ над полем $\mathbb{C}$ является гармонической. Гармоническими являются те и только те базисы $\{e_1, e_2, e_3\}$, разложения элементов которых по базису $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3\}$ имеют вид*

$$e_k = a_{k1}\mathcal{I}_1 + a_{k2}\mathcal{I}_2 + a_{k3}\mathcal{I}_3, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{1.47}$$

где a_{kj} при $k, j = 1, 2, 3$ — комплексные числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + a_{3j}^2 = 0, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{1.48}$$

и неравенству

$$\begin{aligned} \det{}_1 := \ & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0\,. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Таблица умножения элементов гармонического базиса (1.47) *имеет вид* (1.8), *при этом структурные константы выражаются равенствами*

$$\gamma_{jk}^i = \sum_{m=1}^{3} a_{im}a_{jm}b_{mk}\,, \tag{1.50}$$

где b_{mk} — элементы матрицы

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1}. \tag{1.51}$$

Доказательство. Легко установить, что семейство базисов, построенное в теореме 1.4, лежит в полупростой алгебре $\mathbb{A}_1$. Действительно, подсчитывая дискриминант матричного представления алгебры $\mathbb{A}$ (см. [86, с. 32]), рассмотренной в теореме 1.4, получаем

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{vmatrix} = \frac{27}{4},$$

и поскольку он отличен от нуля, то алгебра $\mathbb{A}$ является полупростой (см. [86, с. 33]), то есть совпадает с алгеброй $\mathbb{A}_1$. Таким образом, алгебра $\mathbb{A}_1$ является гармонической.

С использованием разложений (1.47) и правил умножения (1.23) легко устанавливается, что условие гармоничности базиса (1.6) и неравенства $e_k^2 \neq 0$, $k = 1, 2, 3$, равносильны равенствам (1.48) и неравенству (1.49).

Теперь, решая систему (1.47) относительно $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$, получаем разложение элементов базиса $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3\}$ по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$\mathcal{I}_k = b_{k1}e_1 + b_{k2}e_2 + b_{k3}e_3, \qquad k = 1, 2, 3\,. \tag{1.52}$$

Наконец, выполняя умножение базисных элементов e_1, e_2, e_3 с использованием разложений (1.47) и правил умножения (1.23), а затем подставляя в получаемые при этом равенства выражения (1.52), устанавливаем выражения (1.50) структурных констант гармонической алгебры $\mathbb{A}_1$. Теорема доказана.

Заметим, что в алгебре $\mathbb{A}_1$ над полем $\mathbb{C}$ существуют гармонические базисы, состоящие как из обратимых элементов, так и из необратимых элементов. Например, элементы

$$\begin{aligned} e_1 &= 1, \\ e_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\,\mathcal{I}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\,\mathcal{I}_2 + \frac{1}{2}\, i\,\mathcal{I}_3, \\ e_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\,\mathcal{I}_1 + \frac{1}{2}\, i\,\mathcal{I}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\,\mathcal{I}_3 \end{aligned}$$

обратимы и образуют гармонический базис, а элементы

$$\begin{aligned} e_1 &= \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2, \\ e_2 &= i\,\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3, \\ e_3 &= i\,\mathcal{I}_1 + i\,\mathcal{I}_3, \end{aligned}$$

также образующие гармонический базис, являются необратимыми.

9.2. Моногенные потенциалы и главные продолжения голоморфных функций комплексной переменной. Рассмотрим моногенные функции, принимающие значения в алгебре $\mathbb{A}_1$ с гармоническим базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ таким, как в теореме 1.10.

Построение главных продолжений голоморфных функций комплексной переменной в алгебру $\mathbb{A}_1$ опирается на следующую лемму.

Лемма 1.4. *Спектр элемента* $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ (*здесь* $x, y, z \in \mathbb{C}$) *алгебры* $\mathbb{A}_1$ *с гармоническим базисом* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *и таблицей умножения* (1.8), *в которой структурные константы заданы равенствами* (1.50), *состоит из точек* $t = a_{1k}\, x + a_{2k}\, y + a_{3k}\, z$, $k = 1, 2, 3$; *при этом разложение резольвенты* $(t - \zeta)^{-1}$ *по базису* $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3\}$ *имеет вид*

$$(t-\zeta)^{-1} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{t - a_{1k}x - a_{2k}y - a_{3k}z}\, \mathcal{I}_k \tag{1.53}$$

$$\forall\, t \in \mathbb{C} : t \neq a_{1k}x + a_{2k}y + a_{3k}z\,, \quad k = 1, 2, 3\,.$$

Доказательство. Установим, при каких $t \in \mathbb{C}$ в алгебре $\mathbb{A}_1$ существует элемент $(t-\zeta)^{-1}$ и найдем коэффициенты $A, B, C \in \mathbb{C}$ его разложения по базису $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3\}$:

$$(t-\zeta)^{-1} = A\,\mathcal{I}_1 + B\,\mathcal{I}_2 + C\,\mathcal{I}_3\,.$$

Учитывая разложения (1.47) элементов гармонического базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ по базису $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3\}$ и правила умножения (1.23), имеем

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = 1 = (t-\zeta)^{-1}(t-\zeta) =$$

$$= (A\,\mathcal{I}_1 + B\,\mathcal{I}_2 + C\,\mathcal{I}_3) \sum_{k=1}^{3} (t - a_{1k}x - a_{2k}y - a_{3k}z)\, \mathcal{I}_k =$$

$$= A(t - a_{11}x - a_{21}y - a_{31}z)\,\mathcal{I}_1 + B(t - a_{12}x - a_{22}y - a_{32}z)\,\mathcal{I}_2 +$$
$$+ C(t - a_{13}x - a_{23}y - a_{33}z)\,\mathcal{I}_3\,,$$

откуда при условии $t - a_{1k}x - a_{2k}y - a_{3k}z \neq 0$, $k = 1, 2, 3$, получаем

$$A = \frac{1}{t - a_{11}x - a_{21}y - a_{31}z}\,, \qquad B = \frac{1}{t - a_{12}x - a_{22}y - a_{32}z}\,,$$

$$C = \frac{1}{t - a_{13}x - a_{23}y - a_{33}z}\,.$$

Лемма доказана.

В следующей теореме описывается структура главных продолжений голоморфных функций комплексной переменной в алгебру $\mathbb{A}_1$.

Теорема 1.11. *Пусть для элементов гармонического базиса* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *алгебры* $\mathbb{A}_1$ *выполняются правила умножения* (1.8), *в которых структурные константы заданы равенствами* (1.50), *а функция* $F : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *голоморфна в области* G *комплексной плоскости и* $D(G)$ — *множество элементов* $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ *(здесь* $x, y, z \in \mathbb{C}$*) алгебры* $\mathbb{A}_1$ *таких, что* $a_{1k}\, x + a_{2k}\, y + a_{3k}\, z \in G,\ \ k = 1, 2, 3$. *Тогда при всех* $\zeta \in D(G)$ *разложение функции* (1.20) *по базису* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *имеет вид*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta} F(t)\,(t-\zeta)^{-1}\,dt = \sum_{m=1}^{3} e_m \sum_{k=1}^{3} b_{km} F(a_{1k}\, x + a_{2k}\, y + a_{3k}), \quad (1.54)$$

где замкнутая жорданова спрямляемая кривая Γ_ζ *лежит в области* G *и охватывает точки* $a_{1k}\, x + a_{2k}\, y + a_{3k}\, z,\ \ k = 1, 2, 3$, *а* b_{km} — *элементы матрицы* (1.51).

Доказательство. С учетом разложения (1.53) легко устанавливается равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta} F(t)\,(t-\zeta)^{-1}\,dt = \sum_{k=1}^{3}\ F(a_{1k}x + a_{2k}y + a_{3k}z)\,\mathcal{I}_k,$$

после подстановки в которое разложений (1.52) элементов $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$ по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$ получим равенство (1.54). Теорема доказана.

В случае, когда гармонический базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ содержит главную единицу алгебры $\mathbb{A}_1$ (то есть $e_1 = 1$), необходимые и достаточные условия того, что функция $\Phi : Q_\zeta \longrightarrow \mathbb{A}_1$ (здесь $Q_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : (x, y, z) \in Q\}$ и Q — область в $\mathbb{R}^3$) является моногенным потенциалом, установлены в теореме 1.3.

9.3. Теорема о не существовании гармонических базисов в алгебре третьего ранга над полем действительных чисел. Покажем, что коммутативная ассоциативная с главной единицей алгебра третьего ранга над полем действительных чисел не является гармонической.

Теорема 1.12. *В коммутативной ассоциативной алгебре третьего ранга с главной единицей над полем действительных чисел* $\mathbb{R}$ *гармонических базисов не существует.*

Доказательство. Поскольку в алгебрах $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3$ хотя бы один из элементов гармонического базиса должен быть обратимым, то базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, удовлетворяющий равенству (1.6), преобразуется в гармонический базис, содержащий главную единицу. Но согласно теореме 1.2 таких базисов в коммутативной ассоциативной алгебре над полем $\mathbb{R}$ не существует.

Аналогично устанавливается отсутствие в алгебре $\mathbb{A}_1$ над полем $\mathbb{R}$ гармонических базисов, в которых хотя бы один из элементов является обратимым.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы остается рассмотреть случай алгебры $\mathbb{A}_1$ и ее базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$, состоящего из необратимых элементов. В этом случае для элементов гармонического базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ с точностью до нумерации идемпотентов алгебры $\mathbb{A}_1$ имеем следующие разложения по базису $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3\}$:

$$\begin{aligned} e_1 &= a_{11}\,\mathcal{I}_1 + a_{12}\,\mathcal{I}_2, \\ e_2 &= a_{22}\,\mathcal{I}_2 + a_{23}\,\mathcal{I}_3, \\ e_3 &= a_{31}\,\mathcal{I}_1 + a_{33}\,\mathcal{I}_3. \end{aligned}$$

Равенства (1.48) и неравенство (1.49), равносильные гармоничности базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$, принимают вид

$$\begin{aligned} & a_{11}^2 + a_{31}^2 = 0, \\ & a_{12}^2 + a_{22}^2 = 0, \\ & a_{23}^2 + a_{33}^2 = 0, \\ & \det{}_1 \equiv a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \neq 0. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Из соотношений (1.55) следует, что все числа a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{33} отличны от нуля.

Предположим, что в правилах умножения (1.8) все структурные константы являются действительными числами. Вычисляя γ_{12}^1, γ_{13}^1 по формулам (1.50), получаем

$$\begin{aligned} \gamma_{12}^1 &= a_{11}^2 b_{12} + a_{12}^2 b_{22} = \frac{a_{11}a_{12}a_{33}(a_{12} - a_{11})}{\det_1}, \\ \gamma_{13}^1 &= a_{11}^2 b_{13} + a_{12}^2 b_{23} = -\frac{a_{11}a_{12}a_{23}(a_{12} - a_{11})}{\det_1}. \end{aligned}$$

Поскольку из третьего равенства системы (1.55) следует, что числа a_{23}, a_{33} связаны между собой соотношением $a_{23} = i\,a_{33}$ или $a_{23} = -i\,a_{33}$, то из предположения о том, что $\gamma_{12}^1 \in \mathbb{R}$ и $\gamma_{13}^1 \in \mathbb{R}$, вытекает равенство $a_{12} = a_{11}$.

Аналогично вычисляя структурные константы γ_{21}^2 и γ_{23}^2 и предполагая, что они являются действительными числами, приходим к равенству

$a_{23} = a_{22}$, а рассматривая структурные константы γ_{31}^3 и γ_{32}^3, получаем равенство $a_{31} = a_{33}$.

Тогда равенства системы (1.55) запишутся в виде

$$\begin{aligned} &a_{11}^2 + a_{33}^2 = 0, \\ &a_{11}^2 + a_{22}^2 = 0, \\ &a_{22}^2 + a_{33}^2 = 0. \end{aligned} \tag{1.56}$$

Теперь, складывая все уравнения системы (1.56), получаем равенство $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 = 0$, а после сложения первых двух уравнений системы (1.56) — равенство $2a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 = 0$, из которых следует равенство $a_{11} = 0$, что противоречит установленному выше неравенству $a_{11} \neq 0$.

Следовательно, в алгебре $\mathbb{A}_1$ над полем $\mathbb{R}$ гармонических базисов не существует. Теорема доказана.

§ 10. Моногенные функции в бесконечномерной гармонической алгебре

Гармонические алгебры третьего ранга над полем комплексных чисел, построенные в предыдущих параграфах, дают наиболее простое решение задачи, поставленной в § 2.

Следует особо подчеркнуть, что моногенные потенциалы, принимающие значения в каждой из этих алгебр, в свою очередь, образуют функциональную алгебру, расширяя тем самым конструктивные возможности построения решений уравнения (1.4). В результате получаем эффективный способ построения указанных решений как компонент разложения по элементам базиса гиперкомплексных моногенных потенциалов, которые, в частности, строятся как главные продолжения голоморфных функций комплексной переменной.

Однако, построенные гармонические алгебры третьего ранга не позволяют получить все решения уравнения (1.4) в виде компонент моногенных функций, принимающих значения в этих алгебрах.

Действительно, хорошо известно, что существует $(2n + 1)$ линейно независимых однородных полиномов степени n (от действительных переменных x, y, z), удовлетворяющих трехмерному уравнению Лапласа (см., например, [76, с. 478]). В то же время в алгебре $\mathbb{A}$ с гармоническим базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ над полем $\mathbb{C}$ указанные однородные полиномы являются действительнозначными компонентами разложения по векторам $e_1, e_2, e_3, ie_1, ie_2, ie_3$ функций вида $a(xe_1 + ye_2 + ze_3)^n$, где $a \in \mathbb{A}$, но таких линейно независимых однородных полиномов при $n \geq 3$ имеется только 6. Следовательно, для каждой гармонической алгебры третьего ранга существуют шаровые функции, которые не являются компонентами моногенных потенциалов, принимающих значения в этой алгебре.

Ниже рассматривается бесконечномерная коммутативная банахова алгебра $\mathbb{F}$ над полем действительных чисел и устанавливается, что всякая шаровая функция является компонентой некоторой моногенной функции, принимающей значения в этой алгебре. Таким образом, моногенные функции, принимающие значения в алгебре $\mathbb{F}$, составляют наиболее широкую из известных функциональных алгебр, ассоциированных с уравнением (1.4).

10.1. Бесконечномерная гармоническая алгебра $\mathbb{F}$. Рассмотрим в качестве гармонической алгебры коммутативную ассоциативную банахову алгебру

$$\mathbb{F} := \{g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k : c_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty\}$$

над полем $\mathbb{R}$ с нормой $\|g\|_{\mathbb{F}} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|$ и базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, в которой таблица умножения для элементов базиса имеет вид

$$\begin{aligned}
&e_n e_1 = e_n, \qquad e_{2n+1} e_{2n} = \frac{1}{2}\, e_{4n} \quad \forall\, n \geq 1\,,\\
&e_{2n+1} e_{2m} = \frac{1}{2}\Big(e_{2n+2m} - (-1)^m e_{2n-2m}\Big) \quad \forall\, n > m \geq 1\,,\\
&e_{2n+1} e_{2m} = \frac{1}{2}\Big(e_{2n+2m} + (-1)^n e_{2m-2n}\Big) \quad \forall\, m > n \geq 1\,,\\
&e_{2n+1} e_{2m+1} = \frac{1}{2}\Big(e_{2n+2m+1} + (-1)^m e_{2n-2m+1}\Big) \quad \forall\, n \geq m \geq 1\,,\\
&e_{2n} e_{2m} = \frac{1}{2}\Big(-e_{2n+2m+1} + (-1)^m e_{2n-2m+1}\Big) \quad \forall\, n \geq m \geq 1\,.
\end{aligned}$$

При этом очевидно, что e_1, e_2, e_3 образуют гармоническую тройку векторов.

Отметим, что алгебра $\mathbb{F}$ изоморфна алгебре $\mathbf{F}$ абсолютно сходящихся тригонометрических рядов Фурье

$$g(\tau) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\, i^k \cos k\tau + b_k\, i^k \sin k\tau\Big)$$

с действительными коэффициентами a_0, a_k, b_k и нормой, определяемой равенством $\|g\|_{\mathbf{F}} := |a_0| + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big(|a_k| + |b_k|\big)$, при этом имеет место изоморфизм $e_{2k-1} \longleftrightarrow i^{k-1}\cos{(k-1)\tau}$, $e_{2k} \longleftrightarrow i^k \sin k\tau$ между базисными элементами.

10.2. Необходимые и достаточные условия моногенности. Пусть Q — область в $\mathbb{R}^3$ и $Q_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : (x,y,z) \in Q\}$. Установим критерий моногенности функции $\Phi : Q_\zeta \longrightarrow \mathbb{F}$.

Теорема 1.13. *Для того чтобы функция $\Phi : Q_\zeta \longrightarrow \mathbb{F}$ вида*

$$\Phi(xe_1 + ye_2 + ze_3) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x,y,z)\ e_k, \tag{1.57}$$

где $U_k : Q \longrightarrow \mathbb{R}$, была моногенной в области $Q_\zeta \subset E_3$, необходимо и достаточно, чтобы функции U_k, $k = 1, 2, \dots$, были дифференцируемыми в области Q и при этом в Q выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_1}{\partial y} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_5}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_3}{\partial y} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_4}{\partial x}, \\
&\frac{\partial U_{2k}}{\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{2k-1}}{\partial x} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{2k+3}}{\partial x}, \qquad k = 2, 3, \dots, \\
&\frac{\partial U_{2k+1}}{\partial y} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{2k-2}}{\partial x} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{2k+2}}{\partial x}, \quad k = 2, 3, \dots, \\
&\frac{\partial U_1}{\partial z} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial z} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_4}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_3}{\partial z} = \frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_5}{\partial x}, \\
&\frac{\partial U_k}{\partial z} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{k-2}}{\partial x} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{k+2}}{\partial x}, \qquad k = 4, 5, \dots,
\end{aligned} \tag{1.58}$$

а также соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\right| < \infty, \tag{1.59}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \sum_{k=1}^{\infty} \left| U_k(x + \varepsilon h_1, y + \varepsilon h_2, z + \varepsilon h_3) - U_k(x,y,z) - \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\,\varepsilon h_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial y}\,\varepsilon h_2 - \frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial z}\,\varepsilon h_3 \right| \varepsilon^{-1} = 0 \quad \forall\, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}. \tag{1.60}$$

Доказательство. *Необходимость.* Если функция (1.57) моногенна в области Q_ζ, то при $h = e_1$ равенство (1.5) превращается в равенство

$$\Phi'(\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\,e_k$$

и при этом выполняется соотношение (1.59). Теперь, полагая в равенстве (1.5) сначала $h=e_2$, а затем $h=e_3$, получаем условия (1.58) для компонент моногенной функции (1.57).

Наконец, при $h_1,h_2,h_3\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$, обозначая $h:=h_1e_1+h_2e_2+h_3e_3$ и учитывая равенства (1.58), будем иметь

$$\begin{gathered}\big(\Phi(\zeta+\varepsilon h)-\Phi(\zeta)\big)\,\varepsilon^{-1}-h\,\Phi'(\zeta)=\\ =\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(U_k(x+\varepsilon h_1,y+\varepsilon h_2,z+\varepsilon h_3)-U_k(x,y,z)\Big)e_k-\\ -\varepsilon\,(h_1e_1+h_2e_2+h_3e_3)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\,e_k\Bigg)\varepsilon^{-1}=\\ =\varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\,U_k(x+\varepsilon h_1,y+\varepsilon h_2,z+\varepsilon h_3)-U_k(x,y,z)-\\ -\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\,\varepsilon h_1-\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial y}\,\varepsilon h_2\,-\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial z}\,\varepsilon h_3\Bigg)e_k\,,\end{gathered}\qquad(1.61)$$

так что следствием моногенности функции Φ в области Q_ζ является соотношение (1.60).

Достаточность. Пусть $h:=h_1e_1+h_2e_2+h_3e_3$, где $h_1,h_2,h_3\in\mathbb{R}$, и $\varepsilon>0$. Тогда при выполнении условий (1.58) и соотношения (1.59) справедливо равенство (1.61), следствием которого и соотношения (1.60) является моногенность функции Φ в области Q_ζ. Теорема доказана.

Отметим, что условия (1.58) по своей природе аналогичны условиям Коши – Римана для моногенных функций комплексной переменной, а соотношения (1.59), (1.60) обусловлены бесконечномерностью алгебры $\mathbb{F}$.

Очевидно, что если производная по Гато Φ' моногенной функции $\Phi:Q_\zeta\longrightarrow\mathbb{F}$, в свою очередь, является моногенной функцией в области Q_ζ, то вследствие равенства (1.6) все компоненты U_k разложения (1.57) удовлетворяют уравнению (1.4) в области Q. Поэтому дважды дифференцируемую по Гато функцию $\Phi:Q_\zeta\longrightarrow\mathbb{F}$ естественно называть *моногенным потенциалом.*

Приведем примеры моногенных потенциалов, принимающих значения в алгебре $\mathbb{F}$. Выпишем разложение по базису $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ степенной функции переменной $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$, используя сферические координаты r, ϑ, ϕ, связанные с x, y, z соотношениями

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta\sin\phi, \quad z = r\sin\vartheta\cos\phi\,, \tag{1.62}$$

а также изоморфизм алгебр $\mathbb{F}$ и $\mathbf{F}$, с учетом которого получение таких разложений сводится к определению коэффициентов Фурье:

$$\zeta^n = r^n\Bigg(P_n(\cos\vartheta)\; e_1 +$$

$$+2\sum_{m=1}^{n}\frac{n!}{(n+m)!}\; P_n^m(\cos\vartheta)\Big(\sin\, m\phi\, e_{2m} + \cos\, m\phi\, e_{2m+1}\Big)\Bigg), \tag{1.63}$$

где n — целое положительное число, P_n и P_n^m — полиномы и присоединенные полиномы Лежандра:

$$P_n(t) := \frac{1}{2^n\; n!}\;\frac{d^n}{dt^n}\;(t^2 -\; 1)^n, \tag{1.64}$$

$$P_n^m(t) := (1-t^2)^{m/2}\;\frac{d^m}{dt^m}\;P_n(t)\,. \tag{1.65}$$

Таким образом, компонентами функции ζ^n в разложении (1.63) являются $(2n+1)$ линейно независимых шаровых функций степени n. Используя разложение (1.63) и правила умножения для базисных элементов алгебры $\mathbb{F}$, легко устанавливается справедливость следующего утверждения.

Теорема 1.14. *Каждая шаровая функция*

$$r^n\Bigg(a_{n,0}P_n(\cos\vartheta) + \sum_{m=1}^{n}\Big(a_{n,m}\cos m\phi + b_{n,m}\sin m\phi\Big)P_n^m(\cos\vartheta)\Bigg)\,,$$

где $a_{n,0}, a_{n,m}, b_{n,m} \in \mathbb{R}$, *является первой компонентой разложения по базису* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *моногенной функции*

$$\Bigg(a_{n,0}\, e_1 + \sum_{m=1}^{n}(-1)^m\,\frac{(n+m)!}{n!}\,\Big(b_{n,m}\, e_{2m} + a_{n,m}\, e_{2m+1}\Big)\Bigg)\zeta^n\,,$$

где $\zeta := xe_1 + ye_2 + ze_3$ *и* x, y, z *связаны со сферическими координатами* r, ϑ, ϕ *соотношениями* (1.62).

Аналогично равенству (1.63) устанавливается разложение экспоненциальной функции:

$$e^{\zeta} = e^{r\cos\vartheta}\Big(J_0(r\sin\vartheta)e_1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(r\sin\vartheta)\big(\sin m\phi\, e_{2m} + \cos m\phi\, e_{2m+1}\big)\Big),$$

где $J_m(t)$ — функции Бесселя:

$$J_m(t) := \frac{(-1)^m}{\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{it\cos\tau}\ \cos m\tau\ d\tau\,. \tag{1.66}$$

10.3. Связь с гармоническими векторами. Установим некоторые важные свойства решений системы уравнений (1.58) вне их связи с моногенными функциями, принимающими значения в алгебре $\mathbb{F}$.

Теорема 1.15. *Если функции* $U_k : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ *имеют в области* $Q \subset \mathbb{R}^3$ *непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяют условиям* (1.58), *то они удовлетворяют уравнению* (1.4) *в* Q.

Доказательство. Дифференцируя по y первое из условий (1.58) и используя при этом второе из условий (1.58), получаем

$$\frac{\partial^2 U_1(x,y,z)}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 U_2(x,y,z)}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 U_1(x,y,z)}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\ \frac{\partial^2 U_5(x,y,z)}{\partial x^2}\,.$$

Далее, дифференцируя по z шестое из условий (1.58) и используя при этом восьмое из условий (1.58), получаем

$$\frac{\partial^2 U_1(x,y,z)}{\partial z^2} = -\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 U_3(x,y,z)}{\partial z \partial x} = -\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 U_1(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\ \frac{\partial^2 U_5(x,y,z)}{\partial x^2}\,.$$

Наконец, складывая полученные равенства, получаем равенство $\Delta_3 U_1(x,y,z) = 0$. Аналогично доказывается справедливость равенств $\Delta_3 U_k(x,y,z) = 0$ при $k = 2, 3, \ldots$. Теорема доказана.

Теорема 1.16. *Каждое решение системы* (1.58) *в области* $Q \subset \subset \mathbb{R}^3$ *порождает гармонический вектор* $\mathbf{V} := (U_1, -\frac{1}{2}\,U_2, -\frac{1}{2}\,U_3)$ *в* Q.

Доказательство. Покажем, что следствием условий (1.58) являются равенства (1.21), равносильные равенствам (1.2) для вектора $\mathbf{V} := (U_1, -\frac{1}{2}\,U_2, -\frac{1}{2}\,U_3)$. Действительно, третье и четвертое из уравнений (1.21) входят в систему (1.58), второе уравнение из (1.21) является следствием третьего и седьмого условий системы (1.58), а первое уравнение из (1.21) — следствием второго и восьмого условий системы (1.58). Теорема доказана.

Теорема 1.17. *Для любой гармонической в односвязной области $Q \subset \mathbb{R}^3$ функции $U_1 : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ существуют гармонические функции $U_k : Q \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 2, 3, \ldots$, такие, что в Q выполняются условия* (1.58).

Доказательство. Прежде всего, складывая и вычитая второе и восьмое условия системы (1.58), а также третье и седьмое ее условия, а также четвертое условие системы (1.58) при $k = m$ и девятое ее условие при $k = 2m + 1$, а также пятое условие системы (1.58) при $k = m$ и девятое ее условие при $k = 2m$, где $m = 2, 3, \ldots$, перепишем систему (1.58) в равносильной форме:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial U_2}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial U_3}{\partial z} = 0\,,\\
&\frac{\partial U_3}{\partial y} - \frac{\partial U_2}{\partial z} = 0\,,\\
&\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial U_2}{\partial x} = 0\,,\\
&\frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial U_3}{\partial x} = 0\,,\\
&\frac{\partial U_{2k}}{\partial x} = -\frac{\partial U_{2k-2}}{\partial z} - \frac{\partial U_{2k-1}}{\partial y}\,,\\
&\frac{\partial U_{2k+1}}{\partial x} = \frac{\partial U_{2k-2}}{\partial y} - \frac{\partial U_{2k-1}}{\partial z}\,,\\
&\frac{\partial U_{2k}}{\partial z} - \frac{\partial U_{2k+1}}{\partial y} = \frac{\partial U_{2k-2}}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial U_{2k}}{\partial y} + \frac{\partial U_{2k+1}}{\partial z} = \frac{\partial U_{2k-1}}{\partial x}\,, \qquad k = 2, 3, \ldots\,.
\end{aligned} \tag{1.67}$$

Далее отметим, что в области Q существует гармонический вектор $\mathbf{V_0} := (U_1, v_2^0, v_3^0)$. Кроме того, компоненты v_2, v_3 любого гармонического в области Q вектора $\mathbf{V} := (v_1, v_2, v_3)$ такого, что $v_1 = U_1$, находятся с точностью до действительной и мнимой частей произвольной функции $f_1(t)$, голоморфной в области $\{t = z + iy : (x, y, z) \in Q\}$ комплексной плоскости, то есть при всех $(x, y, z) \in Q$ справедливы равенства

$$v_2(x, y, z) = v_2^0(x, y, z) + \operatorname{Re} f_1(z + iy), \;\; v_3(x, y, z) = v_3^0(x, y, z) + \operatorname{Im} f_1(z + iy).$$

Тогда с учетом теоремы 1.16 находим функции U_2 и U_3, а именно: $U_2 := -2\, v_2$, $\;U_3 := -2\, v_3$.

Покажем теперь, что последние четыре условия системы (1.67) позволяют определить функции U_{2k}, U_{2k+1}, если уже определены функции $U_2, U_3, \ldots, U_{2k-1}$. Действительно, интегрируя пятое и шестое уравнения системы (1.67), получаем выражения

$$U_{2k}(x,y,z) = -\int\limits_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial U_{2k-2}(\tau,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial U_{2k-1}(\tau,y,z)}{\partial y} \right) d\tau + \widetilde{u}_{2k}(z,y),$$

$$U_{2k+1}(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial U_{2k-2}(\tau,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial U_{2k-1}(\tau,y,z)}{\partial z} \right) d\tau + \widetilde{u}_{2k+1}(z,y)$$

при (x,y,z), принадлежащей окрестности $\mathcal{N} \subset Q$ произвольной точки $(x_0,y_0,z_0) \in Q$.

После подстановки этих выражений в седьмое и восьмое уравнения системы (1.67) с учетом того, что функции U_{2k-2}, U_{2k-1} являются гармоническими в области $\mathcal{N}$, получим неоднородную систему Коши – Римана (см., например, [7, с. 27]) для нахождения функций $\widetilde{u}_{2k}$, $\widetilde{u}_{2k+1}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{u}_{2k}(z,y)}{\partial z} - \frac{\partial \widetilde{u}_{2k+1}(z,y)}{\partial y} &= \left. \frac{\partial U_{2k-2}(x,y,z)}{\partial x} \right|_{x=x_0}, \\ \frac{\partial \widetilde{u}_{2k}(z,y)}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{u}_{2k+1}(z,y)}{\partial z} &= \left. \frac{\partial U_{2k-1}(x,y,z)}{\partial x} \right|_{x=x_0}. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Решения системы (1.68) находятся с точностью до действительной и мнимой частей произвольной функции, голоморфной в области $\{t = z + iy : (x,y,z) \in \mathcal{N}\}$ комплексной плоскости. Поэтому с учетом теоремы единственности для пространственных гармонических функций построенные в окрестности $\mathcal{N}$ функции U_{2k}, U_{2k+1}, принимая во внимание односвязность области Q, легко продолжить во всю область Q. Теорема доказана.

Заметим, что функции U_{2m}, U_{2m+1}, удовлетворяющие при $k = m \geq 2$ последним четырем условиям системы (1.67), находятся с точностью до действительной и мнимой частей произвольной функции $f_m(t)$, голоморфной в области $\{t = z + iy : (x,y,z) \in Q\}$ комплексной плоскости, то есть при всех $(x,y,z) \in Q$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} U_{2m}(x,y,z) &= U^0_{2m}(x,y,z) + \operatorname{Re} f_m(z+iy), \\ U_{2m+1}(x,y,z) &= U^0_{2m+1}(x,y,z) + \operatorname{Im} f_m(z+iy); \end{aligned}$$

здесь U^0_{2m}, U^0_{2m+1} — функции, образующие вместе с функциями $U_1, U_2, \ldots, U_{2m-1}$ частное решение системы (1.67), где $k = 2, 3, \ldots, m$.

Глава 2. Алгебры моногенных функций и пространственные потенциальные поля с осевой симметрией

§ 11. Пространственные стационарные потенциальные соленоидальные поля с осевой симметрией

В приложениях большой интерес вызывают задачи для стационарных потенциальных соленоидальных полей с осевой симметрией.

Пространственное потенциальное соленоидальное поле, симметричное относительно оси Ox, описывается в его меридианной плоскости xOr в терминах потенциала $\varphi(x,r)$ и функции тока Стокса $\psi(x,r)$, которые удовлетворяют системе уравнений эллиптического типа с вырождением на оси:

$$r\,\frac{\partial\varphi(x,r)}{\partial x}=\frac{\partial\psi(x,r)}{\partial r}\,,\qquad r\,\frac{\partial\varphi(x,r)}{\partial r}=-\frac{\partial\psi(x,r)}{\partial x}\,. \tag{2.1}$$

Из системы (2.1) при условии существования и непрерывности частных производных второго порядка у функций $\varphi(x,r)$, $\psi(x,r)$ следуют уравнение для осесимметричного потенциала

$$r\ \Delta\varphi(x,r) + \frac{\partial\varphi(x,r)}{\partial r} = 0 \tag{2.2}$$

и уравнение для функции тока Стокса

$$r\ \Delta\psi(x,r) - \frac{\partial\psi(x,r)}{\partial r} = 0, \tag{2.3}$$

где $\Delta := \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial r^2$.

Уравнение (2.2) является следствием трехмерного уравнения Лапласа (1.4) в случае, когда решение последнего, можно сказать, имеет симметрию относительно оси Ox:

$$u(x,y,z) = \varphi(x,r) = \varphi(x,-r)\,, \qquad r := \sqrt{y^2+z^2}\,,$$

Проблема разработки методов исследования пространственных потенциальных полей, аналогичных методам теории аналитических функций комплексной переменной, которые применяются для описания плоских потенциальных полей, очерчена М.А. Лаврентьевым (см., например, [32, с. 205, с. 18]). В частности, относительно системы (2.1) в монографии [32, с. 18] констатируется, что количественная теория решений этой системы уравнений развита значительно меньше, чем для решений системы (1), то есть аналитических функций в комплексной плоскости.

§ 12. Моногенные функции и осесимметричные потенциалы в правильных областях

12.1. Моногенные и аналитические функции в плоскости μ. Выделим в алгебре $\mathbb{F}$, рассмотренной в § 10, подалгебру $\mathbb{H}$, линейное пространство которой порождено подсистемой базисных элементов $\{e_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$. Переобозначим базисные элементы алгебры $\mathbb{H}$ так, что в дальнейшем вместо e_{2k-1} будем писать e_k при $k = 1, 2, \ldots$.

Итак, $\mathbb{H} := \{a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k : a_k \in \mathbb{R}, \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty\}$ — коммутативная ассоциативная банахова алгебра над полем $\mathbb{R}$ с нормой $\|a\|_{\mathbb{H}} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ и таблицей умножения для элементов базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, предложенной в работах [40, 96]:

$$e_n e_1 = e_n, \quad e_m e_n = \frac{1}{2}\left(e_{m+n-1} + (-1)^{n-1} e_{m-n+1}\right) \quad \forall\, m \geq n \geq 1\,.$$

Через $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} := \mathbb{H} \oplus i\,\mathbb{H} \equiv \{c = a + ib : a, b \in \mathbb{H}\}$ обозначим комплексификацию алгебры $\mathbb{H}$ такую, что норма в $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ задается соотношением $\|c\|_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|$, где $c = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\, e_k, \quad c_k \in \mathbb{C}$.

Отметим некоторые свойства алгебры $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$. Алгебра $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ изоморфна алгебре $\mathbf{F_{cos}}$ абсолютно сходящихся тригонометрических рядов Фурье

$$c(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\; i^{k-1} \cos(k-1)\tau \tag{2.4}$$

с комплексными коэффициентами c_k и нормой $\|c\|_{\mathbf{F_{cos}}} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|$, при этом имеет место изоморфизм $e_k \longleftrightarrow i^{k-1}\cos(k-1)\tau$ между базисными элементами.

В монографии [9] описана структура максимальных идеалов алгебры абсолютно сходящихся комплексных рядов Фурье. Это описание позволяет сделать вывод о строении максимальных идеалов алгебры $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ и о том, что для базисных элементов e_k при $k = 2, 3, \ldots$ не существует обратных элементов в алгебре $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$.

В частности, множество

$$\mathcal{I}_0 := \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}} : \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\operatorname{Re} c_{2k-1} - \operatorname{Im} c_{2k}\right) = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\operatorname{Re} c_{2k} + \operatorname{Im} c_{2k-1}\right) = 0 \Big\}$$

является максимальным идеалом алгебры $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$. Он изоморфен максимальному идеалу алгебры $\mathbf{F_{cos}}$, который состоит из рядов (2.4), равных нулю при $\tau = 0$. В дальнейших построениях идеал $\mathcal{I}_0$ будет играть важную роль.

Идеалу $\mathcal{I}_0$ соответствует линейный функционал

$$f_{\mathcal{I}_0}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k\Big) := -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\operatorname{Re} c_{2k-1} - \operatorname{Im} c_{2k}\right) -$$
$$- i \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\operatorname{Re} c_{2k} + \operatorname{Im} c_{2k-1}\right)$$

на $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, ядром которого является $\mathcal{I}_0$.

Выделим в $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ линейную оболочку векторов e_1, e_2 над полем $\mathbb{R}$, которая является декартовой плоскостью $\mu := \{\zeta = xe_1 + re_2 : x, r \in \mathbb{R}\}$.

Условимся использовать согласованные обозначения для соответствующих областей плоскости μ и декартовой плоскости xOr, а именно: области E декартовой плоскости xOr будем ставить в соответствие конгруэнтную ей область $E_\zeta := \{\zeta = xe_1 + re_2 : (x,r) \in E\}$ в μ.

Функцию $\Phi : E_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}_\mathbb{C}$ назовем *моногенной* функцией в области E_ζ, если Φ дифференцируема по Гато в каждой точке области E_ζ, то есть если для каждой точки $\zeta \in E_\zeta$ существует элемент $\Phi'(\zeta)$ алгебры $\mathbb{H}_\mathbb{C}$ такой, что равенство (1.5) выполняется для всех $h \in \mu$.

Для моногенных функций $\Phi : E_\zeta \longrightarrow H_\mathbb{C}$ справедлива следующая теорема, доказательство которой проводится аналогично доказательству теоремы 1.13.

Теорема 2.1. *Для того чтобы функция* $\Phi : E_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}_\mathbb{C}$ *вида*

$$\Phi(xe_1 + re_2) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x,r)\, e_k,$$

где $U_k : E \longrightarrow \mathbb{C}$, *была моногенной в области* $E_\zeta \subset \mu$, *необходимо и достаточно, чтобы функции* U_k, $k = 1, 2, \ldots$, *были дифференцируемыми в области* E *и при этом в* E *выполнялись следующие условия:*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_1(x,r)}{\partial r} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial U_2(x,r)}{\partial x}\,, \\
&\frac{\partial U_2(x,r)}{\partial r} = \frac{\partial U_1(x,r)}{\partial x} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_3(x,r)}{\partial x}\,, \\
&\frac{\partial U_k(x,r)}{\partial r} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{k-1}(x,r)}{\partial x} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial U_{k+1}(x,r)}{\partial x}\,, \quad k = 3, 4, \ldots\,,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

а также соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial U_k(x,r)}{\partial x} \right| < \infty, \tag{2.6}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \sum_{k=1}^{\infty} \left| U_k(x + \varepsilon h_1, r + \varepsilon h_2,) - U_k(x,r) - \frac{\partial U_k(x,r)}{\partial x}\,\varepsilon h_1 - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial U_k(x,r)}{\partial r}\,\varepsilon h_2 \right| \varepsilon^{-1} = 0 \quad \forall\, h_1, h_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{2.7}$$

Отметим, что условия (2.5) по своей природе аналогичны условиям Коши – Римана для моногенных функций комплексной переменной, а соотношения (2.6), (2.7) обусловлены бесконечномерностью алгебры $\mathbb{H}_\mathbb{C}$.

Рассмотрим аналитические функции переменной $\zeta \in \mu$. Функцию $\Psi : E_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}_\mathbb{C}$ назовем ***аналитической*** в области E_ζ, если в некоторой окрестности каждой точки $\zeta_0 \in E_\zeta$ она представима суммой сходящегося степенного ряда, коэффициенты которого являются элементами алгебры $\mathbb{H}_\mathbb{C}$:

$$\Psi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, (\zeta - \zeta_0)^k, \qquad c_k \in \mathbb{H}_\mathbb{C}.$$

Очевидно, что аналитическая в области E_ζ функция $\Psi : E_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}_\mathbb{C}$ является моногенной в этой области и ее производная $\Psi'(\zeta)$ также моногенна в E_ζ. При этом остается неизвестным, является ли всякая моногенная в области E_ζ функция аналитической в этой области.

Для аналитических функций переменной $\zeta \in \mu$ справедлива теорема единственности, формулировка и доказательство которой полностью аналогичны теореме единственности аналитических функций комплексной переменной [31, с. 68].

Рассмотрим теперь ***правильную*** в направлении оси Or область D декартовой плоскости xOr. Это означает, что область D вместе с каждой своей точкой (x, r) содержит также отрезок, который соединяет точки (x, r) и $(x, -r)$.

Аналитическую в области D_ζ функцию $\Psi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}_\mathbb{C}$ назовем ***$\mathbb{C}$-аналитической***, если в некоторой окрестности каждой точки $x_0 e_1 \in D_\zeta$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, она представляется суммой сходящегося степенного ряда с комплексными коэффициентами:

$$\Psi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, (\zeta - x_0 \, e_1)^k, \qquad c_k \in \mathbb{C}.$$

Очевидно, что $\mathbb{C}$-аналитическая функция является главным продолжением некоторой голоморфной функции комплексной переменной.

Условимся через D_z обозначать область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, конгруэнтную области D декартовой плоскости xOr при соответствии $z = x + ir$, $(x, r) \in D$.

Пусть γ — жорданова спрямляемая кривая в $\mathbb{C}$. Интеграл по γ от функции $g : \gamma \longrightarrow \mathbb{H}_\mathbb{C}$, имеющей вид

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \, e_k, \qquad t \in \gamma,$$

где $g_k : \gamma \longrightarrow \mathbb{C}$, определим следующим образом:

$$\int_\gamma g(t)\,dt := \sum_{k=1}^{\infty} e_k \int_\gamma g_k(t)\,dt$$

при условии, что ряд в правой части равенства является элементом алгебры $\mathbb{H}_\mathbb{C}$.

Теорема 2.2. *Пусть граница ∂D_z области D_z является жордановой спрямляемой кривой и функция $h : \partial D_z \longrightarrow \mathbb{C}$ суммируема на ∂D_z. Тогда интеграл*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_z} (te_1 - \zeta)^{-1}\, h(t)\, dt \tag{2.8}$$

является $\mathbb{C}$-аналитической функцией в области D_ζ.

Доказательство. Пусть $\zeta = xe_1 + re_2$, $t \in \mathbb{C}$. Для определения коэффициентов в разложении элемента $(te_1 - \zeta)^{-1}$ по базису $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ используем изоморфизм алгебр $\mathbb{H}_\mathbb{C}$ и $\mathbf{F_{cos}}$, а также выражение интеграла [13, с. 27]

$$\int_0^\pi \frac{\cos m\tau}{a + b\cos\tau}\, d\tau,$$

позволяющее выписать коэффициенты Фурье функции $(t - x - yi\cos\tau)^{-1}$. Таким образом, получаем

$$\begin{gathered}(te_1 - \zeta)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}} \Biggl(e_1 + \\ +2 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)} - (t-x)}{r}\right)^{k-1} e_k\Biggr), \\ t \notin s[z, \bar z],\ z = x + ir,\ r \neq 0,\end{gathered} \tag{2.9}$$

где отрезок $s[z, \bar z]$, соединяющий точки z и $\bar z$, является спектром элемента ζ, а $\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}$ понимается как непрерывная ветвь функции $H(t) = \sqrt{(t-z)(t-\bar z)}$, аналитической вне разреза вдоль отрезка $s[z, \bar z]$, такая, что $H(t) > 0$ для всех $t > \operatorname{Re} z$.

Следствием разложения (2.9) и суммируемости функции h на ∂D_z является существование интеграла (2.8) при всех $\zeta \in D_\zeta$.

Пусть теперь $\zeta_0 = x_0\, e_1 + r_0\, e_2$ — фиксированная точка области D_ζ, при этом $x_0, r_0 \in \mathbb{R}$. С учетом неравенства

$$\left| \frac{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - (t-x)}{r} \right| \leq q \qquad \forall\, z \in D_z \ : \ |z - x_0 - ir_0| \leq \varepsilon \quad \forall\, t \in \gamma\,, \tag{2.10}$$

где ε — некоторое достаточно малое положительное число и q — некоторое число, меньшее единицы, в случае непрерывной функции h разложение интеграла (2.8) в степенной ряд в окрестности точки ζ_0 устанавливается аналогично доказательству разложения в степенной ряд интеграла типа Коши в комплексной плоскости [88, с. 107].

Далее, с учетом неравенства (2.10), теоремы Лузина [27, с. 291] и абсолютной непрерывности интеграла Лебега как функции множества [27, с. 301] такое же разложение интеграла (2.8) в степенной ряд легко распространить на случай произвольной суммируемой на γ функции h. Если при этом $r_0 = 0$, то очевидно, что коэффициенты в указанном разложении являются комплексными числами. Теорема доказана.

Отличие доказанной теоремы от известной теоремы для банаховых алгебр [87, с. 182] заключается в том, что функция $h : \partial D_z \longrightarrow \mathbb{C}$ является суммируемой.

Введем в рассмотрение линейный оператор A, который каждой функции $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}_\mathbb{C}$ ставит в соответствие функцию $F : D_z \longrightarrow \mathbb{C}$ по формуле $F(z) := f_{\mathcal{I}_0}(\Phi(\zeta))$, где $z = x + ir$ и $\zeta = xe_1 + re_2$ — соответствующие точки областей D_z и D_ζ. Тогда очевидно, что если функция Φ моногенна в области D_ζ, то функция $F = A\Phi$ голоморфна в области D_z.

В следующей теореме определяется вид интегральной формулы Коши для $\mathbb{C}$-аналитических функций переменной $\zeta \in \mu$.

Теорема 2.3. *Если функция $\Psi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}_\mathbb{C}$ является $\mathbb{C}$-аналитической в области D_ζ, то*

$$\Psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (te_1 - \zeta)^{-1}\, (A\Psi)(t)\, dt \quad \forall\, \zeta \in D_\zeta, \tag{2.11}$$

где γ — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая в D_z, охватывающая отрезок $s[z, \bar{z}]$.

Доказательство. Обе части равенства (2.11) являются $\mathbb{C}$-аналитическим продолжением в плоскость μ голоморфной функции $(A\Psi)(z)$, $z \in D_z$, и совпадают на действительной оси. По теореме единственности такое продолжение единственно. Теорема доказана.

Покажем, что $\mathbb{C}$-аналитические функции являются в определенном смысле компонентами функций, моногенных в области D_ζ.

Теорема 2.4. *Каждая моногенная в области D_ζ функция $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}_\mathbb{C}$ представляется в виде*

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma (te_1 - \zeta)^{-1}(A\Phi)(t)\, dt + \Phi_0(\zeta) \qquad \forall\, \zeta \in D_\zeta, \tag{2.12}$$

где кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме 2.3, *а $\Phi_0 : D_\zeta \longrightarrow \mathcal{I}_0$ — некоторая моногенная в области D_ζ функция, принимающая значения в идеале $\mathcal{I}_0$.*

Доказательство. Легко видеть, что определяемая из равенства (2.12) моногенная в области D_ζ функция Φ_0 принадлежит ядру оператора A, то есть $\Phi_0(\zeta) \in \mathcal{I}_0$ при всех $\zeta \in D_\zeta$. Теорема доказана.

Из теоремы 2.4 следует, что алгебра моногенных в области D_ζ функций разлагается в прямую сумму алгебры $\mathbb{C}$-аналитических в D_ζ функций и алгебры моногенных в D_ζ функций, принимающих значения в идеале $\mathcal{I}_0$. При этом интеграл в равенстве (2.12) является главным продолжением голоморфной функции $F(z) = (A\Phi)(z)$ комплексной переменной z в область D_ζ.

Выпишем разложения по элементам базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ некоторых элементарных $\mathbb{C}$-аналитических функций переменной $\zeta = xe_1 + re_2$ (заметим, что с учетом изоморфизма алгебр $\mathbb{H}_\mathbb{C}$ и $\mathbf{F_{cos}}$ получение таких разложений сводится к определению коэффициентов Фурье). Так, разложение степенной функции имеет вид

$$\zeta^n = (x^2 + r^2)^{n/2}\left(P_n(\cos\vartheta)\, e_1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(\operatorname{sgn} r)^k\, n!}{(n+k)!}\, P_n^k(\cos\vartheta)\, e_{k+1}\right), \tag{2.13}$$

где n — целое положительное число, $\quad \cos\vartheta := x(x^2 + r^2)^{-1/2}$,

$$\operatorname{sgn} r := \begin{cases} \;\;\,1, & \text{если } r \geq 0, \\ -1, & \text{если } r < 0, \end{cases}$$

а полиномы P_n и присоединенные полиномы Лежандра P_n^m определяются равенствами (1.64), (1.65).

Для функций e^ζ, $\sin\zeta$ и $\cos\zeta$ будем иметь

$$e^\zeta = e^x\left(J_0(r)\, e_1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(r)\, e_{k+1}\right),$$

$$\sin\zeta = \sin x\left(J_0(ir)\, e_1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(ir)\, e_{2k+1}\right) - 2i\,\cos x \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(ir)\, e_{2k},$$

$$\cos\zeta = \cos x\left(J_0(ir)\,e_1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(ir)\,e_{2k+1}\right) + 2i\,\sin x\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(ir)\,e_{2k},$$

где функции Бесселя $J_m(t)$ определены равенством (1.66).

Для функций ζ^{-1} и $\mathrm{Ln}\,\zeta$ получим

$$\zeta^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}\left(e_1 + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\dfrac{\sqrt{x^2+r^2}-x}{r}\right)^k e_{k+1}\right) & \text{при } x>0, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}\left(e_1 + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+r^2}+x}{r}\right)^k e_{k+1}\right) & \text{при } x<0, \end{cases}$$

$$\mathrm{Ln}\,\zeta = \begin{cases} \left(\ln\dfrac{\sqrt{x^2+r^2}+x}{2} + 2m\pi i\right)e_1 + \\ \qquad +2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+r^2}-x}{r}\right)^k e_{k+1} & \text{при } x>0, \\ \left(\ln\dfrac{\sqrt{x^2+r^2}-x}{2} + (2m+1)\pi i\right)e_1 + \\ \qquad +2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+r^2}+x}{r}\right)^k e_{k+1} & \text{при } x<0, \end{cases}$$

где m — целое число. При этом функции ζ^{-1} и $\mathrm{Ln}\,\zeta$ не определены при $x=0$.

Поскольку множество $\mu \setminus \{\zeta = xe_1 + re_2 \in D_\zeta : \sqrt{x^2+r^2} < N\}$ связно при любых N, то аналогично теореме Рунге [88, с. 124] доказывается следующий аналог этой теоремы для $\mathbb{C}$-аналитических функций переменной $\zeta \in \mu$.

Теорема 2.5. *Пусть функция $\Psi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}_\mathbb{C}$ является $\mathbb{C}$-аналитической в D_ζ и K_ζ — произвольное компактное подмножество области D_ζ. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется полином $P(\zeta)$ с комплексными коэффициентами такой, что*

$$\sup_{\zeta\in K_\zeta}\|\Psi(\zeta) - P(\zeta)\|_{\mathbb{H}_\mathbb{C}} < \varepsilon\,.$$

12.2. Связь с осесимметричными потенциальными полями. Прикладное значение моногенных функций переменной $\zeta \in \mu$ раскрывает следующая теорема, в которой устанавливается связь между этими функциями и решениями системы (2.1).

Теорема 2.6. *Если функция $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}_\mathbb{C}$ моногенна в области D_ζ, то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma (te_1-\zeta)^{-1}\,(A\Phi)(t)\,dt = e_1\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{(A\Phi)(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\,\sum_{k=2}^{\infty} e_k\,\int\limits_\gamma \frac{(A\Phi)(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\left(\frac{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}-(t-x)}{r}\right)^{k-1}\,dt =:$$

$$=: \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x,r)\,e_k \qquad \forall\,\zeta = xe_1 + re_2 \in D_\zeta\ :\ r\neq 0, \tag{2.14}$$

где $z = x + ir$, а кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме 2.3. *При этом первая и вторая компоненты интеграла* (2.14) *порождают пару решений системы* (2.1) *в области D:*

$$\varphi(x,r) = \begin{cases} U_1(x,r) & \textit{при}\ r\neq 0,\\ (A\Phi)(x) & \textit{при}\ r = 0, \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\psi(x,r) = \begin{cases} \dfrac{r}{2}\,U_2(x,r) & \textit{при}\ r\neq 0,\\ 0 & \textit{при}\ r = 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Кроме того, функции (2.15), (2.16) *являются соответственно решениями уравнений* (2.2), (2.3) *в области D.*

Доказательство. Легко видеть, что равенство (2.14) является следствием разложения (2.9). Теперь при $(x,r)\in D$ равенство (2.15) приобретает вид

$$\varphi(x,r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_\gamma \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt & \text{при}\ r\neq 0\,,\\ F(x) & \text{при}\ r = 0\,, \end{cases} \tag{2.17}$$

где $F = A\Phi$ и $z = x+ir$. Учитывая голоморфность функции F в области D_z комплексной плоскости и используя теорему Коши, при $(x,r)\in D$ записываем равенство (2.16) в виде

$$\psi(x,r) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_\gamma \frac{F(t)\,(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt & \text{при}\ r\neq 0\,,\\ 0 & \text{при}\ r = 0\,. \end{cases} \tag{2.18}$$

Обозначим через D'_z область комплексной плоскости, ограниченную кривой γ. С учетом того, что при каждом $t \in \gamma$ функция

$$\Phi_t(x,r) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{(t-x-ir)(t-x+ir)}} & \text{при } r \neq 0\,, \\ \dfrac{1}{t-x} & \text{при } r = 0 \end{cases}$$

имеет в конгруэнтной области D' декартовой плоскости xOr непрерывные частные производные всех порядков, по стандартной схеме [84, с. 661] доказывается, что функция (2.17) также имеет в D' непрерывные частные производные любого порядка; при этом

$$\frac{\partial\varphi(x,r)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} F(t)\,\frac{\partial\Phi_t(x,r)}{\partial x}\,dt\,, \qquad \frac{\partial\varphi(x,r)}{\partial r} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} F(t)\,\frac{\partial\Phi_t(x,r)}{\partial r}\,dt$$

и т.п. Аналогично доказывается, что для функции (2.18) в D' справедливы равенства

$$\frac{\partial\psi(x,r)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} F(t)\,\frac{\partial\Psi_t(x,r)}{\partial x}\,dt\,, \qquad \frac{\partial\psi(x,r)}{\partial r} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} F(t)\,\frac{\partial\Psi_t(x,r)}{\partial r}\,dt$$

и т.п., где

$$\Psi_t(x,r) := \begin{cases} -\dfrac{t-x}{\sqrt{(t-x-ir)(t-x+ir)}} & \text{при } r \neq 0\,, \\ -1 & \text{при } r = 0\,. \end{cases}$$

Теперь уравнения системы (2.1), а также (2.2) и (2.3), при подстановке в них частных производных функций (2.15) и (2.16) превращаются в тождества в области D'. Теорема доказана.

Равенство (2.14) задает явный вид главного продолжения голоморфной функции $F(z) = (A\Phi)(z)$ комплексной переменной z в область D_ζ.

Подчеркнем особо, что для приложений теоремы 2.6 важен изоморфизм между алгеброй $\mathbb{H}_\mathbb{C}$ и алгеброй $\mathbf{F_{cos}}$, позволяющий строить в явном виде главные продолжения голоморфных функций комплексной переменной, то есть находить в явном виде компоненты U_k разложения (2.14) этих продолжений по элементам базиса и получать решения φ, ψ системы (2.1) в области D.

В следующем параграфе будет показано, что при выполнении некоторых естественных условий каждое решение уравнения (2.2) и каждое решение уравнения (2.3) в области D представляются формулами

(2.17), (2.18), при этом будет найдено выражение голоморфной функции $F = A\Phi$ через функции φ и ψ в явном виде.

12.3. Связь с уравнениями эллиптического типа с вырождением на оси. Теорему 2.6 дополняет следующее утверждение о связи между компонентами U_k интеграла (2.14) и решениями некоторых семейств уравнений эллиптического типа с вырождением на оси Ox.

Теорема 2.7. *Если функция $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{H}_\mathbb{C}$ моногенна в области D_ζ, то компоненты U_k интеграла* (2.14) *удовлетворяют уравнениям*

$$r^2\,\Delta U_k(x,r) + r\,\frac{\partial U_k(x,r)}{\partial r} - (k-1)^2\,U_k(x,r) = 0\,, \quad k = 2,3,\ldots, \tag{2.19}$$

в области D. Кроме того, функция

$$\psi_k(x,r) := r^{k-1}\,U_k(x,r) \tag{2.20}$$

в области D является решением уравнения

$$r\,\Delta\psi_k(x,r) - (2k-3)\,\frac{\partial\psi_k(x,r)}{\partial r} = 0\,, \quad k = 2,3,\ldots. \tag{2.21}$$

Доказательство. При $(x,r) \in D$, используя равенства (2.14), (2.20), получаем следующее выражение функции ψ_k:

$$\psi_k(x,r) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{F(t)\big(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)} - (t-x)\big)^{k-1}}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt\,, & \\ & \text{если } r \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{если } r = 0\,, \end{cases} \tag{2.22}$$

где $F = A\Phi$ и $z = x + ir$.

Так же, как и при доказательстве теоремы 2.6, при $(x,r) \in D$ получаем равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\psi_k(x,r)}{\partial x^2} = {} & \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{F(t)\big(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)} - (t-x)\big)^{k-1}}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\,)^3}\times \\ & \times\left((k-1)^2 + \frac{3(k-1)(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}} + \frac{2(t-x)^2 - r^2}{(t-z)(t-\bar z)}\right)dt\,, \\ \frac{\partial\psi_k(x,r)}{\partial r} = {} & \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{r\,F(t)\big(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)} - (t-x)\big)^{k-2}}{(t-z)(t-\bar z)}\times \\ & \times\left(k - 2 + \frac{t-x}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\right)dt\,, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2\psi_k(x,r)}{\partial r^2} = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{F(t)\big(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}-(t-x)\big)^{k-3}}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\,)^3}\times$$
$$\times\Bigg((k-2)\big((k-3)r^2+(t-x)^2\big)+\frac{(k-3)(t-x)\big(2r^2-(t-x)^2\big)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}+$$
$$+\frac{(t-x)^2\big(2r^2-(t-x)^2\big)}{(t-z)(t-\bar z)}\Bigg)dt\,.$$

Подставляя частные производные функции (2.22) в уравнение (2.21) и принимая во внимание их непрерывность в точках оси Ox, устанавливаем, что (2.21) превращается в тождество в области D. Наконец, при подстановке выражения (2.20) в равенство (2.21) замечаем, что функция U_k удовлетворяет уравнению (2.19) в D. Теорема доказана.

§ 13. Интегральные представления осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в правильных областях

Пусть D — область плоскости xOr, правильная в направлении оси Or. Как вытекает из доказательства теоремы 2.6, каждой голоморфной в области D_z функции $F : D_z \longrightarrow \mathbb{C}$ соответствуют решения $\varphi(x,y)$, $\psi(x,r)$ уравнений (2.2), (2.3) в области D, которые определяются формулами (2.17), (2.18).

Справедливы также обратные результаты о представлении решений уравнений (2.2), (2.3) в области D формулами (2.17), (2.18) при естественных предположениях о функциях $\varphi(x,r)$ и $\psi(x,r)$.

13.1. Интегральное представление осесимметричного потенциала. При доказательстве представления потенциала $\varphi(x,r)$ в области D формулой (2.17) используется следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть функция $\varphi(x,r)$ имеет в области D непрерывные частные производные второго порядка и является решением уравнения* (2.2) *в D. Тогда функции $F_1(x+ir)=u_1(x,r)+iv_1(x,r)$ и $F_2(x+ir)=u_2(x,r)+iv_2(x,r)$, где*

$$u_1(x,r) := \begin{cases} \tilde{u}_1(x,r) \equiv \varphi(x,0) + \\ \qquad + r \displaystyle\int_0^r \frac{\varphi'_s(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\, ds & \textit{при } (x,r) \in D : r > 0, \\ \varphi(x,0) & \textit{при } (x,r) \in D : r = 0, \\ \tilde{u}_1(x,-r) & \textit{при } (x,r) \in D : r < 0, \end{cases} \tag{2.23}$$

$$v_1(x,r) := \begin{cases} \tilde{v}_1(x,r) \equiv \displaystyle\int_0^r \frac{s\ \varphi'_x(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\, ds & \textit{при } (x,r) \in D : r > 0, \\ 0 & \textit{при } (x,r) \in D : r = 0, \\ -\tilde{v}_1(x,-r) & \textit{при } (x,r) \in D : r < 0, \end{cases} \tag{2.24}$$

$$u_2(x,r) := \begin{cases} \tilde{u}_2(x,r) \equiv \varphi(x,0) - \\ \qquad - r \displaystyle\int_{-r}^0 \frac{\varphi'_s(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\, ds & \textit{при } (x,r) \in D : r > 0, \\ \varphi(x,0) & \textit{при } (x,r) \in D : r = 0, \\ \tilde{u}_2(x,-r) & \textit{при } (x,r) \in D : r < 0, \end{cases} \tag{2.25}$$

$$v_2(x,r) := \begin{cases} \tilde{v}_2(x,r) \equiv -\displaystyle\int_{-r}^0 \frac{s\ \varphi'_x(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\, ds & \textit{при } (x,r) \in D : r > 0, \\ 0 & \textit{при } (x,r) \in D : r = 0, \\ -\tilde{v}_2(x,-r) & \textit{при } (x,r) \in D : r < 0, \end{cases} \tag{2.26}$$

являются голоморфными в области D_z.

Доказательство. Докажем, что при $(x,r) \in D : r > 0$ выполняются условия Коши – Римана:

$$\frac{\partial u_1(x,r)}{\partial x} = \frac{\partial v_1(x,r)}{\partial r}, \qquad \frac{\partial u_1(x,r)}{\partial r} = -\frac{\partial v_1(x,r)}{\partial x}. \tag{2.27}$$

Проинтегрировав по частям интегралы в определении функций $\tilde{u}_1(x,r)$ и $\tilde{v}_1(x,r)$, получим

$$\int_0^r \frac{\varphi'_s(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\, ds = \frac{\pi}{2}\ \varphi'_r(x,r) - \int_0^r \varphi''_{ss}(x,s)\ \arcsin\frac{s}{r}\, ds\,,$$

$$\tilde{v}_1(x,r) = r\ \varphi'_x(x,0) + \int_0^r \varphi''_{xs}(x,s)\ \sqrt{r^2-s^2}\, ds\,.$$

При $r = s$ уравнение (2.2) запишем в следующем виде:

$$\varphi'_s(x,s) + s\ \varphi''_{ss}(x,s) = -s\ \varphi''_{xx}(x,s)\,. \tag{2.28}$$

Тогда, учитывая равенство (2.28), получаем

$$\frac{\partial \tilde{u}_1(x,r)}{\partial r} = \int\limits_0^r \frac{\varphi'_s(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\ ds +$$

$$+ r\left(\frac{\pi}{2}\ \varphi''_{rr}(x,r) - \frac{\pi}{2}\ \varphi''_{rr}(x,r) - \int\limits_0^r \frac{\varphi''_{ss}(x,s)}{\sqrt{1-s^2/r^2}}\ \left(-\frac{s}{r^2}\right)\ ds\right) =$$

$$= \int\limits_0^r \frac{\varphi'_s(x,s) + s\ \varphi''_{ss}(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\ ds = -\int\limits_0^r \frac{s\ \varphi''_{xx}(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\ ds\,.$$

Далее, имеем равенства

$$\frac{\partial \tilde{u}_1(x,r)}{\partial x} = \varphi'_x(x,0) + r\ \int\limits_0^r \frac{\varphi''_{sx}(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\ ds\,,$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_1(x,r)}{\partial x} = \int\limits_0^r \frac{s\ \varphi''_{xx}(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\ ds\,,$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_1(x,r)}{\partial r} = \varphi'_x(x,0) + r\ \int\limits_0^r \frac{\varphi''_{sx}(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\ ds\,.$$

Таким образом, условия (2.27) выполняются при $(x,r) \in D : r > 0$. В силу принципа симметрии [31, с. 148] функция F_1 голоморфна в области D_z. Аналогично доказывается голоморфность функции F_2 в области D_z. Лемма доказана.

Для $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ через $s[z_1,z_2]$ обозначим отрезок с началом в точке z_1 и концом в точке z_2. Обозначим также $c_\varepsilon(z) := \{t \in \mathbb{C} : |t - z| = \varepsilon\}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.8. *Пусть функция $\varphi(x,r)$ имеет в области D непрерывные частные производные второго порядка и является решением уравнения* (2.2) *в D. Тогда существует единственная голоморфная в области D_z функция $F : D_z \longrightarrow \mathbb{C}$ такая, что справедливо равенство* (2.17) *для всех $(x,r) \in D$; при этом $F(x+ir) = u_1(x,r) + iv_1(x,r)$, где функции $u_1(x,r)$, $v_1(x,r)$ определяются соотношениями* (2.23), (2.24).

Доказательство. Пусть $(x,r) \in D : r \neq 0$, $z = x + ir$ и кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме 2.3. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt = \varphi(x,r) \tag{2.29}$$

с искомой функцией $F(t)$. Покажем, что оно имеет единственное решение в классе функций, голоморфных в области D_z.

Докажем сначала, что существует единственная голоморфная в области D_z функция $F_1(t)$ такая, что равенство (2.29) выполняется при $F(t) = F_1(t)$ и всех $(x,r) \in D^+ := \{(x,r) \in D : r > 0\}$.

Пусть $(x,r) \in D^+$ и $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\min\{r, \min\limits_{t\in\gamma}|t-z|\}$. Рассмотрим области $E_\varepsilon^\pm := \{t \in D_z' : |t-z| > \varepsilon, |t-\bar{z}| > \varepsilon, \pm(\mathrm{Re}\, t - x) > 0\}$, где D_z' — область комплексной плоскости, ограниченная кривой γ. Положительным направлением обхода границы $\partial E_\varepsilon^\pm$ будем считать такое направление, при котором область $E_\varepsilon^\pm$ остается слева. Обозначим

$$\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^{\pm} := \lim_{\tau\to t, \tau\in E_\varepsilon^\pm} \sqrt{(\tau-z)(\tau-\bar{z})} \qquad \forall\, t \in \partial E_\varepsilon^\pm.$$

Тогда интеграл из уравнения (2.29) при $F(t) = F_1(t)$ представляется суммой четырех интегралов:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{F_1(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial E_\varepsilon^-} \frac{F_1(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^-}\, dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial E_\varepsilon^+} \frac{F_1(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^+}\, dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial E_\varepsilon^- \setminus\gamma} \frac{F_1(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^-}\, dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial E_\varepsilon^+ \setminus\gamma} \frac{F_1(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^+}\, dt =: I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Для голоморфной в области D_z функции $F_1(t)$ по теореме Коши $I_1 = I_2 = 0$. Обозначим $\Gamma^- := \partial E_\varepsilon^- \setminus (\gamma \cup c_\varepsilon(z) \cup c_\varepsilon(\bar{z}) \cup s[\bar{z} + i\varepsilon, z - i\varepsilon])$, $\Gamma^+ := \partial E_\varepsilon^+ \setminus (\gamma \cup c_\varepsilon(z) \cup c_\varepsilon(\bar{z}) \cup s[z - i\varepsilon, \bar{z} + i\varepsilon])$. Тогда для суммы отличных от нуля интегралов имеем следующее представление:

$$I_3 + I_4 = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\Gamma^-} + \int\limits_{\Gamma^+}\right) \frac{F_1(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{c_\varepsilon(z)}+\int\limits_{c_\varepsilon(\bar z)}\right)\frac{F_1(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s[\bar z+i\varepsilon,z-i\varepsilon]}\frac{F_1(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)})^-}\,dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s[z-i\varepsilon,\bar z+i\varepsilon]}\frac{F_1(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)})^+}\,dt=:I_5+I_6+I_7+I_8.$$

Поскольку множества Γ^- и Γ^+ совпадают, а их ориентация противоположна, то $I_5=0$.

Оценим модуль интеграла I_6:

$$|I_6|\le\frac{1}{2\pi}\max_{t\in\overline{D'_z}}|F_1(t)|\left(\int\limits_{c_\varepsilon(z)}+\int\limits_{c_\varepsilon(\bar z)}\right)\frac{|dt|}{\sqrt{\varepsilon\;3r/2}}\le c\sqrt{\varepsilon}, \qquad (2.30)$$

где постоянная c не зависит от ε.

Учитывая, что $\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\right)^{\pm}:=\pm\sqrt{r^2-(\operatorname{Im}t)^2}$ для всех $t\in s[z-i\varepsilon,\bar z+i\varepsilon]=s[\bar z+i\varepsilon,z-i\varepsilon]$, получаем

$$I_7+I_8=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-r+\varepsilon}^{r-i\varepsilon}\frac{F_1(x+i\eta)}{\sqrt{r^2-\eta^2}}\,d\eta\,.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{F_1(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt=I_6+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-r+\varepsilon}^{r-i\varepsilon}\frac{F_1(x+i\eta)}{\sqrt{r^2-\eta^2}}\,d\eta\,. \qquad (2.31)$$

Устремляя ε к нулю в равенстве (2.31) и учитывая оценку (2.30), получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{F_1(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-r}^{r}\frac{F_1(x+i\eta)}{\sqrt{r^2-\eta^2}}\,d\eta\,.$$

Итак, уравнение (2.29) при $(x,r)\in D^+$ приведено к уравнению

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-r}^{r}\frac{F_1(x+i\eta)}{\sqrt{r^2-\eta^2}}\,d\eta=\varphi(x,r)\,. \qquad (2.32)$$

Введем в рассмотрение функцию $\tilde{u}_1(x,\eta) := \frac{1}{2}\,(F_1(x+i\eta)+F_1(x-i\eta))$. Для ее нахождения из (2.32) получаем уравнение Абеля

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^r \frac{\tilde{u}_1(x,\eta)}{\sqrt{r^2-\eta^2}}\,d\eta = \varphi(x,r)\,, \tag{2.33}$$

разрешимое [20, с. 32] в явном виде. Значит, имеем

$$\tilde{u}_1(x,r) = \frac{\partial}{\partial r}\int\limits_0^r \frac{s\;\varphi(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\,ds = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\varphi(x,s)\sqrt{r^2-s^2}\,\Bigg|_{s=0}^{s=r} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^r \varphi'_s(x,s)\sqrt{r^2-s^2}\,ds\right) = \varphi(x,0) + r\int\limits_0^r \frac{\varphi'_s(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\,ds\,.$$

Определим функцию $u_1(x,r)$ соотношениями (2.23). Из леммы 2.1 следует, что $u_1(x,r)$ — гармоническая в области D функция и

$$\frac{\partial u_1(x,r)}{\partial r}\bigg|_{r=0} = 0 \qquad \forall\,(x,0)\in D.$$

Поэтому существует единственная гармоническая в области D функция $v_1(x,r)$ такая, что $v_1(x,0)=0$ для всех $(x,0)\in D$ и функция $u_1(x,r)+$ $+iv_1(x,r)$ голоморфна в области D_z. Согласно лемме 2.1 функция $v_1(x,r)$ определяется соотношениями (2.24). Следовательно, равенство (2.29) выполняется при $F(x+ir) = F_1(x+ir) := u_1(x,r)+iv_1(x,r)$ и всех $(x,r)\in D^+$, причем функция $F_1(t)$ определяется единственным образом.

Аналогично доказывается, что при $(x,r)\in D : r<0$ равенство (2.29) выполняется тогда и только тогда, когда $F(x+ir) = F_2(x+ir) :=$ $:= u_2(x,r)+iv_2(x,r)$, где функции $u_2(x,r)$, $v_2(x,r)$ определяются соотношениями (2.25), (2.26).

Согласно теореме единственности аналитических функций [31, с. 68] $F_1(z)\equiv F_2(z)$. Таким образом, существует единственная голоморфная в области D_z функция $F(z)\equiv F_1(z)$ такая, что выполняется равенство (2.17). Теорема доказана.

Пусть в равенстве (2.14) $A\Phi = F$, где функция F определена в теореме 2.8. Тогда из теоремы 2.8 следует, что каждое решение уравнения (2.2) в области D, удовлетворяющее условиям этой теоремы, является компонентой U_1 главного продолжения (2.14) голоморфной функции $F : D_z \longrightarrow \mathbb{C}$ в область D_ζ.

Кроме того, из теорем 2.5, 2.8 и соотношений (2.15) следует, что на каждом компактном подмножестве области D осесимметричний потенциал $\varphi(x,r)$, удовлетворяющий условиям теоремы 2.8, равномерно приближается линейными комбинациями полиномов

$$L_n(x,r) := (x^2+r^2)^{n/2}\ P_n\left(x\ (x^2+r^2)^{-1/2}\right),$$

где функция P_n определена равенством (1.64).

13.2. Интегральное представление функции тока Стокса. При доказательстве представления функции тока Стокса $\psi(x,r)$ в области D формулой (2.18) используется следующая лемма.

Лемма 2.2. *Пусть функция $\psi(x,r)$ имеет в области D непрерывные частные производные второго порядка, удовлетворяет условию*

$$\left|\int\limits_0^r \frac{\psi''_{xx}(x,s)}{s}\ ds\right| < \infty \qquad \forall\,(x,r) \in \{(x,r)\in D : y \neq 0\} \tag{2.34}$$

и является решением уравнения (2.3) *в* D. *Тогда функции* $F_3(x+ir) = u_3(x,r) + iv_3(x,r)$ *и* $F_4(x+ir) = u_4(x,r)+iv_4(x,r)$, *где*

$$v_3(x,r) := \begin{cases} \tilde v_3(x,r) \equiv \int\limits_0^r \dfrac{\psi'_s(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\ ds & \text{при } (x,r)\in D : r>0, \\ 0 & \text{при } (x,r)\in D : r=0, \\ -\tilde v_3(x,-r) & \text{при } (x,r)\in D : r<0, \end{cases} \tag{2.35}$$

$$u_3(x,r) := \begin{cases} \tilde u_3(x,r) \equiv \pm\int\limits_{x_0}^{x} \Delta\psi(x,0)\ dx - r\int\limits_0^r \dfrac{\psi'_x(x,s)}{s\sqrt{r^2-s^2}}\ ds \\ \qquad\qquad \text{при } (x,r)\in D : r>0,\ \pm(x-x_0)\geq 0, \\ \pm\int\limits_{x_0}^{x} \Delta\psi(x,0)\ dx \\ \qquad\qquad \text{при } (x,r)\in D : r=0,\ \pm(x-x_0)\geq 0, \\ \tilde u_3(x,-r) \qquad \text{при } (x,r)\in D : r<0, \end{cases} \tag{2.36}$$

$$v_4(x,r) := \begin{cases} \tilde v_4(x,r) \equiv -\int\limits_{-r}^{0} \dfrac{\psi'_s(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\ ds & \text{при } (x,r)\in D : r>0, \\ 0 & \text{при } (x,r)\in D : r=0, \\ -\tilde v_4(x,-r) & \text{при } (x,r)\in D : r<0, \end{cases}$$

$$u_4(x,r) := \begin{cases} \tilde{u}_4(x,r) \equiv \pm \int\limits_{x_0}^{x} \Delta\psi(x,0)\, dx - r \int\limits_{-r}^{0} \dfrac{\psi'_x(x,s)}{s\sqrt{r^2-s^2}}\, ds \\ \qquad\qquad\qquad \textit{при } (x,r) \in D : r > 0,\ \pm(x-x_0) \geq 0, \\ \pm \int\limits_{x_0}^{x} \Delta\psi(x,0)\, dx \quad \textit{при } (x,r) \in D : r = 0,\ \pm(x-x_0) \geq 0, \\ \tilde{u}_4(x,-r) \qquad \textit{при } (x,r) \in D : r < 0, \end{cases}$$

$x_0 \in \mathbb{R} : (x_0, 0) \in D$, *являются голоморфными в области* D_z.

Доказательство. Пусть $(x,r) \in D \ : \ r > 0$. Так же, как и в доказательстве леммы 2.1, получаем равенства

$$\tilde{v}_3(x,r) = \frac{\pi}{2}\, \psi'_r(x,r) - \int\limits_0^r \psi''_{ss}(x,s)\ \arcsin\frac{s}{r}\, ds\,,$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_3(x,r)}{\partial x} = \int\limits_0^r \frac{\psi''_{xs}(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\, ds\,,$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_3(x,r)}{\partial r} = \frac{1}{r} \int\limits_0^r \frac{s\ \psi''_{ss}(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\, ds\,,$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_3(x,r)}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \int\limits_0^r \psi''_{xs}(x,s)\ \ln \frac{r+\sqrt{r^2-s^2}}{s}\, ds = -\int\limits_0^r \frac{\psi''_{xs}(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\, ds\,.$$

Учитывая условие (2.34) и следствие из равенства (2.3) при $r = s \neq 0$:

$$\psi''_{xx}(x,s) = \frac{1}{s}\ \psi'_s(x,s) - \psi''_{ss}(x,s)\,,$$

получаем

$$\frac{\partial \tilde{u}_3(x,r)}{\partial x} = \Delta\psi(x,0) - r \int\limits_0^r \frac{\psi''_{xx}(x,s)}{s\ \sqrt{r^2-s^2}}\, ds =$$

$$= \Delta\psi(x,0) + r \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\psi''_{ss}(x,s)}{s\ \sqrt{r^2-s^2}}\, ds - \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\psi'_s(x,s)}{s^2\ \sqrt{r^2-s^2}}\, ds \right) =$$

$$= \Delta\psi(x,0) + \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(r \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\psi''_{ss}(x,s)}{s\,\sqrt{r^2-s^2}}\, ds + \frac{\psi'_s(x,s)\,\sqrt{r^2-s^2}}{r\,s}\,\Bigg|_{s=\varepsilon}^{s=r} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{r}\int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\psi''_{ss}(x,s)}{s}\,\sqrt{r^2-s^2}\, ds \right) = \Delta\psi(x,0) + \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\frac{1}{r}\int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{s\,\psi''_{ss}(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\, ds - \right.$$

$$\left. -\frac{\sqrt{r^2-s^2}}{r}\,\Delta\psi(x,\varepsilon)\right) = \frac{1}{r}\int\limits_{0}^{r} \frac{s\,\psi''_{ss}(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\, ds\,.$$

Таким образом, при $(x,r)\in D : r>0$ выполняются условия Коши – Римана:

$$\frac{\partial u_3(x,r)}{\partial x} = \frac{\partial v_3(x,r)}{\partial r}\,, \qquad \frac{\partial u_3(x,r)}{\partial r} = -\frac{\partial v_3(x,r)}{\partial x}\,.$$

В силу принципа симметрии [31, с. 148] функция F_3 голоморфна в области D_z. Аналогично доказывается голоморфность функции F_4 в области D_z. Лемма доказана.

Теорема 2.9. *Пусть функция $\psi(x,r)$ имеет в области D непрерывные частные производные второго порядка и является решением уравнения* (2.3) *в D, при этом выполняется условие*

$$\psi(x,0)=0 \qquad \forall\,(x,0)\in D\,, \tag{2.37}$$

и условие (2.34). *Тогда существует голоморфная в области D_z функция $F_0 : D_z \longrightarrow \mathbb{C}$ такая, что равенство* (2.18) *выполняется для всех $(x,r)\in D$ тогда и только тогда, когда $F(t)=F_0(t)+c$, где c — произвольная постоянная, $F_0(x+ir)=u_3(x,r)+iv_3(x,r)$, функции $u_3(x,r)$, $v_3(x,r)$ определяются соотношениями* (2.35), (2.36).

Доказательство. Пусть $(x,r)\in D : r>0$, $z=x+ir$ и кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме 2.3. Рассмотрим интегральное уравнение

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{F(t)\,(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\, dt = \psi(x,r) \tag{2.38}$$

с искомой функцией $F(t)$, голоморфной в области D_z. Так же, как и в доказательстве теоремы 2.8, уравнение (2.38) приводится к уравнению

Абеля

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^r \frac{\eta\ \tilde{v}_3(x,\eta)}{\sqrt{r^2-\eta^2}}\,d\eta = \psi(x,r)\,, \tag{2.39}$$

где $\tilde{v}_3(x,\eta) := \frac{i}{2}\ (F(x-i\eta) - F(x+i\eta))$. Решением уравнения (2.39) является функция [20, с. 32]

$$\tilde{v}_3(x,r) = \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\int\limits_0^r \frac{s\ \psi(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\,ds = \int\limits_0^r \frac{\psi_s'(x,s)}{\sqrt{r^2-s^2}}\,ds\,.$$

Определим голоморфную в области D_z функцию F_3 так же, как и в лемме 2.2. Тогда согласно доказанному равенство (2.38) выполняется при $F(t) = F_3(t)$ и $(x,r) \in D : r > 0$.

Аналогично доказывается, что при $(x,r) \in D : r < 0$ равенство (2.38) выполняется, если $F(t) = F_4(t)$, где функция F_4 определена в лемме 2.2. По теореме единственности аналитических функций [31, с. 68] $F_3(z) \equiv F_4(z) =: F_0(z)$.

Теперь для завершения доказательства остается заметить, что произвольная голоморфная в D_z функция F, удовлетворяющая уравнению (2.38) при всех $(x,r) \in D : r \neq 0$, выражается в виде $F(t) = F_0(t) + c$, где c — произвольная постоянная.

Пусть в равенстве (2.14) $A\Phi = F$, где функция F определена в теореме 2.9. Тогда из теоремы 2.9 следует, что каждое решение уравнения (2.3) в области D, удовлетворяющее условиям этой теоремы, связано соотношением (2.16) с компонентой U_2 главного продолжения (2.14) голоморфной функции $F : D_z \longrightarrow \mathbb{C}$ в область D_ζ.

Кроме того, из теорем 2.5, 2.9 и соотношений (2.16) следует, что на каждом компактном подмножестве области D функция тока Стокса $\psi(x,r)$, удовлетворяющая условиям теоремы 2.9, равномерно приближается линейными комбинациями полиномов

$$L_n^1(x,r) := (n+1)^{-1}\ |r|\ (x^2+r^2)^{n/2}\ P_n^1\left(x\ (x^2+r^2)^{-1/2}\right)\,,$$

где функция P_n^1 определена равенством (1.65).

Отметим наконец, что условие (2.37) соответствует физическому смыслу функции тока Стокса: в модели течения идеальной жидкости это условие выражает тот факт, что ось Ox является линией тока.

§ 14. Моногенные функции векторного аргумента, ассоциированные с осесимметричными потенциалами вне правильных областей

14.1. Моногенные и аналитические функции в плоскости $\widetilde{\mu}$. Введем в рассмотрение элемент e_0, не принадлежащий алгебре $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, для которого постулируем выполнение следующих правил умножения:

$$e_0 e_1 = e_0, \quad e_0 e_2 = -e_1, \quad e_0 e_{2k+1} = e_0 - 2\sum_{m=1}^{k} e_{2m},$$
$$e_0 e_{2k+2} = -e_1 - 2\sum_{m=1}^{k} e_{2m+1}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Постулируем также, что при этом остаются справедливыми аксиомы ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности.

Поместим алгебру $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ в банахово пространство

$$\widetilde{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}} := \{d = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e_k : \ d_k \in \mathbb{C}, \ \sum_{k=0}^{\infty} |d_k| < \infty\}$$

с нормой $\|d\|_{\widetilde{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}} := \sum\limits_{k=0}^{\infty} |d_k|$. Заметим, что $\widetilde{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ не является алгеброй, поскольку произведение $e_0 e_0$ не определено. Значит, осуществлено расширение лишь линейного пространства алгебры, но не самой алгебры $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$.

Теперь выделим в $\widetilde{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ декартову плоскость $\widetilde{\mu} := \{\widetilde{\zeta} = xe_1 + re_0 : x, r \in \mathbb{R}\}$ и условимся использовать согласованные обозначения для соответствующих областей плоскости $\widetilde{\mu}$ и декартовой плоскости xOr, а именно: области E декартовой плоскости xOr будем ставить в соответствие конгруэнтную ей область $E_{\widetilde{\zeta}} := \{\widetilde{\zeta} = xe_1 + re_0 : (x, r) \in E\}$ в $\widetilde{\mu}$.

Функцию $\Phi : E_{\widetilde{\zeta}} \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ будем называть *моногенной* в области $E_{\widetilde{\zeta}}$, если Φ дифференцируема по Гато в каждой точке области $E_{\widetilde{\zeta}}$, то есть если для каждой точки $\widetilde{\zeta} \in E_{\widetilde{\zeta}}$ существует элемент $\Phi'(\widetilde{\zeta})$ алгебры $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ такой, что равенство (1.5) выполняется при $\zeta = \widetilde{\zeta}$ для всех $h \in \widetilde{\mu}$.

Критерий моногенности функции $\Phi : E_{\widetilde{\zeta}} \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ устанавливается в следующей теореме, доказательство которой проводится аналогично доказательству теоремы 1.13.

Теорема 2.10. *Для того чтобы функция* $\Phi : E_{\widetilde{\zeta}} \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ *вида*

$$\Phi(xe_1 + re_0) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x,r)\ e_k,$$

где $V_k : E \longrightarrow \mathbb{C}$, *была моногенной в области* $E_{\widetilde{\zeta}} \subset \widetilde{\mu}$, *необходимо и достаточно, чтобы функции* V_k, $k = 1, 2, \ldots$, *были дифференцируемыми в области* E *и при этом в* E *выполнялись следующие условия Коши – Римана:*

$$\frac{\partial V_1(x,r)}{\partial x} = \frac{1}{2}\ \frac{\partial V_2(x,r)}{\partial r}\,,$$

$$\frac{\partial V_2(x,r)}{\partial x} = \frac{1}{2}\ \frac{\partial V_3(x,r)}{\partial r} - \frac{\partial V_1(x,r)}{\partial r}\,,$$

$$\frac{\partial V_k(x,r)}{\partial x} = \frac{1}{2}\ \frac{\partial V_{k+1}(x,r)}{\partial r} - \frac{1}{2}\ \frac{\partial V_{k-1}(x,r)}{\partial r}, \qquad k = 3, 4, \ldots\,,$$

а также соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial V_k(x,r)}{\partial x} \right| < \infty\,,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0}\ \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg|\ V_k(x + \varepsilon h_1, r + \varepsilon h_2,) - V_k(x,r) - \frac{\partial V_k(x,r)}{\partial x}\ \varepsilon h_1 - $$

$$- \frac{\partial U_k(x,r)}{\partial r}\ \varepsilon h_2 \ \Bigg|\ \varepsilon^{-1} = 0 \qquad \forall\, h_1, h_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Пусть $t \in \mathbb{C}$, $\widetilde{\zeta} = xe_1 + re_0$, где $x, r \in \mathbb{R}$. Аналогично разложению (2.9) получаем разложение элемента $(te_1 - \widetilde{\zeta})^{-1}$ по базису $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$(te_1 - \widetilde{\zeta})^{-1} = \frac{1}{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} \Bigg(\frac{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - r}{t - x}\ e_1 + $$

$$+ 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k\ r}{(t-x)} \left(\frac{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - r}{t-x} \right)^{k-1} e_k \Bigg), \tag{2.40}$$

$$t \notin \{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} t = x,\ |\operatorname{Im} t| \geq |r|\},\ z = x + ir,\ \pm r > 0,$$

где $\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$ понимается как непрерывная ветвь функции $H(t) = \sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$, аналитической вне разреза $\{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} t = x,$ $|\operatorname{Im} t| \geq |r|\}$, такая, что $H(t) > 0$ для всех $t > \operatorname{Re} z$.

Из соотношения (2.40), в частности, следует разложение функции $\widetilde{\zeta}^{-1}$ по элементам базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\widetilde{\zeta}^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+r^2}-r}{x}\, e_1 - \right. \\ \qquad \left. -\dfrac{2r}{x}\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\dfrac{\sqrt{x^2+r^2}-r}{x}\Big)^{k-1} e_k\right) & \text{при } r>0\,, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+r^2}+r}{x}\, e_1 - \right. \\ \qquad \left. -\dfrac{2r}{x}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\left(\dfrac{\sqrt{x^2+r^2}+r}{x}\right)^{k-1} e_k\right) & \text{при } r<0\,. \end{cases} \tag{2.41}$$

Расширим функционал $f_{\mathcal{I}_0}$ до линейного непрерывного функционала на пространстве $\widetilde{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$, полагая $f_{\mathcal{I}_0}(e_0) = i$. Введем линейный оператор B, который каждой функции $\Phi : E_{\widetilde{\zeta}} \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ ставит в соответствие функцию $F : E_z \longrightarrow \mathbb{C}$ по формуле $F(z) := f_{\mathcal{I}_0}(\Phi(\widetilde{\zeta}))$, где $z = x + ir$ и $\widetilde{\zeta} = xe_1 + re_0$ — соответствующие точки областей E_z и $E_{\widetilde{\zeta}}$. При этом очевидно, что если функция Φ моногенна в области $E_{\widetilde{\zeta}}$, то функция $F = B\Phi$ голоморфна в области E_z.

Рассмотрим теперь правильную в направлении оси Or область D декартовой плоскости xOr. Конгруэнтную ей область D_z комплексной плоскости будем называть *правильной* в направлении мнимой оси.

Установим основные алгебраико-аналитические свойства моногенных на множестве $\widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$ функций в случае, когда область D является ограниченной.

Легко доказать аналогично теореме 2.4 следующее утверждение.

Теорема 2.11. *Если область $D_{\widetilde{\zeta}}$ является ограниченной, то каждая моногенная в области $\widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$ функция $\Phi : \widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}} \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{z\to\infty,\ z\in\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}} (B\Phi)(z) = 0\,, \tag{2.42}$$

представляется в виде

$$\Phi(\widetilde{\zeta}) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(te_1 - \widetilde{\zeta})^{-1}\,(B\Phi)(t)\,dt + \Phi_0(\widetilde{\zeta}) \qquad \forall\,\widetilde{\zeta} \in \widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}}\,,$$

где γ — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая в $\mathbb{C}$, которая ограничивает правильную в направлении мнимой оси область D''_z такую, что $\overline{D_z} \subset D''_z$ и $z = f_{\mathcal{I}_0}(\widetilde{\zeta}) \in \mathbb{C} \setminus \overline{D''_z}$, а $\Phi_0 : \widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}} \longrightarrow \mathcal{I}_0$ — некоторая моногенная в области $\widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$ функция, принимающая значения в идеале $\mathcal{I}_0$. При этом

$$\int\limits_{\gamma} (te_1 - \widetilde{\zeta})^{-1} \, (B\Phi)(t) \, dt = e_1 \int\limits_{\gamma} \frac{(B\Phi)(t)}{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} \, \frac{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - r}{t-x} \, dt +$$

$$+ 2\, r \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \, e_k \int\limits_{\gamma} \frac{(B\Phi)(t)}{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} \, (t-x)} \times$$

$$\times \left(\frac{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - r}{t-x} \right)^{k-1} dt \,, \qquad \widetilde{\zeta} = xe_1 + re_0 \in \widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}} \,, \tag{2.43}$$

$$z = x + ir, \quad \pm\, r > 0.$$

Введем понятие $\mathbb{C}$-аналитических функций переменной $\widetilde{\zeta} \in \widetilde{\mu}$. Функцию $\Psi : \widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}} \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ назовем $\mathbb{C}$-*аналитической* в области $\widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$, если существует голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \overline{D_z}$ функция $F : \mathbb{C} \setminus \overline{D_z} \longrightarrow \mathbb{C}$ такая, что

$$\lim_{z \to \infty, \; z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_z}} F(z) = 0 \tag{2.44}$$

и

$$\Psi(\widetilde{\zeta}) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (te_1 - \widetilde{\zeta})^{-1} \, F(t) \, dt \qquad \forall\, \widetilde{\zeta} \in \widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}} \,, \tag{2.45}$$

где кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме 2.11.

Легко заметить, что $\mathbb{C}$-аналитическая функция (2.45) является продолжением функции F в область $\widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$ в таком смысле: если $x_0 \in \mathbb{R}$ и точка $\widetilde{\zeta}$ области $\widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$ стремится к точке $x_0 e_1 \in \widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$, то функция (2.45) покоординатно сходится к $F(x_0)e_1$.

Докажем теорему единственности для $\mathbb{C}$-аналитических функций переменной $\widetilde{\zeta} \in \widetilde{\mu}$.

Теорема 2.12. *Если две $\mathbb{C}$-аналитические в области $\widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$ функции $\Psi_1 : \widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}} \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, $\Psi_2 : \widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}} \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ совпадают на множестве, имеющем предельную точку в $\widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$, то $\Psi_1(\widetilde{\zeta}) \equiv \Psi_2(\widetilde{\zeta})$.*

Доказательство. Пусть

$$\Psi_1(\widetilde{\zeta}) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(te_1-\widetilde{\zeta})^{-1}\,F_1(t)\,dt\,,$$

$$\Psi_2(\widetilde{\zeta}) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(te_1-\widetilde{\zeta})^{-1}\,F_2(t)\,dt \qquad \forall\,\widetilde{\zeta}\in\widetilde{\mu}\setminus\overline{D_{\widetilde{\zeta}}}\,,$$

где F_1, F_2 — голоморфные в области $\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}$ функции, удовлетворяющие условию вида (2.44), а кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме 2.11. Тогда $B\Psi_1 = F_1$, $B\Psi_2 = F_2$ и при этом функции F_1, F_2 совпадают на множестве, которое имеет предельную точку в $\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}$. Согласно теореме единственности аналитических функций комплексной переменной [31, с. 68] $F_1(z) = F_2(z)$ всюду в $\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}$. Поэтому $\Psi_1(\widetilde{\zeta}) = \Psi_2(\widetilde{\zeta})$ всюду в $\widetilde{\mu}\setminus\overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$. Теорема доказана.

В следующей теореме, которая доказывается теперь аналогично теореме 2.3, определяется вид интегральной формулы Коши для $\mathbb{C}$-аналитических функций переменной $\widetilde{\zeta}\in\widetilde{\mu}$.

Теорема 2.13. *Если функция $\Psi : \widetilde{\mu}\setminus\overline{D_{\widetilde{\zeta}}} \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ является $\mathbb{C}$-аналитической в области $\widetilde{\mu}\setminus\overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$, то*

$$\Psi(\widetilde{\zeta}) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(te_1-\widetilde{\zeta})^{-1}\,(B\Psi)(t)\,dt \qquad \forall\,\widetilde{\zeta}\in\widetilde{\mu}\setminus\overline{D_{\widetilde{\zeta}}}\,,$$

где кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме 2.11.

Повторяя рассуждения, приведенные в [9, с. 50], устанавливаем, что для функций $\Phi_1 : \widetilde{\mu}\setminus\overline{D_{\widetilde{\zeta}}} \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ и $\Phi_2 : \widetilde{\mu}\setminus\overline{D_{\widetilde{\zeta}}} \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, моногенных в области $\widetilde{\mu}\setminus\overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$, справедливо равенство

$$\int\limits_{\gamma}(te_1-\widetilde{\zeta})^{-1}\,(B\Phi_1)(t)\,dt\ \int\limits_{\gamma}(te_1-\widetilde{\zeta})^{-1}\,(B\Phi_2)(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{\gamma}(te_1-\widetilde{\zeta})^{-1}\,(B(\Phi_1\Phi_2))(t)\,dt \qquad \forall\,\widetilde{\zeta}\in\widetilde{\mu}\setminus\overline{D_{\widetilde{\zeta}}}\,,$$

где кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме 2.11.

Таким образом, $\mathbb{C}$-аналитические в области $\widetilde{\mu}\setminus\overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$ функции образуют алгебру и потому из теоремы 2.11 следует, что алгебра моногенных в $\widetilde{\mu}\setminus\overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$ функций разлагается в прямую сумму алгебры $\mathbb{C}$-аналитических в $\widetilde{\mu}\setminus\overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$ функций и алгебры моногенных в $\widetilde{\mu}\setminus\overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$ функций, принимающих значения в идеале $\mathcal{I}_0$.

Повторяя схему доказательства теоремы Рунге [88, с. 124], получаем следующее утверждение.

Теорема 2.14. *Пусть функция* $\Psi : \widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}} \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ *является* $\mathbb{C}$*-аналитической в области* $\widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$ *и* $K_{\widetilde{\zeta}}$ *— произвольное компактное подмножество области* $\widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$*. Тогда для любой точки* $x_0 e_1 \in D_{\widetilde{\zeta}}$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется полином* $P(c)$, $c \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, *с комплексными коэффициентами такой, что*

$$\sup_{\widetilde{\zeta} \in K_{\widetilde{\zeta}}} \left\| \Psi(\widetilde{\zeta}) - P\big((\widetilde{\zeta} - x_0 e_1)^{-1}\big) \right\|_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} < \varepsilon \,.$$

14.2. Связь с осесимметричными потенциальными полями. Установим связь моногенных функций переменной $\widetilde{\zeta} \in \widetilde{\mu}$ с решениями системы (2.1) и уравнений (2.2), (2.3) во внешности замыкания правильной в направлении оси Or ограниченной области D.

Условимся, что если кривая γ является границей области D_z'' с такими же свойствами, как в теореме 2.11, то положительным направлением обхода этой кривой будем считать такое направление, при котором область D_z'' остается слева.

Теорема 2.15. *Пусть область* $D_{\widetilde{\zeta}}$ *является ограниченной, а функция* $\Phi : \widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}} \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ *моногенна в области* $\widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$ *и удовлетворяет условию* (2.42)*. Тогда компоненты интеграла*

$$-\frac{e_0}{2\pi i} \int_{\gamma} (te_1 - \widetilde{\zeta})^{-1} (B\Phi)(t)\, dt = e_1\, \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(B\Phi)(t)}{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt -$$

$$-\frac{1}{\pi i} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k\, e_k \int_{\gamma} \frac{(B\Phi)(t)}{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} \left(\frac{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - r}{t - x} \right)^{k-1} dt =:$$

$$=: \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x,r)\, e_k, \qquad \widetilde{\zeta} = xe_1 + re_0, \quad z = x + ir, \quad \pm\, r > 0, \quad (2.46)$$

где кривая γ *имеет такие же свойства, как и в теореме* 2.11, *порождают пару решений системы* (2.1) *в* $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ *по формулам*

$$\varphi(x,r) = \begin{cases} \pm\, V_1(x,r) & \text{при } \pm\, r > 0\,, \\ \lim\limits_{\eta \to 0+0} V_1(x,\eta) & \text{при } r = 0\,, \end{cases} \qquad (2.47)$$

$$\psi(x,r)=\begin{cases} \pm\, r \sum\limits_{k=1}^{\infty} V_{2k}(x,r) & \text{\it при } \pm\, r>0\,, \\ \lim\limits_{\eta\to 0+0}\Big(\eta \sum\limits_{k=1}^{\infty} V_{2k}(x,\eta)\Big) & \text{\it при } \ r=0\,. \end{cases} \tag{2.48}$$

Кроме того, функции (2.47), (2.48) *являются соответственно решениями уравнений* (2.2), (2.3) *в области* $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$.

Доказательство. Равенство (2.46) является простым следствием равенства (2.43) и правил умножения для элемента e_0. Теперь при $(x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$ равенства (2.47), (2.48) соответственно приводятся к виду

$$\varphi(x,r)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma}\dfrac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt & \text{при } r\neq 0, \\ F(x) & \text{при } r=0,\ x>\sup\limits_{(x,0)\in D} x, \\ -F(x) & \text{при } r=0,\ x<\inf\limits_{(x,0)\in D} x, \end{cases} \tag{2.49}$$

$$\psi(x,r)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma}\dfrac{F(t)\ (t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt & \text{при } r\neq 0, \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma}F(t)\ dt & \text{при } r=0,\ x>\sup\limits_{(x,0)\in D} x, \\ -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma}F(t)\ dt & \text{при } r=0,\ x<\inf\limits_{(x,0)\in D} x, \end{cases} \tag{2.50}$$

где $F=B\Phi$ и $z=x+ir$. Далее теорема доказывается аналогично теореме 2.6.

Заметим, что если голоморфная в $\mathbb{C}\setminus D_z$ функция F имеет в бесконечно удаленной точке нуль не ниже второго порядка, то равенство (2.50) превращается в формулу (2.18), где кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме 2.11.

Отметим также, что формулы (2.49), (2.18) для осесимметричного потенциала $\varphi(x,r)$ и функции тока Стокса $\psi(x,r)$ при выполнении некоторых дополнительных условий на функцию F распространяются также на случай, когда правильная в направлении оси Or область D является неограниченной.

Теорема 2.16. *Пусть область D_z неограничена, а функция $F:\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}\longrightarrow\mathbb{C}$ голоморфна в $\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}$ и удовлетворяет условию* (2.44), *а также дополнительному условию*

$$\int\limits_{|r|}^{\infty} |F(x+i\eta)-F(x-i\eta)| \ \frac{d\eta}{\eta} < \infty \qquad \forall\,(x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}\,. \tag{2.51}$$

Тогда функция (2.49) *является решением уравнения* (2.2) *в* $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$*; при этом* γ — *произвольная жорданова локально спрямляемая и симметричная относительно действительной оси кривая в* $\mathbb{C}$*, которая замыкается в бесконечно удаленной точке и является границей области* D_z'' *с такими же свойствами, как в теореме* 2.11.

Доказательство. Пусть $(x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}: r\neq 0,\ z=x+ir$. Покажем сначала, что при условиях теоремы интеграл в равенстве (2.49) существует.

Пусть $0<\varepsilon<\frac{1}{2}\ \min\{|r|,\min\limits_{t\in\gamma}|t-z|\}$ и $N>2\ (|r|+|x|)$. Рассмотрим множества $E^{\pm}_{\varepsilon,N} := \{t\in\mathbb{C}\setminus\overline{D_z''}: |t-z|>\varepsilon, |t-\overline{z}|>\varepsilon, |t|<N, \pm(\mathrm{Re}\,t-x)>0\}$. Ориентация границы $\partial E^{\pm}_{\varepsilon,N}$ такова, что при ее обходе в положительном направлении множество $E^{\pm}_{\varepsilon,N}$ остается справа. Обозначим $c_N:=\{t\in\mathbb{C}\setminus\overline{D_z''}:|t|=N\}$ и

$$\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)^{\pm} := \lim_{\tau\to t,\tau\in E^{\pm}_{\varepsilon,N}} \sqrt{(\tau-z)(\tau-\overline{z})} \qquad \forall\, t\in\partial E^{\pm}_{\varepsilon,N}.$$

Учитывая равенства $\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)^{\pm} = \pm\ i\ \sqrt{(\mathrm{Im}\,t)^2-r^2}$ при $t\in\{t\in\partial E^{\pm}_{\varepsilon,N}: \mathrm{Re}\,t=x, \mathrm{Im}\,t>|r|\}$ и $\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)^{\pm} = \mp\ i\ \sqrt{(\mathrm{Im}\,t)^2-r^2}$ при $t\in\{t\in\partial E^{\pm}_{\varepsilon,N}: \mathrm{Re}\,t=x,\ \mathrm{Im}\,t<-|r|\}$, путем таких же рассуждений, как и при доказательстве теоремы 2.8, приходим к соотношениям

$$\int\limits_{\{t\in\gamma\,:\,|t|\le N\}} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\ dt = \int\limits_{\partial E^{-}_{\varepsilon,N}} \frac{F(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})})^{-}}\ dt +$$

$$+\int\limits_{\partial E^{+}_{\varepsilon,N}} \frac{F(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})})^{+}}\ dt - \int\limits_{\partial E^{-}_{\varepsilon,N}\setminus\gamma} \frac{F(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})})^{-}}\ dt -$$

$$-\int\limits_{\partial E^{+}_{\varepsilon,N}\setminus\gamma} \frac{F(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})})^{+}}\ dt = -2 \int\limits_{|r|+\varepsilon}^{|\,\mathrm{Im}\,t_N|} \frac{F(x+i\eta)-F(x-i\eta)}{\sqrt{\eta^2-r^2}}\ d\eta -$$

$$-\Bigg(\int\limits_{c_\varepsilon(z)} + \int\limits_{c_\varepsilon(\bar z)}\Bigg)\frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt + \int\limits_{c_N}\frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt\,, \qquad (2.52)$$

где t_N — одна из точек пересечения дуги c_N и прямой $\{t\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} t = x\}$.

В равенстве (2.52) интегралы по окружностям $c_\varepsilon(z)$, $c_\varepsilon(\bar z)$ оцениваются тем же способом, что и интеграл I_6 при доказательстве теоремы 2.8. Для модуля интеграла по дуге c_N аналогично получаем оценку

$$\Bigg|\int\limits_{c_N}\frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt\Bigg| \le\ c\sup_{t\in c_N}|F(t)|\,,$$

где постоянная c не зависит от N.

Таким образом, устремляя в равенстве (2.52) ε к нулю, а N к бесконечности, с учетом соотношения (2.44) получаем равенство

$$\int\limits_{\gamma}\frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt = -2\int\limits_{|r|}^{\infty}\frac{F(x+i\eta)-F(x-i\eta)}{\sqrt{\eta^2-r^2}}\,d\eta\,, \qquad (2.53)$$

интеграл в правой части которого существует вследствие условия (2.51).

Условия (2.44), (2.51) обеспечивают также существование в $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$ всех частных производных функции (2.49), входящих в уравнение (2.2). Далее доказательство легко осуществляется аналогично доказательству теоремы 2.6.

Теорема 2.17. *Пусть область* D_z *неограничена, а функция* $F:\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}\longrightarrow\mathbb{C}$ *голоморфна в* $\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}$ *и удовлетворяет дополнительным условиям*

$$\lim_{z\to\infty,\ z\in\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}} z\,F(z)=0, \qquad (2.54)$$

$$\int\limits_{|r|}^{\infty}|F(x+i\eta)+F(x-i\eta)|\,d\eta<\infty \qquad \forall\,(x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}\,. \qquad (2.55)$$

Тогда пара функций (2.49), (2.18) *является решением системы* (2.1) *в* $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$*; при этом кривая* γ *имеет такие же свойства, как и в теореме* 2.16. *Кроме того, функции* (2.49), (2.18) *являются соответственно решениями уравнений* (2.2), (2.3) *в* $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$.

Доказательство. Поскольку из условия (2.54) следует выполнение условий (2.44) и (2.51), то по теореме 2.16 функция (2.49) является решением уравнения (2.2) в $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$.

Для произвольной точки $(x, r) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} : r \neq 0$ при выполнении условия (2.54) аналогично равенству (2.53) доказывается, что

$$\int\limits_{\gamma} \frac{F(t)\ (t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\ dt = -2\ i \int\limits_{|r|}^{\infty} \frac{F(x+i\eta)+F(x-i\eta)}{\sqrt{\eta^2-r^2}}\ \eta\ d\eta\,,$$

где $z = x + ir$ и интеграл в правой части равенства существует вследствие условия (2.55). Условия (2.54), (2.55) обеспечивают также существование в области $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ всех частных производных функции (2.18), входящих в уравнение (2.3). Далее доказательство легко осуществляется аналогично доказательству теоремы 2.6.

В следующем параграфе будет показано, что при выполнении некоторых естественных условий каждое решение уравнения (2.2) и каждое решение уравнения (2.3) в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ представляются формулами (2.49), (2.18), при этом будет найдено выражение голоморфной функции F через функции φ и ψ в явном виде.

§ 15. Интегральные представления осесимметричного потенциала и функции тока Стокса вне правильных областей

15.1. Интегральное представление осесимметричного потенциала. В доказательстве представления потенциала $\varphi(x, r)$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ формулой (2.49) как в случае ограниченной, так и неограниченной области D, правильной в направлении оси Or, используется следующая лемма.

Лемма 2.3. *Пусть функция $\varphi(x, r)$ имеет в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ непрерывные частные производные второго порядка, является решением уравнения* (2.2) *и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{r\to\infty, (x_0,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}} \big(|\varphi'_x(x_0, r)| + |\varphi'_r(x_0, r)|\big) = 0\,, \qquad x_0 \in \mathbb{R}\,, \tag{2.56}$$

$$\int\limits_{r}^{\infty} \big(|\varphi''_{ss}(x, s)| + |\varphi''_{xs}(x, s)|\big)\, s\, ds < \infty \quad \forall\, (x, r) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} : r > 0\,. \tag{2.57}$$

Тогда функция $F_5(x+ir)=u_5(x,r)+iv_5(x,r)$, *где*

$$u_5(x,r):=\begin{cases} \tilde{u}_5(x,r)\equiv -\int\limits_r^{\infty}\dfrac{s\ \varphi'_x(x,s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\ ds & \\ & \text{при } (x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}: r>0, \\ -\int\limits_0^{\infty}\varphi'_x(x,s)\ ds & \text{при } (x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}: r=0, \\ \tilde{u}_5(x,-r) & \text{при } (x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}: r<0, \end{cases} \tag{2.58}$$

$$v_5(x,r):=\begin{cases} \tilde{v}_5(x,r)\equiv r\int\limits_r^{\infty}\dfrac{\varphi'_s(x,s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\ ds & \\ & \text{при } (x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}: r>0, \\ 0 & \text{при } (x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}: r=0, \\ -\tilde{v}_5(x,-r) & \text{при } (x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}: r<0, \end{cases} \tag{2.59}$$

голоморфна в $\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}$.

Доказательство. Пусть $(x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}: r>0$. Выполняя аналогичные выкладки, как и при доказательстве леммы 2.1, с учетом соотношений (2.56), (2.57) получаем

$$\frac{\partial\tilde{u}_5(x,r)}{\partial x}=-\int\limits_r^{\infty}\frac{s\ \varphi''_{xx}(x,s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\ ds\,,$$

$$\frac{\partial\tilde{u}_5(x,r)}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_r^{\infty}\varphi''_{xs}(x,s)\ \sqrt{s^2-r^2}\ ds=-r\int\limits_r^{\infty}\frac{\varphi''_{xs}(x,s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\ ds\,,$$

$$\frac{\partial\tilde{v}_5(x,r)}{\partial x}=r\int\limits_r^{\infty}\frac{\varphi''_{xs}(x,s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\ ds\,,$$

$$\frac{\partial\tilde{v}_5(x,r)}{\partial r}=\int\limits_r^{\infty}\frac{\varphi'_s(x,s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\ ds+r\ \frac{\partial}{\partial r}\Bigg(-\varphi'_r(x,r)\ \ln r-$$

$$-\int\limits_r^{\infty}\varphi''_{ss}(x,s)\ \ln(s+\sqrt{s^2-r^2})\ ds\Bigg)=\int\limits_r^{\infty}\frac{\varphi'_s(x,s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\ ds-r\ \varphi''_{rr}(x,r)\ \ln r-$$

$$-\varphi_r'(x,r) + r\,\varphi_{rr}''(x,r)\,\ln r + r^2 \int\limits_r^\infty \frac{\varphi_{ss}''(x,s)}{s+\sqrt{s^2-r^2}}\,\frac{ds}{\sqrt{s^2-r^2}} =$$

$$= \int\limits_r^\infty \frac{\varphi_s'(x,s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\,ds - \varphi_r'(x,r) + \int\limits_r^\infty \frac{\varphi_{ss}''(x,s)\,\left(s-\sqrt{s^2-r^2}\right)}{\sqrt{s^2-r^2}}\,ds =$$

$$= \int\limits_r^\infty \frac{\varphi_s'(x,s) + s\,\varphi_{ss}''(x,s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\,ds - \varphi_r'(x,r) - \int\limits_r^\infty \varphi_{ss}''(x,s)\,ds = -\int\limits_r^\infty \frac{s\,\varphi_{xx}''(x,s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\,ds.$$

Таким образом, при $(x,r)\in D : r>0$ выполняются условия Коши – Римана:

$$\frac{\partial u_5(x,r)}{\partial x} = \frac{\partial v_5(x,r)}{\partial r}\,, \qquad \frac{\partial u_5(x,r)}{\partial r} = -\frac{\partial v_5(x,r)}{\partial x}\,.$$

Теперь голоморфность функции F_5 в $\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}$ является следствием принципа симметрии [31, с. 148]. Лемма доказана.

В случае ограниченной области D справедлива следующая теорема.

Теорема 2.18. *Пусть область D ограничена, а функция $\varphi(x,r)$ является четной по переменной r в области $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$, обращается в нуль на бесконечности, имеет непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяет уравнению* (2.2) *в $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$, а также условиям* (2.56), (2.57) *и дополнительному условию*

$$\lim_{|x|+|r|\to\infty,\,(x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}} \big(|u_5(x,r)| + |v_5(x,r)|\big) = 0\,, \tag{2.60}$$

где функции $u_5(x,r)$, $v_5(x,r)$ определяются соотношениями (2.58), (2.59). *Тогда существует единственная голоморфная функция $F:\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}\longrightarrow\mathbb{C}$, которая удовлетворяет условию* (2.44) *и такая, что при всех $(x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$ выполняется равенство* (2.49), *при этом $F(x+ir) = u_5(x,r) + iv_5(x,r)$.*

Доказательство. Пусть $(x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}\ :\ r>0$, $z=x+ir$ и кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме 2.11. Как и при доказательстве теоремы 2.8, рассмотрим интегральное уравнение (2.29) с искомой функцией $F(t)$, которая должна быть голоморфной в $\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}$ и удовлетворять условию (2.44).

Так же, как и при доказательстве теоремы 2.16, получаем равенство (2.53), причем в случае ограниченной кривой γ интеграл в левой части этого равенства существует без дополнительных предположений.

Теперь, вводя в рассмотрение функцию

$$\tilde{v}_5(x,\eta) := \frac{i}{2}\,\left(F(x-i\eta)-F(x+i\eta)\right) \tag{2.61}$$

и используя равенство (2.53), при $(x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}\ :\ r>0$ приводим уравнение (2.29) к уравнению

$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{\tilde{v}_5(x,\eta)}{\sqrt{\eta^2-r^2}}\,d\eta = \varphi(x,r)\,, \tag{2.62}$$

которое при выполнении условий (2.56), (2.57) аналогично уравнению (2.33) имеет единственное решение

$$\tilde{v}_5(x,r) = r\int\limits_r^\infty \frac{\varphi'_s(x,s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\,ds\,.$$

Определим функции $v_5(x,r)$, $u_5(x,r)$ соотношениями (2.59), (2.58). Из леммы 2.3 и условия (2.60) следует, что $F(x+ir) = u_5(x,r) + {}+iv_5(x,r)$ — единственная голоморфная в $\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}$ функция, для которой $\operatorname{Im}F(x+ir) = v_5(x,r)$ и выполняется условие (2.44).

Итак, показано, что с учетом четности функции $\varphi(x,r)$ по переменной r найденная функция F удовлетворяет соотношениям (2.49) при $(x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}\ :\ r\neq 0$. Поскольку обе части равенства (2.49) являются непрерывными функциями в точках $(x,0)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$, то функция F удовлетворяет также соотношениям (2.49) и при $(x,0)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$.

Докажем единственность голоморфной в области $\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}$ функции F, удовлетворяющей соотношениям (2.49), (2.44). Заметим, что равенство (2.61) представляет разложение гармонической функции $\tilde{v}_5(x,r)$ на голоморфную и антиголоморфную компоненты. Поскольку компоненты в таком разложении определяются с точностью до постоянного слагаемого, а входящая в равенство (2.61) функция F должна обращаться в нуль на бесконечности, то единственной такой функцией является $F(x+ir) = u_5(x,r)+iv_5(x,r)$. Теперь единственность голоморфной в $\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}$ функции F, удовлетворяющей соотношениям (2.49) и (2.44), следует из эквивалентности уравнений (2.29), (2.62) и единственности решения уравнения (2.62). Теорема доказана.

Пусть в равенстве (2.46) $B\Phi = F$, где функция F определена в теореме 2.18. Тогда из теоремы 2.18 следует, что каждое решение уравнения (2.2) в области $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$, удовлетворяющее условиям этой теоремы, является компонентой V_1 функции (2.46), $\mathbb{C}$-аналитической в области $\widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$.

Отметим, что функции (2.41) соответствует осесимметричный потенциал $M_1(x,r) := (x^2+r^2)^{-1/2}$, построенный по формуле (2.47), а функции $\widetilde{\zeta}^{-n}$ при $n = 2,3,\ldots$ аналогично ставится в соответствие осесимметричный потенциал

$$M_n(x,r) := \frac{\partial^{n-1} M_1(x,r)}{\partial x^{n-1}}\,.$$

Теперь, опираясь на теоремы 2.14, 2.18, можно утверждать, что если область D является ограниченной и $(0;0) \in D$, то на каждом компактном подмножестве множества $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ осесимметричный потенциал $\varphi(x,r)$, удовлетворяющий условиям теоремы 2.18, равномерно приближается линейными комбинациями функций $M_n(x,r)$, $n = 1,2,\ldots$.

В случае неограниченной области D аналогично теореме 2.18 доказывается следующее утверждение.

Теорема 2.19. *Пусть область D неограничена, а функция $\varphi(x,r)$ является четной по переменной r в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, обращается в нуль на бесконечности, имеет непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяет уравнению* (2.2) *в* $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, *а также условиям* (2.56), (2.57), (2.60) *и дополнительному условию*

$$\int\limits_r^\infty \frac{|v_5(x,\eta)|}{\eta}\,d\eta < \infty \qquad \forall\,(x,r) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} : r > 0\,, \tag{2.63}$$

где функция $v_5(x,r)$ определяется соотношениями (2.59). *Тогда существует единственная голоморфная функция $F : \mathbb{C} \setminus \overline{D_z} \longrightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям* (2.44), (2.51) *и такая, что при всех* $(x,r) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ *выполняется равенство* (2.49), *в котором кривая γ имеет такие же свойства, как в теореме* 2.16. *При этом функция F представляется так же, как и в теореме* 2.18.

Отметим, что соотношения (2.57), (2.60), (2.63) выполняются, по крайней мере, в случае, когда функция $\varphi(x,r)$ обращается в нуль на бесконечности, удовлетворяет условию (2.56), а также оценке

$$|\varphi''_{xr}(x,r)| + |\varphi''_{rr}(x,r)| \le \ c\ (|x|+|r|)^{-2-\alpha} \quad \forall\,(x,r) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}\,, \tag{2.64}$$

где $\alpha \in (0;1)$ и постоянная c не зависит от (x,r).

15.2. Интегральное представление функции тока Стокса. В доказательстве представления функции тока Стокса $\psi(x,r)$ в $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$ формулой (2.18) как в случае ограниченной, так и неограниченной области D, правильной в направлении оси Or, используется следующая лемма.

Лемма 2.4. *Пусть функция $\psi(x,r)$ имеет в $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$ непрерывные частные производные второго порядка, является решением уравнения* (2.3) *и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{r\to\infty,(x_0,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}}\big(|\psi'_x(x_0,r)|+|\psi'_r(x_0,r)|\big)=0\,,\qquad x_0\in\mathbb{R}\,,\tag{2.65}$$

$$\int\limits_r^\infty\big(s\,|\psi''_{ss}(x,s)|+|\psi''_{xs}(x,s)|\big)\,ds<\infty\quad\forall\,(x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}:r>0.\tag{2.66}$$

Тогда функция $F_6(x+ir)=u_6(x,r)+iv_6(x,r)$, где

$$u_6(x,r):=\begin{cases}\tilde u_6(x,r)\equiv-\displaystyle\int\limits_r^\infty\frac{\psi'_s(x,s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\,ds & \\ & \text{при } (x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}:r>0,\\ -\int\limits_0^\infty\Delta\psi(x,s)\,ds & \text{при } (x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}:r=0,\\ \tilde u_6(x,-r) & \text{при } (x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}:r<0,\end{cases}\tag{2.67}$$

$$v_6(x,r):=\begin{cases}\tilde v_6(x,r)\equiv-r\displaystyle\int\limits_r^\infty\frac{\psi'_x(x,s)}{s\,\sqrt{s^2-r^2}}\,ds & \\ & \text{при } (x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}:r>0,\\ 0 & \text{при } (x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}:r=0,\\ -\tilde v_6(x,-r) & \text{при } (x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}:r<0,\end{cases}\tag{2.68}$$

голоморфна в $\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}$.

Доказательство. Пусть $(x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}:r>0$. Выполняя аналогичные выкладки, как и при доказательстве леммы 2.2, с учетом соотношений (2.65), (2.66) получаем

$$\frac{\partial\tilde u_6(x,r)}{\partial x}=-\int\limits_r^\infty\frac{\psi''_{sx}(x,s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\,ds\,,$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_6(x,r)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\psi'_r(x,r)\,\ln r + \int\limits_r^\infty \psi''_{ss}(x,s)\,\ln(s+\sqrt{s^2-r^2})\,ds\right) =$$

$$= -\frac{1}{r}\int\limits_r^\infty \frac{s\,\psi''_{ss}(x,s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\,ds\,,$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_6(x,r)}{\partial x} = -r\int\limits_r^\infty \frac{\psi''_{xx}(x,s)}{s\,\sqrt{s^2-r^2}}\,ds = -r\int\limits_r^\infty \frac{\psi'_s(x,s)}{s^2\,\sqrt{s^2-r^2}}\,ds +$$

$$+\,r\int\limits_r^\infty \frac{\psi''_{ss}(x,s)}{s\,\sqrt{s^2-r^2}}\,ds = \frac{1}{r}\int\limits_r^\infty \frac{\psi''_{ss}(x,s)\sqrt{s^2-r^2}}{s}\,ds + r\int\limits_r^\infty \frac{\psi''_{ss}(x,s)}{s\,\sqrt{s^2-r^2}}\,ds =$$

$$= \frac{1}{r}\int\limits_r^\infty \frac{s\,\psi''_{ss}(x,s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\,ds\,,$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_6(x,r)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\int\limits_r^\infty \psi''_{xs}(x,s)\,\arccos\frac{r}{s}\,ds = -\int\limits_r^\infty \frac{\psi''_{sx}(x,s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\,ds\,.$$

Таким образом, при $(x,r)\in D : r>0$ выполняются условия Коши – Римана:

$$\frac{\partial u_6(x,r)}{\partial x} = \frac{\partial v_6(x,r)}{\partial r}\,, \qquad \frac{\partial u_6(x,r)}{\partial r} = -\frac{\partial v_6(x,r)}{\partial x}\,.$$

Теперь голоморфность функции F_6 в $\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}$ является следствием принципа симметрии [31, с. 148]. Лемма доказана.

В случае ограниченной области D справедливая следующая теорема.

Теорема 2.20. *Пусть область D ограничена, а функция $\psi(x,r)$ является четной по переменной r в области $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$, обращается в нуль на бесконечности, имеет непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяет уравнению* (2.3) *в $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$, а также условиям* (2.65), (2.66) *и дополнительному условию*

$$\lim_{|x|+|r|\to\infty,(x,r)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}:r\neq 0} (|x|+|r|)\,(|u_6(x,r)|+|v_6(x,r)|) = 0\,, \quad (2.69)$$

где функции $u_6(x,r)$, $v_6(x,r)$ определяются соотношениями (2.67), (2.68). *Тогда существует единственная голоморфная функция*

$F : \mathbb{C} \setminus \overline{D_z} \longrightarrow \mathbb{C}$, *удовлетворяющая условию* (2.54) *и такая, что при всех* $(x,r) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ *выполняется равенство* (2.18), *в котором кривая* γ *имеет такие же свойства, как и в теореме* 2.11. *При этом* $F(x+ir) = u_6(x,r) + iv_6(x,r)$.

Доказательство. Пусть $(x,r) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \; : \; r > 0,\ z = x + ir$ и кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме 2.11. Как и при доказательстве теоремы 2.9, рассмотрим интегральное уравнение (2.38) с искомой функцией $F(t)$, которая должна быть голоморфной в $\mathbb{C} \setminus \overline{D_z}$ и удовлетворять условию (2.54). Из соотношения (2.38) получим уравнение

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_r^\infty \frac{\eta\ \tilde{u}_6(x,\eta)}{\sqrt{\eta^2 - r^2}}\ d\eta = \psi(x,r) \tag{2.70}$$

таким же образом, как получено аналогичное ему уравнение (2.62), при этом $\tilde{u}_6(x,\eta) := \frac{1}{2}\ (F(x+i\eta) + F(x-i\eta))$.

При выполнении условий (2.65), (2.66) уравнение (2.70) имеет единственное решение

$$\tilde{u}_6(x,r) = -\int\limits_r^\infty \frac{\psi'_s(x,s)}{\sqrt{s^2 - r^2}}\ ds\,.$$

Определим функции $u_6(x,r)$, $v_6(x,r)$ соотношениями (2.67), (2.68). Из леммы 2.4 и условия (2.69) следует, что $F(x+ir) = u_6(x,r) + {}+iv_6(x,r)$ — единственная голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \overline{D_z}$ функция, для которой $\operatorname{Re} F(x+ir) = u_6(x,r)$ и выполняется условие (2.54). Далее доказательство осуществляется аналогично доказательству теоремы 2.18.

Отметим, что функции (2.41) соответствует функция тока Стокса $N_1(x,r) := x\ (x^2 + r^2)^{-1/2}$, построенная по формуле (2.48), а функции $\widetilde{\zeta^{-n}}$ при $n = 2, 3, \ldots$ аналогично ставится в соответствие функция тока Стокса

$$N_n(x,r) := \frac{\partial^{n-1} N_1(x,r)}{\partial x^{n-1}}\,.$$

Теперь, опираясь на теоремы 2.14, 2.20, можно утверждать, что если область D является ограниченной и $(0;0) \in D$, то на каждом компактном подмножестве множества $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ функция тока Стокса $\psi(x,r)$, удовлетворяющая условиям теоремы 2.20, равномерно приближается линейными комбинациями функций $N_n(x,r)$, $n = 2, 3, \ldots$.

В случае неограниченной области D аналогично теореме 2.20 доказывается следующее утверждение.

Теорема 2.21. *Пусть область D неограничена, а функция $\psi(x,r)$ является четной по переменной r в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, обращается в нуль на бесконечности, имеет непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяет уравнению* (2.3) *в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, а также условиям* (2.65), (2.66), (2.69) *и дополнительному условию*

$$\int\limits_r^\infty |u_6(x,\eta)|\, d\eta < \infty \qquad \forall\,(x,r) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} : r > 0\,, \tag{2.71}$$

где функция $u_6(x,r)$ определяется соотношениями (2.67). *Тогда существует единственная голоморфная функция $F : \mathbb{C} \setminus \overline{D_z} \longrightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям* (2.54), (2.55) *и такая, что при всех $(x,r) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ выполняется равенство* (2.18), *в котором кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме* 2.16. *При этом функция F представляется так же, как в теореме* 2.20.

Отметим, что соотношения (2.66), (2.69), (2.71) выполняются, по крайней мере, в случае, когда функция $\psi(x,r)$ обращается в нуль на бесконечности, удовлетворяет условию (2.65), а также оценке вида (2.64) для производных ψ''_{xr}, ψ''_{rr}.

Глава 3. Краевые задачи для пространственных осесимметричных потенциальных полей

§ 16. Интегральные представления осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в произвольной односвязной области

Многие методы исследования уравнений эллиптического типа основываются на интегральных представлениях решений. Достаточно эффективными в приложениях являются интегральные представления решений через аналитические функции комплексной переменной.

Известно (см., например, монографии [83, 33]), что функция

$$\varphi(x,r) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi F(x + ir\cos\tau)\,d\tau \tag{3.1}$$

является решением уравнения (2.2) в области D, правильной в направлении оси Or, при условии, что $F(z)$ — аналитическая функция в области D_z комплексной плоскости.

В монографии [33] показано также, что пара функций (3.1) и

$$\psi(x,r) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^r y\left(\int\limits_0^\pi F'(x + iy\cos\tau)\,d\tau\right)dy \tag{3.2}$$

является решением системы (2.1) при тех же условиях, наложенных на функцию $F(z)$, что и в формуле (3.1).

При помощи алгебры $\mathbb{H}$, рассмотренной в предыдущей главе, в работе [40] получено более простое, чем (3.2), выражение для функции тока Стокса

$$\psi(x,r) = \frac{r}{\pi i}\int\limits_0^{\pi} F(x + ir\cos\tau)\ \cos\tau\ d\tau\,,$$

которая вместе с потенциалом (3.1) образует решением системы (2.1) в правильной в направлении оси Or области D; здесь $F(z)$ так же, как и в формуле (3.1), является аналитической функцией в области D_z.

Для уравнения (2.2) известны также обратные теоремы об интегральных представлениях его решений. Так, в монографии [83] имеется результат: если решение $\varphi(x,r)$ уравнения (2.2) является аналитическим в окрестности точки $(x_0, 0)$, то есть допускает разложение в степенной ряд по произведениям степеней $(x - x_0)$ и r, то в этой же окрестности $\varphi(x,r)$ представимо формулой (3.1), где $F(z)$ — конкретная аналитическая функция комплексной переменной $z = x + ir$.

Из результатов работы [92] следует, что решение $\varphi(x,r)$ уравнения (2.2), аналитическое в правильной в направлении оси Or области D, представляется формулой

$$\varphi(x,r) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{F(x + ir(1-2\tau))}{\sqrt{\tau(1-\tau)}}\ d\tau\,, \tag{3.3}$$

где $F(z)$ — некоторая функция, аналитическая в области D_z. При обобщении этого результата в работе [28] показано, что формулой (3.3) представляется каждое непрерывное в D решение $\varphi(x,r)$ уравнения (2.2), имеющее вне оси Ox непрерывные частные производные второго порядка. В работе [68] путем приведения уравнения (3.3) с неизвестной функцией F к интегральному уравнению Абеля получена формула обращения интегрального представления (3.3), то есть формула, выражающая аналитическую функцию $F(z)$ через соответствующее решение уравнения (2.2).

Отметим, что решение уравнения (2.2) является компонентой некоторой обобщенной аналитической функции $W(z) = \varphi(x,r) + iv(x,r)$ комплексной переменной $z = x + ir$, удовлетворяющей уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial r}\right)\partial W(x+ir) - \frac{1}{2r}\ \left(W(x+ir) - \overline{W(x+ir)}\right) = 0, \tag{3.4}$$

которое является комплексной формой обобщенной системы Коши – Римана с сингулярной линией $r = 0$. В работе [70] для правильной в направлении мнимой оси области D_z или для внешней относительно D_z области $\mathbb{C} \setminus \overline{D_z}$ установлены интегральные представления решений уравнения (3.4), аналогичные по своему виду выражениям (3.3) и (2.17), (2.18). Кроме того, в [70] получены формулы обращения указанных интегральных представлений.

В монографии [64] развита теория p-аналитических функций комплексной переменной, частным случаем которых при $p = x$ являются так называемые x-аналитические функции. Компоненты x-аналитической функции удовлетворяют системе уравнений с частными производными, которая вырождается на оси $x = 0$ и аналогична системе (2.1). При этом в [64] предложен ряд интегральных представлений x-аналитических функций через аналитические функции комплексной переменной и установлены формулы обращения указанных интегральных представлений. Ряд формул обращения интегральных представлений x-аналитических функций получен также в работах [21, 53, 66].

Интегральные представления решений уравнения (2.2), похожие по своему виду с представлениями x-аналитических функций, использованы в работе [95] при изучении задач газовой динамики, а в работе [1] при решении некоторых осесимметричных задач теории упругости использованы интегральные выражения, похожие по своему виду с интегральными выражениями (2.17), (2.18).

В этой главе будет показано, что интегральные представления осесимметричного потенциала и функции тока Стокса вида (2.17), (2.18), полученные в предыдущей главе при помощи главных продолжений голоморфных функций комплексной переменной в алгебру $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, допускают обобщение на случай симметричной относительно оси Ox односвязной области произвольной формы (то есть область может и не быть правильной в направлении оси Or), при этом будут доказаны как прямые, так и обратные теоремы.

16.1. Прямые теоремы. Пусть D — область меридианной плоскости xOr, симметричная относительно оси Ox. Условимся, что всюду в дальнейшем область D_z комплексной плоскости $\mathbb{C}$, конгруэнтная области D при соответствии $z = x+ir, (x,r) \in D$, является односвязной. Положительным направлением обхода границы ∂D_z будем считать такое направление, при котором область D_z остается слева. В случае, когда граница ∂D_z имеет непустое пересечение с вещественной прямой, обозначим $b_1 := \min\limits_{z \in \partial D_z \cap \mathbb{R}} \operatorname{Re} z$ и $b_2 := \max\limits_{z \in \partial D_z \cap \mathbb{R}} \operatorname{Re} z$.

Для каждой точки $z \in D_z$, для которой $\operatorname{Im} z \neq 0$, зафиксируем произвольную жорданову спрямляемую кривую $\Gamma_{z\bar{z}}$, лежащую в области D_z, симметричную относительно действительной оси и соединяющую точки z, $\bar{z}$. Если при этом область D_z неограничена, а ее граница ∂D_z является ограниченной, то условимся также, что все кривые $\Gamma_{z\bar{z}}$ пересекают действительную ось на интервале $(-\infty, b_1)$.

Если $z \in D_z$ и $\operatorname{Im} z \neq 0$, то $\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$ понимаем как непрерывную ветвь функции $H(t) = \sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$, аналитической вне разреза вдоль кривой $\Gamma_{z\bar{z}}$, такую, что $H(t) > 0$ при всех $t > \max\limits_{z \in \Gamma_{z\bar{z}}} \operatorname{Re} z$.

Рассмотрим сначала область D с жордановой локально спрямляемой границей. Справедлива следующая теорема, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 2.6.

Теорема 3.1. *Пусть область D (как ограниченная, так и неограниченная) имеет жорданову локально спрямляемую границу ∂D и функция f суммируема на ∂D_z. Тогда пара функций*

$$\varphi(x,r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D_z} \dfrac{f(t)}{\sqrt{(t-x-ir)(t-x+ir)}}\, dt & \text{при } r \neq 0; \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D_z} \dfrac{f(t)}{t-x}\, dt & \text{при } r = 0, \\ & \text{ограниченной границе } \partial D_z \text{ и } x < b_2 \\ & \text{или неограниченной границе } \partial D_z; \\ -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D_z} \dfrac{f(t)}{t-x}\, dt & \text{при } r = 0, \\ & \text{ограниченной границе } \partial D_z \text{ и } x > b_2; \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\psi(x,r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D_z} f(t) \left(1 - \dfrac{t-x}{\sqrt{(t-x-ir)(t-x+ir)}}\right) dt & \\ & \text{при } r \neq 0; \\ 0 \quad \text{при } r = 0, \text{ ограниченной границе } \partial D_z \text{ и } x < b_2 & \\ & \text{или неограниченной границе } \partial D_z; \\ \dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D_z} f(t)\, dt & \text{при } r = 0, \\ & \text{ограниченной границе } \partial D_z \text{ и } x > b_2 \end{cases} \tag{3.6}$$

является решением системы (2.1) *в области D. Кроме того, функции* (3.5), (3.6) *являются соответственно решениями уравнений* (2.2), (2.3) *в области D.*

В случае ограниченной области D, граница которой может быть как спрямляемой, так и неспрямляемой кривой, справедливая следующая теорема.

Теорема 3.2. *Каждой голоморфной в ограниченной области D_z функции F соответствует пара $\varphi(x,r)$, $\psi(x,r)$ решений системы* (2.1) *в области D, определяемых формулами* (2.17), (2.18), *где $(x,r) \in D$, $z = x + ir$, γ — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая в D_z, охватывающая кривую $\Gamma_{z\bar{z}}$. При этом функции* (2.17), (2.18) *являются соответственно решениями уравнений* (2.2), (2.3) *в области D.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon := \frac{1}{2} \min\limits_{t\in\partial D_z,\ \tau\in\Gamma_{z\bar{z}}} |t - \tau|$. В силу компактности кривой $\Gamma_{z\bar{z}}$ существует покрытие этой кривой конечным числом открытых кругов радиуса ε с центрами в точках кривой $\Gamma_{z\bar{z}}$. Тогда кривой γ может быть, по крайней мере, граница области, которая является объединением указанных кругов. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 3.1.

В случае неограниченной области D с произвольной границей аналогично устанавливается следующая теорема.

Теорема 3.3. *Каждой голоморфной в неограниченной области D_z функции F, удовлетворяющей условию*

$$\lim_{z\to\infty,\ z\in D_z} F(z) = 0, \tag{3.7}$$

соответствует пара $\varphi(x,r)$, $\psi(x,r)$ решений системы (2.1) *в области D:*

$$\varphi(x,r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma} \dfrac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\,dt & \textit{при } r \neq 0; \\ F(x) \quad \textit{при } r = 0, \textit{ ограниченной границе } \partial D_z & \\ \quad \textit{и } x < b_2 \textit{ или неограниченной границе } \partial D_z; & \\ -F(x) \quad \textit{при } r = 0, & \\ \quad \textit{ограниченной границе } \partial D_z \textit{ и } x > b_2; & \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\psi(x,r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma} F(t)\left(1 - \dfrac{t-x}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\right)dt & \textit{при } r \neq 0; \\ 0 \quad \textit{при } r = 0, \textit{ ограниченной границе } \partial D_z & \\ \quad \textit{и } x < b_2 \textit{ или неограниченной границе } \partial D_z; & \\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma_0} F(t)\,dt \quad \textit{при } r = 0, & \\ \quad \textit{ограниченной границе } \partial D_z \textit{ и } x > b_2, & \end{cases} \tag{3.9}$$

где $(x,r) \in D$, $z = x + ir$, γ *— произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая в* D_z, *охватывающая кривую* $\Gamma_{z\bar{z}}$, *а* γ_0 *— произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая в* D_z, *охватывающая границу* ∂D_z. *При этом функции* (3.8), (3.9) *являются соответственно решениями уравнений* (2.2), (2.3) *в области* D.

Очевидно, что если область D_z неограничена, а функция F голоморфна в D_z и удовлетворяет дополнительному условию

$$\int\limits_{\Gamma} F(t)\,dt = 0, \tag{3.10}$$

где Γ — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая в D_z, то равенство (3.9) превращается в формулу (2.18). Заметим, что если при этом неограниченная область D_z имеет ограниченную границу, то голоморфная в D_z функция F, которая обращается в нуль на бесконечности, удовлетворяет условию (3.10) тогда и только тогда, когда она имеет в бесконечно удаленной точке нуль не ниже второго порядка, то есть удовлетворяет соотношению

$$\lim_{z\to\infty,\ z\in D_z} z\,F(z) = 0. \tag{3.11}$$

Очевидно, что если D_z — ограниченная область со спрямляемой границей, а функция F в области D_z принадлежит классу Смирнова E_1 (см., например, [67, с. 205]), то интегралы в формулах (2.17), (2.18) могут быть заменены такими же интегралами по границе ∂D_z, то есть равенства (2.17), (2.18) при любом $(x,r) \in D$ преобразуются к виду

$$\varphi(x,r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D_z} \dfrac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\,dt & \text{при } r \neq 0, \\ F(x) & \text{при } r = 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\psi(x,r) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D_z} \dfrac{F(t)\,(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\,dt & \text{при } r \neq 0, \\ 0 & \text{при } r = 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

где $z = x+ir$, $F(t)$ — угловые граничные значения функции F, которые, как известно [67, с. 205], существуют почти во всех точках $t \in \partial D_z$.

Если же D_z — неограниченная область с локально спрямляемой жордановой границей, а функция F принадлежит классу Смирнова E_1

в D_z и удовлетворяет условию (3.7), то при $(x,r) \in D$ равенство (3.8) аналогично приводится к виду

$$\varphi(x,r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D_z} \dfrac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt & \text{при } r \neq 0; \\ F(x) \quad \text{при } r = 0, \text{ ограниченной границе } \partial D_z \\ \qquad \text{и } x < b_2 \text{ или неограниченной границе } \partial D_z; \\ -F(x) \quad \text{при } r = 0, \text{ ограниченной границе } \partial D_z \\ \qquad \text{и } x > b_2, \end{cases} \tag{3.14}$$

где $z = x+ir$, $F(t)$ — угловые граничные значения функции F. Если же при этом функция F удовлетворяет условию (3.11), то равенство (2.18), в свою очередь, преобразуется к виду (3.13).

16.2. Обратные теоремы. Справедливы обратные к теоремам предыдущего пункта утверждения об интегральных представлениях осесимметричных потенциалов и функций тока Стокса в областях меридианной плоскости. Сформулируем их сначала в случае ограниченной области D.

Теорема 3.4. *Для каждой четной по переменной r функции $\varphi(x,r)$, удовлетворяющей уравнению* (2.2) *в ограниченной области D, существует единственная голоморфная в области D_z функция $F : D_z \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая условию*

$$F(\bar{z}) = \overline{F(z)} \qquad \forall\, z \in D_z \tag{3.15}$$

и такая, что равенство (2.17) *выполняется для всех $(x,r) \in D$, при этом кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме* 3.2.

Теорема 3.5. *Для каждой четной по переменной r функции $\psi(x,r)$, удовлетворяющей уравнению* (2.3) *и условию* (2.37) *в ограниченной области D, существует голоморфная в области D_z функция F_0 такая, что равенство* (2.18) *при $F = F_0$ выполняется для всех $(x,r) \in D$, при этом кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме* 3.2. *Кроме того, любая голоморфная в D_z функция F, удовлетворяющая равенству* (2.18) *и условию* (3.15), *представляется в виде $F(z) = F_0(z) + C$, где C — некоторая действительная постоянная.*

Таким образом, несмотря на то, что функции (2.17), (2.18) удовлетворяют уравнениям (2.2), (2.3) в области D при произвольной голоморфной в D_z функции F, по существу, каждый осесимметричный потенциал $\varphi(x,r)$ и каждая функция тока Стокса в области D представляются формулами (2.17), (2.18), в которых голоморфная функция F удовлетворяет дополнительному условию симметрии (3.15).

Отметим, что если голоморфная в D_z функция F не удовлетворяет условию (3.15), то функции (2.17), (2.18), вообще говоря, являются комплекснозначными.

В случае неограниченной области D, имеющей ограниченную границу, справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.6. *Пусть D — неограниченная область с ограниченной границей. Тогда для каждой четной по переменной r функции $\varphi(x,r)$, удовлетворяющей уравнению* (2.2) *в области D и обращающейся в нуль на бесконечности, существует единственная голоморфная в области D_z функция F, удовлетворяющая условиям* (3.7), (3.15) *и такая, что равенство* (3.8) *выполняется для всех $(x,r) \in D$.*

Теорема 3.7. *Пусть D — неограниченная область с ограниченной границей. Тогда для каждой четной по переменной r функции $\psi(x,r)$, удовлетворяющей уравнению* (2.3) *в области D и условию* (2.37), *а также обращающейся в нуль на бесконечности, существует единственная голоморфная в области D_z функция F, удовлетворяющая условиям* (3.11), (3.15) *и такая, что равенство* (2.18) *выполняется для всех $(x,r) \in D$, при этом кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме* 3.3.

Доказательство теорем 3.4 – 3.7 приводится ниже после осуществления редукции задач Дирихле для осесимметричного потенциала и функции тока Стокса к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода на действительной оси. Аналогичные теоремам 3.4 – 3.7 утверждения доказаны в теоремах 2.8, 2.9, 2.18 – 2.21 для областей специального вида (правильных в направлении оси Or или дополнений к их замыканию) при некоторых дополнительных предположениях о функциях $\varphi(x,r)$, $\psi(x,r)$, при этом голоморфные функции F найдены в явном виде.

§ 17. Граничные свойства осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в областях с ограниченной границей

Будем рассматривать теперь в качестве D_z области с замкнутой жордановой спрямляемой границей.

Рассмотрим замкнутую жорданову спрямляемую кривую γ, симметричную относительно действительной оси. При этом через D_z^+ обозначим ограниченную область, а через D_z^- — неограниченную область, общей границей которых является γ. Отметим, что в соответствии с принятой в предыдущем параграфе договоренностью границы ∂D_z^+ и ∂D_z^- имеют противоположную ориентацию.

Из двух дуг кривой γ, соединяющих ее точки z_1 и z_2, через $\gamma_{z_1 z_2}$ обозначим дугу не большей длины. Обозначим через $l(z_1, z_2)$ длину дуги $\gamma_{z_1 z_2}$, а через $d(z_1, z_2) := \sup\limits_{t,z\in\gamma_{z_1 z_2}} |t - z|$ — диаметр этой дуги.

Будем использовать локальную метрическую характеристику кривой γ в точке z:

$$\theta_z(\varepsilon) := \operatorname{mes}\{t \in \gamma : |t - z| \le \varepsilon\},$$

где mes обозначает линейную меру Лебега на кривой γ, а также глобальную характеристику этой кривой (см., например, [74])

$$\theta(\varepsilon) := \sup_{z\in\gamma} \theta_z(\varepsilon).$$

Через $L_p(\gamma)$ обозначим банахово пространство суммируемых в степени p функций $f : \gamma \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int\limits_{\gamma} |f(t)|^p\, |dt|\right)^{1/p},$$

а через $L_\infty(\gamma)$ — банахово пространство существенно ограниченных функций $f : \gamma \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|f\|_{L_\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\gamma} |f(t)|.$$

Чтобы описать предельные свойства осесимметричного потенциала и функции тока Стокса, заданных в областях D_z^+ и D_z^-, определим $\sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}$ при $z \in \gamma$, $\operatorname{Im} z \neq 0$. В этом случае рассмотрим разрез плоскости $\mathbb{C}$ вдоль разомкнутой кривой $\Gamma^\gamma_{z\bar{z}}$ с концами z и $\bar{z}$ такой, что $\Gamma^\gamma_{z\bar{z}} \subset \gamma$ и $b_1 \in \Gamma^\gamma_{z\bar{z}}$. Теперь $\sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}$ будем понимать как непрерывную ветвь функции $H(t) = \sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}$, аналитической вне разреза вдоль кривой $\Gamma^\gamma_{z\bar{z}}$, такую, что $H(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R} :$ $t > \max\limits_{z\in\Gamma^\gamma_{z\bar{z}}} \operatorname{Re} z$. Введем также обозначение $(\sqrt{(\tau - z)(\tau - \bar{z})})^\pm :=$ $:= \lim\limits_{t\to\tau, t\in D_z\pm} \sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}$ при $\tau \in \gamma \setminus \{z, \bar{z}\}$.

17.1. Граничные свойства осесимметричного потенциала. В следующей теореме приведены условия, достаточные для непрерывного продолжения функции

$$f^{\pm}_{pot}(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D^{\pm}_{z}} \dfrac{f(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt & \text{при } \operatorname{Im} z \neq 0, \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D^{\pm}_{z}} \dfrac{f(t)}{t-z}\, dt & \text{при } \operatorname{Im} z = 0,\ z < b_2, \\ -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D^{-}_{z}} \dfrac{f(t)}{t-z}\, dt & \text{при } \operatorname{Im} z = 0,\ z > b_2 \end{cases}$$

из области $D^{\pm}_{z}$ на границу $\partial D^{\pm}_{z}$; при этом используется локальный центрированный (относительно точки $z \in E$) модуль непрерывности функции f на множестве $E \subset \mathbb{C}$:

$$\omega_{E,z}(f,\varepsilon) := \sup_{t\in E, |t-z|\le\varepsilon} |f(t) - f(z)|\,.$$

Теорема 3.8. *Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая, симметричная относительно действительной оси и такая, что*

$$\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon)\,, \qquad \varepsilon \to 0\,. \tag{3.16}$$

Если $f \in L_p(\gamma)$, $2 < p \le \infty$, то функция $f^{\pm}_{pot}$ непрерывно продолжается из области $D^{\pm}_{z}$ в точки множества $\partial D^{\pm}_{z} \setminus \{b_1, b_2\}$ и ее предельные значения при $z \in \partial D^{\pm}_{z} \setminus \{b_1, b_2\}$ выражаются формулой

$$f^{\pm}_{pot}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D^{\pm}_{z}} \frac{f(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\,)^{\mp}}\, dt. \tag{3.17}$$

При этом для каждой точки $z_0 \in \partial D^{\pm}_{z} \setminus \{b_1, b_2\}$ и любой точки $z_1 \in \partial D^{\pm}_{z}$, для которой $|z_1 - z_0| \le |\operatorname{Im} z_0|/2$, выполняется неравенство

$$|f^{\pm}_{pot}(z_1) - f^{\pm}_{pot}(z_0)| \le\ c\, \|f\|_{L_p}\, \frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}}\, \Omega(z_0, z_1), \tag{3.18}$$

где $\Omega(z_0, z_1) = (d(z_0, z_1))^{\frac{p-2}{2p}}$ при $2 < p < \infty$ и $\Omega(z_0, z_1) = \sqrt{d(z_0, z_1)} + \sqrt{|z_1 - z_0|}\, \ln \frac{1}{|z_1 - z_0|}$ при $p = \infty$, а постоянная c зависит только от кривой γ.

Если, кроме того, функция f в точке b_j, где $j = 1$ или $j = 2$, имеет предел

$$\lim_{t\to b_j,\ t\in E_f} f(t) =: f(b_j) \tag{3.19}$$

по некоторому множеству $E_f \subset \gamma$ *такому, что линейная мера Лебега разности* $\gamma \setminus E_f$ *равна нулю, и существует сингулярный интеграл*

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f(t)-f(b_j)}{t-b_j}\,dt, \tag{3.20}$$

а также выполняется асимптотическое соотношение

$$\int\limits_{|\operatorname{Im} z|}^{d(z,b_j)} \frac{\omega_{E_f,z}(f,\tau)}{\tau}\,d\tau \to 0, \qquad z\to b_j, z\in E_f, \tag{3.21}$$

то функция $f^{\pm}_{pot}$ *непрерывно продолжается из области* $D^{\pm}_z$ *также в точку* b_j *и при этом*

$$\lim_{z\to b_j,\ z\in\partial D^{+}_z} f^{+}_{pot}(z) = f(b_j) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{+}_z} \frac{f(t)-f(b_j)}{t-b_j}\,dt, \tag{3.22}$$

$$\lim_{z\to b_j,\ z\in\partial D^{-}_z} f^{-}_{pot}(z) = \frac{(-1)^{j-1}}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{-}_z} \frac{f(t)-f(b_j)}{t-b_j}\,dt. \tag{3.23}$$

Поясним здесь, что в равенстве (3.17) в подинтегральном выражении при $t\in\gamma_{z\bar z}$ предельные значения $\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\right)^{\mp}$ совпадают со значениями функции $\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}$ на правом относительно положительного направления обхода границы $\partial D^{\pm}_z$ краю разреза. Отметим также, что интеграл в соотношении (3.21) понимается как верхний интеграл Дарбу.

Доказательство теоремы 3.8. Если $f\in L_\infty(\gamma)$, то очевидно, что значения функции, определяемой равенством (3.17), конечны во всех точках $z\in\partial D^{\pm}_z\setminus\{b_1,b_2\}$.

Пусть теперь $f\in L_p(\gamma)$, $2<p<\infty$, и $z\in\partial D^{\pm}_z\setminus\{b_1,b_2\}$. Обозначим $q:=\frac{p}{p-1}$, $\gamma_+ := \{t\in\gamma : \operatorname{Im} t>0\}$ и $\gamma_- := \{t\in\gamma : \operatorname{Im} t<0\}$. Тогда с учетом неравенства Гельдера имеем

$$\int\limits_{\partial D^{\pm}_z}\left|\frac{f(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\,)^{\mp}}\right| |dt| \le$$

$$\le \Bigg(\int\limits_{\partial D^{\pm}_z} |f(t)|^p\,|dt|\Bigg)^{1/p}\Bigg(\int\limits_{\partial D^{\pm}_z}\frac{|dt|}{|(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\,)^{\mp}|^q}\Bigg)^{1/q} \le$$

$$\leq \|f\|_{L_p} \left(\int\limits_{\gamma_+} \frac{|dt|}{\sqrt{|t-z|^q \; |t-\bar{z}|^q}} + \int\limits_{\gamma_-} \frac{|dt|}{\sqrt{|t-z|^q \; |t-\bar{z}|^q}} \right)^{1/q}. \quad (3.24)$$

Поскольку одна из точек z и $\bar{z}$ принадлежит множеству γ_+, а вторая — множеству γ_-, то, не ограничивая общности, считаем, что $z \in \gamma_+$. Тогда с учетом леммы 1 работы [74] получаем оценку интеграла по множеству γ_+:

$$\int\limits_{\gamma_+} \frac{|dt|}{\sqrt{|t-z|^q |t-\bar{z}|^q}} \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|^{q/2}} \int\limits_{\gamma_+} \frac{|dt|}{|t-z|^{q/2}} \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|^{q/2}} \int\limits_0^d \frac{d\theta_z(\tau)}{\tau^{q/2}}, \quad (3.25)$$

в которой $d := \max\limits_{t,z \in \gamma} |t-z|$, а интеграл по мере $\theta_z(\tau)$ понимается как несобственный интеграл Римана – Стилтьеса. Аналогичная оценка имеет место и для интеграла по множеству γ_-.

Теперь оценим несобственный интеграл Римана – Стилтьеса с учетом предложения 1 работы [54] (см. также доказательство теоремы 1 работы [11]) так, что будем иметь

$$\frac{1}{|\operatorname{Im} z|^{q/2}} \int\limits_0^d \frac{d\theta_z(\tau)}{\tau^{q/2}} \leq \frac{q}{2(2^{q/2}-1)|\operatorname{Im} z|^{q/2}} \int\limits_0^d \frac{\theta_z(2\tau)}{\tau} \frac{d\tau}{\tau^{q/2}}. \quad (3.26)$$

Здесь интеграл в правой части неравенства существует, по крайней мере, как несобственный верхний интеграл Дарбу.

Из полученных оценок и условия (3.16) очевидным образом следует, что при $f \in L_p(\gamma)$, $2 < p < \infty$, значения функции, определяемой равенством (3.17), конечны во всех точках $z \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1, b_2\}$.

Для доказательства непрерывной продолжимости функции $f_{pot}^{\pm}$ в точки множества $\partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1, b_2\}$ при $2 < p < \infty$ рассмотрим точку $z_0 \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1, b_2\}$ и точку $z_1 \in D_z^{\pm}$ такую, что $\varepsilon := |z_1 - z_0| \leq |\operatorname{Im} z_0|/2$. Обозначим через z_2 одну из ближайших к точке z_1 точек границы $\partial D_z^{\pm}$. Введем в рассмотрение множества

$$\Gamma_1 := \{t \in \partial D_z^{\pm} : |t - z_0| \leq 2\varepsilon\} \cup \gamma_{z_0 z_2}, \qquad \overline{\Gamma_1} := \{\bar{t} : t \in \Gamma_1\},$$

$$\Gamma_2 := \{t \in \partial D_z^{\pm} : 2\varepsilon < |t - z_0| \leq |\operatorname{Im} z_0|\} \setminus \gamma_{z_0 z_2}, \quad \overline{\Gamma_2} := \{\bar{t} : t \in \Gamma_2\},$$

$$\Gamma_3 := \partial D_z^{\pm} \setminus (\Gamma_1 \cup \overline{\Gamma_1} \cup \Gamma_2 \cup \overline{\Gamma_2})$$

и рассмотрим разность

$$f_{pot}^{\pm}(z_1) - f_{pot}^{\pm}(z_0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{(\sqrt{(t-z_0)(t-\bar z_0)}\,)^{\mp}}\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{\Gamma_1}} \frac{f(t)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{\Gamma_1}} \frac{f(t)}{(\sqrt{(t-z_0)(t-\bar z_0)}\,)^{\mp}}\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{f(t)\big((\sqrt{(t-z_0)(t-\bar z_0)}\,)^{\mp} - \sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}\,\big)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}\,(\sqrt{(t-z_0)(t-\bar z_0)}\,)^{\mp}}\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{\Gamma_2}} \frac{f(t)\big((\sqrt{(t-z_0)(t-\bar z_0)}\,)^{\mp} - \sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}\,\big)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}\,(\sqrt{(t-z_0)(t-\bar z_0)}\,)^{\mp}}\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_3} \frac{f(t)\big((\sqrt{(t-z_0)(t-\bar z_0)}\,)^{\mp} - \sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}\,\big)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}\,(\sqrt{(t-z_0)(t-\bar z_0)}\,)^{\mp}}\,dt =: \sum_{j=1}^{7} I_j\,. \quad (3.27)$$

Используя неравенство Гельдера, а также неравенства $|t-\bar z_1| \geq$ $\geq |\operatorname{Im} z_1| \geq |\operatorname{Im} z_0|/2$ и $|t-z_1| \geq |t-z_2|/2$, которые выполняются при всех $t \in \Gamma_1$, получаем

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi}\Big(\int\limits_{\Gamma_1} |f(t)|^p\,|dt|\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_{\Gamma_1} \frac{|dt|}{|\sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}|^q}\Big)^{1/q} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\,\|f\|_{L_p}\,\frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_1|}}\Big(\int\limits_{\Gamma_1} \frac{|dt|}{|t-z_1|^{q/2}}\Big)^{1/q} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\,\|f\|_{L_p}\,\frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}}\Big(\int\limits_{\Gamma_1} \frac{|dt|}{|t-z_2|^{q/2}}\Big)^{1/q}.$$

Далее интеграл оценивается сверху сначала соответствующим интегралом Римана – Стилтьеса по аналогии с оценкой (3.25), а затем аналогично оценке (3.26) — верхним интегралом Дарбу. В результате получаем соотношения

$$|I_1| \leq c\|f\|_{L_p}\,\frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}}\,\big(d(z_0,z_2)+\varepsilon\big)^{\frac{2-q}{2q}} =$$

$$= c\|f\|_{L_p}\,\frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}}\,\big(d(z_0,z_2)+\varepsilon\big)^{\frac{p-2}{2p}},$$

где постоянная c зависит только от кривой γ.

Интегралы I_2, I_3, I_4 оцениваются аналогично интегралу I_1.

При оценке интегралов I_5, I_6, I_7 используется оценка

$$\begin{aligned}
&\left|\sqrt{(t-z_0)(t-\bar z_0)}-\sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}\,\right| \le \\
&\le\; c\,\sqrt{|(t-z_0)(t-\bar z_0)-(t-z_1)(t-\bar z_1)|} = \\
&=\; c\,\sqrt{|(t-z_1)(\bar z_0-\bar z_1)+(t-\bar z_0)(z_0-z_1)|} \le \\
&\le\; c\,\sqrt{\varepsilon\,(|t-z_1|+|t-\bar z_0|)},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

которая выполняется для всех $t\in\partial D_z^{\pm}\setminus(\Gamma_1\cup\overline{\Gamma_1})$ с некоторой абсолютной постоянной c.

Оценим модуль интеграла I_5. Используя неравенство Гельдера и оценку (3.28), получаем

$$\begin{aligned}
|I_5| &\le \frac{1}{2\pi}\Bigg(\int\limits_{\Gamma_2}|f(t)|^p\,|dt|\Bigg)^{1/p}\times \\
&\times\Bigg(\int\limits_{\Gamma_2}\frac{|\sqrt{(t-z_0)(t-\bar z_0)}-\sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}|^q}{|\sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}\sqrt{(t-z_0)(t-\bar z_0)}|^q}\,|dt|\Bigg)^{1/q} \le \\
&\le\; c\,\|f\|_{L_p}\Bigg(\int\limits_{\Gamma_2}\bigg(\frac{\sqrt{\varepsilon\,(|t-z_1|+|t-\bar z_0|)}}{\sqrt{|t-z_1||t-\bar z_1||t-z_0||t-\bar z_0|}}\bigg)^q\,|dt|\Bigg)^{1/q};
\end{aligned} \tag{3.29}$$

здесь и далее при оценке интегралов I_5, I_7 через c обозначены постоянные, значения которых зависят только от кривой γ, но, вообще говоря, различны даже в пределах одной цепочки неравенств. Теперь, учитывая неравенства $|t-\bar z_1|\ge|\operatorname{Im} z_1|\ge|\operatorname{Im} z_0|/2$, $|\operatorname{Im} z_0|\le|t-\bar z_0|\le 3\,|\operatorname{Im} z_0|$ и $|t-z_0|/2\le|t-z_1|\le 3\,|\operatorname{Im} z_0|/2$, которые выполняются при всех $t\in\Gamma_2$, и выполняя оценки, аналогичные оценкам (3.25) и (3.26), из неравенства (3.29) получаем соотношения

$$\begin{aligned}
|I_5| &\le c\,\|f\|_{L_p}\sqrt{\varepsilon}\Bigg(\int\limits_{\Gamma_2}\Bigg(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}|\operatorname{Im} z_0|+3|\operatorname{Im} z_0|}}{\sqrt{\frac{1}{2}|t-z_0|\,\frac{1}{2}|\operatorname{Im} z_0|\,|t-z_0|\,|\operatorname{Im} z_0|}}\Bigg)^q\,|dt|\Bigg)^{1/q} \le \\
&\le\; c\,\|f\|_{L_p}\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}}\Bigg(\int\limits_{\Gamma_2}\frac{|dt|}{|t-z_0|^q}\Bigg)^{1/q} \le
\end{aligned}$$

$$\leq c\,\|f\|_{L_p}\,\frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{1-q}{q}} = c\,\|f\|_{L_p}\,\frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}}\,\varepsilon^{\frac{p-2}{2p}}\,.$$

Интеграл I_6 оценивается аналогично интегралу I_5.

Оценим, наконец, модуль интеграла I_7. Аналогично оценке (3.29) получим неравенство

$$|I_7| \leq c\,\|f\|_{L_p}\left(\int\limits_{\Gamma_3}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon\,(|t-z_1|+|t-\bar{z}_0|)}}{\sqrt{|t-z_1||t-\bar{z}_1||t-z_0||t-\bar{z}_0|}}\right)^q |dt|\right)^{1/q}. \quad (3.30)$$

Далее, учитывая соотношения $|t-z_0|/2 \leq |t-z_1| \leq 3\,|t-z_0|/2$, $|t-z_0|/3 \leq |t-\bar{z}_0| \leq 3\,|t-z_0|$ и $|t-z_0|/6 \leq |t-\bar{z}_0|/2 \leq |t-\bar{z}_1| \leq 3\,|t-\bar{z}_0|/2 \leq$ $\leq 9\,|t-z_0|/2$, справедливые при всех $t \in \Gamma_3$, и выполняя оценки, аналогичные оценкам (3.25), (3.26), оценим правую часть неравенства (3.30) так, что будем иметь

$$|I_7| \leq c\,\|f\|_{L_p}\sqrt{\varepsilon}\left(\int\limits_{\Gamma_3}\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}|t-z_0|+3|t-z_0|}}{\sqrt{\frac{1}{2}|t-z_0|\;\frac{1}{6}|t-z_0|\;|t-z_0|\;\frac{1}{3}|t-z_0|}}\right)^q |dt|\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq c\,\|f\|_{L_p}\,\sqrt{\varepsilon}\left(\int\limits_{\Gamma_3}\frac{|dt|}{|t-z_0|^{3q/2}}\right)^{1/q} \leq c\,\|f\|_{L_p}\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{|\operatorname{Im} z_0|^{\frac{3}{2}-\frac{1}{q}}}\,.$$

Теперь, учитывая то, что $\varepsilon < |\operatorname{Im} z_0|$, окончательно получаем

$$|I_7| \leq c\,\|f\|_{L_p}\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{|\operatorname{Im} z_0|^{\frac{3}{2}-\frac{1}{q}}} = c\,\|f\|_{L_p}\,\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}{|\operatorname{Im} z_0|^{1/2}}\frac{\varepsilon^{1/p}}{|\operatorname{Im} z_0|^{1/p}} \leq$$

$$\leq c\,\|f\|_{L_p}\,\frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}}\,\varepsilon^{\frac{p-2}{2p}}\,.$$

Итак, из полученных оценок интегралов I_j, где $j = 1, 2, \ldots, 7$, следует существование непрерывного продолжения функции $f_{pot}^{\pm}$ в точки множества $\partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1, b_2\}$ и равенство (3.17) для ее предельных значений в случае $2 < p < \infty$. Аналогично доказывается неравенство (3.18) при $2 < p < \infty$.

В случае $p = \infty$ существование непрерывного продолжения функции $f_{pot}^{\pm}$ в точки множества $\partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1, b_2\}$, равенство (3.17) и неравенство (3.18) доказываются с помощью тех же рассуждений, что и при $2 < p < \infty$, с единственным очевидным упрощением: в этом случае нет необходимости при оценке интегралов I_j, где $j = 1, 2, \ldots, 7$, использовать неравенство Гельдера.

Перейдем теперь к доказательству равенства (3.22) (заметим, что равенство (3.23) доказывается аналогично).

Рассмотрим точку $z \in D_z^+$ такую, что $\operatorname{Im} z \neq 0$ и $\delta := |z - b_j| < (b_2 - b_1)/10$. Обозначим $\rho := \min\limits_{t\in\gamma} |t - z|$ и зафиксируем произвольную точку $\xi \in E_f$, удовлетворяющую неравенству $|\xi - z| \le 5\rho/4$. Обозначим также $\gamma_{6\delta}(b_j) := \{t \in \partial D_z^+ : |t - b_j| \le 6\delta\}$ и рассмотрим разность

$$f^+_{pot}(z) - f(b_j) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_z^+} \frac{f(t) - f(b_j)}{t - b_j}\, dt = f(\xi) - f(b_j) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_z^+} \frac{f(t) - f(\xi)}{\sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}}\, dt - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_z^+} \frac{f(t) - f(b_j)}{t - b_j}\, dt =$$

$$= f(\xi) - f(b_j) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{6\delta}(b_j)} \frac{f(t) - f(\xi)}{\sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}}\, dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{6\delta}(b_j)} \frac{f(t) - f(b_j)}{t - b_j}\, dt - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_z^+ \setminus \gamma_{6\delta}(b_j)} \frac{f(\xi) - f(b_j)}{t - b_j}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j}) \setminus \gamma_{6\delta}(b_j)} \frac{(f(t) - f(\xi))(t - b_j - \sqrt{(t - z)(t - \bar{z})})}{(t - b_j)\sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_z^+ \setminus (\gamma_{6\delta}(b_j) \cup \gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j})} \frac{(f(t) - f(\xi))(t - b_j - \sqrt{(t - z)(t - \bar{z})})}{(t - b_j)\sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}}\, dt =:$$

$$=: f(\xi) - f(b_j) + I_8 - I_9 - I_{10} + I_{11} + I_{12}. \tag{3.31}$$

Для интеграла I_{10} в силу теоремы 1 из [2] справедлива оценка

$$|I_{10}| \le |f(\xi) - f(b_j)|\,.$$

При оценке интеграла I_{12} используются двойные неравенства $5\,|t - b_j|/6 \le |t - z| \le 7\,|t - b_j|/6$ и $5\,|t - b_j|/6 \le |t - \bar{z}| \le 7\,|t - b_j|/6$, а также неравенство

$$\left|\, t - b_j - \sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}\, \right| \le c\, \sqrt{\delta\, (|t - z| + |t - b_j|)}$$

(здесь c — некоторая абсолютная постоянная), которые выполняются при всех $t \in \partial D_z^+ \setminus (\gamma_{6\delta}(b_j) \cup \gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j})$. С учетом этих неравенств по аналогии с оценками (3.25), (3.26) получаем

$$|I_{12}| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial D_z^+ \setminus (\gamma_{6\delta}(b_j) \cup \gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j})} \frac{|f(t)-f(\xi)||t-b_j-\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}|}{|t-b_j|\sqrt{|t-z||t-\bar{z}|}}\,|dt| \leq$$

$$\leq\ c \int\limits_{E_f \setminus (\gamma_{6\delta}(b_j) \cup \gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j})} \frac{|f(t)-f(\xi)|\sqrt{\ \delta\ (\frac{7}{6}|t-b_j|+|t-b_j|)}}{|t-b_j|\sqrt{\ \frac{5}{6}|t-b_j|\ \frac{5}{6}|t-b_j|}}\,|dt| \leq$$

$$\leq\ c\,\sqrt{\delta} \int\limits_{E_f \setminus (\gamma_{6\delta}(b_j) \cup \gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j})} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{|t-b_j|^{3/2}}\,|dt| \leq$$

$$\leq\ c\,\sqrt{\delta} \int\limits_{6\delta}^{d} \frac{\omega_{E_f, b_j}(f,\tau)}{\tau^{3/2}}\,d\theta_{b_j}(\tau) \leq\ c\,\sqrt{\delta} \int\limits_{6\delta}^{2d} \frac{\omega_{E_f, b_j}(f,\tau)}{\tau^{3/2}}\,d\tau\,;$$

здесь и далее в доказательстве через c обозначены постоянные, значения которых не зависят от δ и z, но, вообще говоря, различны даже в пределах одной цепочки неравенств.

Если $(\gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j}) \setminus \gamma_{6\delta}(b_j) = \varnothing$, то $I_4 = 0$. В случае, когда $(\gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j}) \setminus \setminus \gamma_{6\delta}(b_j) \neq \varnothing$, при оценке модуля интеграла I_{11} используются двойные неравенства $4\,|t-\xi|/5 \leq |t-z| \leq 4\,|t-\xi|/3$, $4\,|t-\xi|/5 \leq |t-\bar{z}| \leq 4\,|t-\xi|/3$ и $8\,|t-\xi|/11 \leq |t-b_j| \leq 8\,|t-\xi|/5$, которые выполняются при всех $t \in \partial D{+}_z \setminus \gamma_{6\delta}(b_j)$. С учетом этих неравенств по аналогии с оценками (3.25), (3.26) получаем

$$|I_{11}| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(\gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j}) \setminus \gamma_{6\delta}(b_j)} \frac{|f(t)-f(\xi)|\left(|t-b_j|+|\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}|\right)}{|t-b_j|\sqrt{|t-z||t-\bar{z}|}}\,|dt| \leq$$

$$\leq c \int\limits_{E_f \cap ((\gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j}) \setminus \gamma_{6\delta}(b_j))} \frac{|f(t)-f(\xi)|\left(\frac{8}{5}|t-\xi|+\sqrt{\ \frac{4}{3}|t-\xi|\ \frac{4}{3}|t-\xi|}\right)}{\frac{8}{11}|t-\xi|\ \sqrt{\ \frac{4}{5}|t-\xi|\ \frac{4}{5}|t-\xi|}}\,|dt| \leq$$

$$\leq\ c \int\limits_{E_f \cap ((\gamma_{\xi b_j} \cup \gamma_{\bar{\xi} b_j}) \setminus \gamma_{6\delta}(b_j))} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{|t-\xi|}\,|dt| \leq$$

$$\leq\ c \int\limits_{3\delta}^{3\delta+d(\xi,b_j)} \frac{\omega_{E_f,\xi}(f,\tau)}{\tau}\, d\theta_{b_j}(\tau) \leq\ c \int\limits_{3\delta}^{6\delta+2d(\xi,b_j)} \frac{\omega_{E_f,\xi}(f,\tau)}{\tau}\, d\tau.$$

Оценим теперь модуль интеграла I_8.

Если $\rho \geq \delta/4$, то

$$|I_8| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_{6\delta}(b_j)} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{\sqrt{|t-z||t-\bar{z}|}}\, |dt| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{E_f\cap\gamma_{6\delta}(b_j)} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{\sqrt{\frac{\delta}{4}\ \frac{\delta}{4}}}\, |dt| \leq$$

$$\leq \frac{4\theta_{b_j}(6\delta)}{\pi\delta}\ \omega_{E_f,b_j}(f,6\delta) \leq\ c\ \omega_{E_f,b_j}(f,6\delta)\,.$$

В случае, когда $|\operatorname{Im}\xi|/6 \leq \rho < \delta/4$, введем в рассмотрение множества $\gamma_1 := \{t\in\partial D_z^+ : |t-\xi| \leq 18\rho,\ \operatorname{Im} t\, \operatorname{Im}\xi > 0\}$, $\overline{\gamma_1} := \{\bar{t} : t\in\gamma_1\}$, $\gamma_2 := \gamma_{6\delta}(b_j)\setminus(\gamma_1\cup\overline{\gamma_1})$ и представим I_8 в виде суммы трех интегралов:

$$I_8 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(t)-f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{\gamma_1}} \frac{f(t)-f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2} \frac{f(t)-f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt =: I_8' + I_8'' + I_8'''.$$

Оценивая модуль интеграла I_8' и учитывая при этом неравенство $|t-b_j| < 6\delta$ для всех $t\in\gamma_1$, получаем

$$|I_8'| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_1} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{\sqrt{|t-z||t-\bar{z}|}}\, |dt| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_f\cap\gamma_1} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{\sqrt{\rho\ \rho}}\, |dt| \leq$$

$$\leq \frac{\theta_\xi(18\rho)}{\pi\rho}\ \omega_{E_f,b_j}(f,6\delta) \leq\ c\ \omega_{E_f,b_j}(f,6\delta)\,.$$

Такая же оценка имеет место и для интеграла I_8''.

С учетом того, что при $t\in\gamma_2$ выполняются неравенства $|t-z| \geq 67\,|t-\xi|/72$ и $|t-\bar{z}| \geq |t-\xi|/8$, оценим модуль интеграла I_8''' по аналогии с оценками (3.25), (3.26):

$$|I_8'''| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_2} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{\sqrt{|t-z||t-\bar{z}|}}\, |dt| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_f\cap\gamma_2} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{\sqrt{\frac{67}{72}|t-\xi|\ \frac{1}{8}|t-\xi|}}\, |dt| \leq$$

$$\le \frac{12}{\pi\sqrt{67}} \int\limits_{18\rho}^{10|\xi-b_j|} \frac{\omega_{E_f\cap\gamma_2,\xi}(f,\tau)}{\tau}\, d\theta_\xi(\tau) \le\ c \int\limits_{18\rho}^{20|\xi-b_j|} \frac{\omega_{E_f\cap\gamma_2,\xi}(f,\tau)}{\tau}\, d\tau \le$$

$$\le\ c\left(\omega_{E_f,b_j}(f,6\delta) + \int\limits_{|\operatorname{Im}\xi|}^{|\xi-b_j|} \frac{\omega_{E_f,\xi}(f,\tau)}{\tau}\, d\tau\right).$$

Наконец, в случае, когда $\rho < |\operatorname{Im}\xi|/6$, введем в рассмотрение множества

$$\gamma_3 := \{t \in \partial D_z^+ : |t-\xi| \le 2\rho,\ \operatorname{Im} t\, \operatorname{Im}\xi > 0\}, \quad \overline{\gamma_3} := \{\bar{t} : t \in \gamma_3\},$$

$$\gamma_4 := \{t \in \partial D_z^+ : 2\rho < |t-\xi| \le 3|\operatorname{Im}\xi|,\ \operatorname{Im} t\, \operatorname{Im}\xi > 0\},\ \ \overline{\gamma_4} := \{\bar{t} : t \in \gamma_4\},$$

$$\gamma_5 := \gamma_{6\delta}(b_j) \setminus (\gamma_3 \cup \overline{\gamma_3} \cup \gamma_4 \cup \overline{\gamma_4})$$

и представим I_8 в виде суммы пяти интегралов:

$$I_8 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_3} \frac{f(t)-f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{\gamma_3}} \frac{f(t)-f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_4} \frac{f(t)-f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{\gamma_4}} \frac{f(t)-f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_5} \frac{f(t)-f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt =: I_8^I + I_8^{II} + I_8^{III} + I_8^{IV} + I_8^V.$$

Интегралы I_8^I, I_8^{II} оцениваются аналогично интегралу I_8'.

Поскольку при всех $t \in \gamma_5$ выполняются неравенства $|t-z| \ge \ge 3\,|t-\xi|/8$ и $|t-\bar{z}| \ge |t-\xi|/8$, то интеграл I_8^V оценивается таким же способом, как и интеграл I_8'''.

При оценке интеграла I_8^{III} используются неравенства $|t-\bar{z}| \ge \ge |\operatorname{Im} z| \ge 19\,|\operatorname{Im}\xi|/24$ и $|t-z| \ge 3\,|t-\xi|/8$, которые выполняются при всех $t \in \gamma_4$. Учитывая эти неравенства, по аналогии с оценками (3.25), (3.26) получаем

$$|I_8^{III}| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_4} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{\sqrt{|t-z||t-\bar{z}|}}\, |dt| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_f\cap\gamma_4} \frac{|f(t)-f(\xi)|}{\sqrt{\frac{19}{24}|\operatorname{Im}\xi|\ \frac{3}{8}|t-\xi|}}\, |dt| \le$$

$$\leq \frac{8}{\pi\sqrt{19}\sqrt{|\operatorname{Im}\xi|}}\ \omega_{E_f,b_j}(f,6\delta)\int\limits_{2\rho}^{3|\operatorname{Im}\xi|}\frac{d\theta_\xi(\tau)}{\sqrt{\tau}}\leq$$

$$\leq\ c\ \frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im}\xi|}}\ \omega_{E_f,b_j}(f,6\delta)\int\limits_{\rho}^{3|\operatorname{Im}\xi|}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\leq\ c\ \omega_{E_f,b_j}(f,6\delta).$$

Для интеграла I_8^{IV} имеет место такая же оценка, как и для интеграла I_8^{III}.

Из полученных оценок интегралов I_8, I_{10}, I_{11}, I_{12} и равенства (3.31) следует неравенство

$$\left|f^+_{pot}(z)-f(b_j)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z^+}\frac{f(t)-f(b_j)}{t-b_j}\,dt\right|\leq$$

$$\leq\ c\ \Bigg(\ \omega_{b_j}(f,E_f,6\delta)+\left|\int\limits_{\gamma_{6\delta}(b_j)}\frac{f(t)-f(b_j)}{t-b_j}\,dt\right|+$$

$$+\ \sqrt{\delta}\int\limits_{6\delta}^{2d}\frac{\omega_{E_f,b_j}(f,\tau)}{\tau^{3/2}}\,d\tau+\int\limits_{|\operatorname{Im}\xi|}^{6\delta+2d(\xi,b_j)}\frac{\omega_{E_f,\xi}(f,\tau)}{\tau}\,d\tau\ \Bigg), \tag{3.32}$$

которое установлено в предположении, что $\operatorname{Im} z\neq 0$. Заметим, что при условии $\operatorname{Im} z=0$ неравенство (3.32) устанавливается аналогично. Поскольку правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\delta\to 0$, то его следствием является равенство (3.22) и доказательство теоремы завершено.

Жорданову спрямляемую кривую называют *k-кривой*, если отношение не большей из длин ее дуг, которые стягиваются произвольной хордой, к длине этой хорды ограничено числом k. Будем также называть такую кривую *k-кривой типа "дуга-хорда"*.

Следуя [12], рассмотрим жорданову спрямляемую кривую, у которой отношение $d(z_1,z_2)/|z_1-z_2|$ ограничено числом k при любом выборе точек z_1,z_2 этой кривой. Кривые, удовлетворяющие такому условию, назовем *k-кривыми типа "диаметр-хорда"*.

Очевидно, что в классе k-кривых типа "диаметр-хорда" содержатся все k-кривые типа "дуга-хорда". С другой стороны, легко строятся примеры k-кривых типа "диаметр-хорда", которые не являются k-кривыми типа "дуга-хорда".

Заметим, что в случае, когда γ является k-кривой типа "диаметр-хорда", оценка (3.18) очевидным образом упрощается, а условие (3.21) теоремы 3.8 можно заменить более слабым условием

$$\int\limits_{|\operatorname{Im} z|}^{|z-b_j|} \frac{\omega_{E_f,z}(f,\tau)}{\tau}\, d\tau \to 0, \qquad z \to b_j,\ z \in E_f. \tag{3.33}$$

Опишем области более общего вида, для которых можно сделать аналогичные уточнения в теореме 3.8.

Область G назовем *k-областью*, если любые две точки ее замыкания $\overline{G}$ можно соединить k-кривой типа "диаметр-хорда" с фиксированным значением k, и при этом все точки указанной кривой, за исключением, быть может, концов, принадлежат области G. Ранее в работе [101] рассматривалось замкнутое множество, любые две точки которого можно соединить k-кривой типа "дуга-хорда", проходящей через точки этого множества.

Заметим, что область, ограниченная k-кривой типа "диаметр-хорда", является k-областью, однако, граница k-области может не быть k-кривой типа "диаметр-хорда". При этом граница k-области G может, в частности, образовывать нулевые углы, направленные своими вершинами в сторону дополнения к замыканию области G.

В случае, когда кривая γ ограничивает область, пересечение которой с полуплоскостью $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ является k-областью, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.9. *Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая, симметричная относительно действительной оси и удовлетворяющая условию* (3.16), *а область $\{z \in D_z^+ : \operatorname{Im} z > 0\}$ (или $\{z \in D_z^- : \operatorname{Im} z > 0\}$) при этом является k-областью. Если $f \in L_p(\gamma)$, $2 < p \le \infty$, то непрерывное продолжение функции f_{pot}^+ (или, соответственно, f_{pot}^-) в каждой точке $z_0 \in \gamma \setminus \{b_1, b_2\}$ при любом $z_1 \in \gamma$ таком, что $|z_1 - z_0| \le |\operatorname{Im} z_0|/(2k)$, удовлетворяет неравенству*

$$|f_{pot}^{\pm}(z_1) - f_{pot}^{\pm}(z_0)| \le c\, \|f\|_{L_p} \frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}}\, \omega(|z_1 - z_0|), \tag{3.34}$$

где $\omega(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{p-2}{2p}}$ при $2 < p < \infty$ и $\omega(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\, \ln\frac{1}{\varepsilon}$ при $p = \infty$, а постоянная c зависит только от кривой γ.

Если, кроме того, функция f *в точке* b_j, *где* $j = 1$ *или* $j = 2$, *имеет предел* (3.19) *и существует сингулярный интеграл* (3.20), *а также выполняется асимптотическое соотношение* (3.33), *то функция* f^+_{pot} (*или соответственно* f^-_{pot}) *непрерывно продолжается из области* D^+_z (*соответственно, из области* D^-_z) *также в точку* b_j *и при этом имеет место равенство* (3.22) (*или соответственно* (3.23)).

Доказательство. Пусть $z_0 \in \partial D^\pm_z \setminus \{b_1, b_2\}$, а точка $z_1 \in \partial D^\pm_z$ такая, что $\varepsilon := |z_1 - z_0| \le |\operatorname{Im} z_0|/(2k)$. Представим приращение функции $f^\pm_{pot}$ в точке z_0 равенством (3.27), в котором

$$\Gamma_1 := \{t \in \partial D^\pm_z : |t - z_0| \le 2k\varepsilon\}, \qquad \overline{\Gamma_1} := \{\bar t : t \in \Gamma_1\},$$
$$\Gamma_2 := \{t \in \partial D^\pm_z : 2k\varepsilon < |t - z_0| \le |\operatorname{Im} z_0|\}, \quad \overline{\Gamma_2} := \{\bar t : t \in \Gamma_2\},$$
$$\Gamma_3 := \partial D^\pm_z \setminus (\Gamma_1 \cup \overline{\Gamma_1} \cup \Gamma_2 \cup \overline{\Gamma_2}),$$

а вместо выражения $\sqrt{(t - z_1)(t - \bar z_1)}$ содержатся предельные значення $(\sqrt{(t - z_1)(t - \bar z_1)}\,)^\mp$.

Отметим, что из предположение о том, что область $\{z \in D^\pm_z : \operatorname{Im} z > 0\}$ является k-областью, следует неравенство

$$\begin{gathered}\bigl|(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar z_0)}\,)^\mp - (\sqrt{(t - z_1)(t - \bar z_1)}\,)^\mp\bigr| \le \\ \le c\,\sqrt{\varepsilon\,(|t - z_1| + |t - \bar z_0|)} \\ \forall\, t \in \{\tau \in \partial D^\pm_z \,:\, |\tau - z_0| > 2k\varepsilon,\ |\tau - \bar z_0| > 2k\varepsilon\},\end{gathered} \tag{3.35}$$

в котором c — некоторая абсолютная постоянная. Действительно, соединим точки z_0 и z_1 k-кривой $\Gamma_{z_0z_1}$, все точки которой, за исключением концов, принадлежат области $D^\pm_z$, и обозначим $\overline{\Gamma}_{z_0z_1} := \{\bar z \,:\, z \in \Gamma_{z_0z_1}\}$. В случае $\Gamma^\gamma_{z_0\bar z_0} \subset \Gamma^\gamma_{z_1\bar z_1}$ заменим разрез $\Gamma^\gamma_{z_1\bar z_1}$ разрезом плоскости $\mathbb{C}$ вдоль кривой $\Gamma_{z_0z_1} \cup \Gamma^\gamma_{z_0\bar z_0} \cup \overline{\Gamma}_{z_0z_1}$, не меняя значений функции $(\sqrt{(t - z_1)(t - \bar z_1)}\,)^\mp$ при $t \in \partial D^\pm_z$. Аналогично в случае $\Gamma^\gamma_{z_1\bar z_1} \subset \Gamma^\gamma_{z_0\bar z_0}$ заменим разрез $\Gamma^\gamma_{z_0\bar z_0}$ разрезом плоскости $\mathbb{C}$ вдоль кривой $\Gamma_{z_0z_1} \cup \Gamma^\gamma_{z_1\bar z_1} \cup \overline{\Gamma}_{z_0z_1}$, не меняя значений функции $(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar z_0)}\,)^\mp$ при $t \in \partial D^\pm_z$. Теперь в обоих случаях неравенство (3.35) следует из того, что точки множества $\{\tau \in \partial D^\pm_z \,:\, |\tau - z_0| > 2k\varepsilon,\ |\tau - \bar z_0| > 2k\varepsilon\}$ удалены от кривых $\Gamma_{z_0z_1}$ и $\overline{\Gamma}_{z_0z_1}$ на расстояние, не меньшее чем $k\varepsilon$.

Далее, с учетом оценки (3.35) неравенство (3.34) устанавливается аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 3.8.

Для доказательства равенства (3.22) рассмотрим точку $z \in D^+_z$ такую, что $\operatorname{Im} z \ne 0$ и $\delta := |z - b_j| < (b_2 - b_1)/(10k)$. Как и при доказательстве теоремы 3.8, обозначим $\rho := \min\limits_{t \in \gamma} |t - z|$ и зафиксируем произвольную точку $\xi \in E_f$, удовлетворяющую неравенству $|\xi - z| \le 5\rho/4$.

Обозначим также $\gamma_{6k\delta}(b_j) := \{t \in \partial D_z^+ : |t-b_j| \le 6k\delta\}$ и рассмотрим разность

$$f_{pot}^+(z) - f(b_j) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z^+} \frac{f(t)-f(b_j)}{t-b_j}\,dt =$$

$$= f(\xi) - f(b_j) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{6k\delta}(b_j)} \frac{f(t)-f(\xi)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{6k\delta}(b_j)} \frac{f(t)-f(b_j)}{t-b_j}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z^+\setminus\gamma_{6k\delta}(b_j)} \frac{f(\xi)-f(b_j)}{t-b_j}\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z^+\setminus\gamma_{6k\delta}(b_j)} \frac{(f(t)-f(\xi))(t-b_j-\sqrt{(t-z)(t-\bar z)})}{(t-b_j)\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt =:$$

$$=: f(\xi) - f(b_j) + I_{13} - I_{14} - I_{15} + I_{16}.$$

При условии, что область $\{z \in D_z^\pm : \operatorname{Im} z > 0\}$ является k-областью, аналогично оценке (3.35) для всех $t \in \partial D_z^+ \setminus \gamma_{6k\delta}(b_j)$ устанавливается неравенство

$$\left| t - b_j - \sqrt{(t-z)(t-\bar z)} \right| \le c\,\sqrt{\delta\,(|t-z| + |t-b_j|)}\,,$$

где c — некоторая абсолютная постоянная.

Теперь интегралы I_{13}, I_{15}, I_{16} оцениваются подобно тому, как при доказательстве теоремы 3.8 оценены соответственно интегралы I_8, I_{10}, I_{12}. Следствием указанных оценок является равенство (3.22). Поскольку равенство (3.23) доказывается аналогично, то доказательство теоремы завершено.

Отметим некоторые условия, достаточные для выполнения асимптотического соотношения (3.33). В частности, соотношение (3.33) выполняется, если функция f непрерывна на кривой γ и ее модуль непрерывности

$$\omega_\gamma(f,\varepsilon) := \sup_{t_1,t_2\in\gamma,\ |t_1-t_2|\le\varepsilon} |f(t_1) - f(t_2)|$$

удовлетворяет условию Дини

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega_\gamma(f,\tau)}{\tau}\,d\tau < \infty\,.$$

Асимптотическое соотношение (3.33) также выполняется при более слабом предположении о том, что локальный центрированный относительно точки b_j модуль непрерывности функции f удовлетворяет условию

$$\omega_{E_f,b_j}\bigl(f, 2|z-b_j|\bigr) = o\biggl(\Bigl(\ln\frac{|z-b_j|}{|\operatorname{Im} z|}\Bigr)^{-1}\biggr), \qquad z \to b_j\,,\ z \in E_f. \quad (3.36)$$

Если при этом кривая γ такая, что на ней функция $l(z) := \ln\frac{|z-b_j|}{|\operatorname{Im} z|}$ ограничена в некоторой окрестности точки b_j, то условие (3.36) является следствием существования предела (3.19). Заметим, что функция $l(z)$ ограничена на кривой γ в указанной окрестности точки b_j, по крайней мере, в случае, когда кривая γ имеет в точке b_j односторонние касательные, угол между которыми не равен нулю.

17.2. Граничные свойства функции тока Стокса. В следующих теоремах 3.10, 3.11 приведены достаточные условия непрерывной продолжимости функции

$$f_{fl}^{\pm}(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\partial D_z^{\pm}} f(t)\Biggl(1-\dfrac{t-\operatorname{Re} z}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\Biggr)dt & \text{при } \operatorname{Im} z \neq 0, \\ 0 & \text{при } \operatorname{Im} z = 0,\ z < b_2, \\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int\limits_{\partial D_z^{-}} f(t)\,dt & \text{при } \operatorname{Im} z = 0,\ z > b_2 \end{cases}$$

из области $D_z^{\pm}$ на границу $\partial D_z^{\pm}$.

Теорема 3.10. *Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая, симметричная относительно действительной оси и удовлетворяющая условию* (3.16). *Если $f \in L_p(\gamma)$, $2 < p \le \infty$, то функция $f_{fl}^{\pm}$ непрерывно продолжается из области $D_z^{\pm}$ на границу $\partial D_z^{\pm}$ и ее предельные значения $f_{fl}^{\pm}(z)$ при $z \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1, b_2\}$ выражаются формулой*

$$f_{fl}^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z^{\pm}} f(t)\biggl(1-\frac{t-\operatorname{Re} z}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)})^{\mp}}\biggr)dt\,. \quad (3.37)$$

При этом:

1) для каждой точки $z_0 \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1, b_2\}$ и любой точки $z_1 \in \partial D_z^{\pm}$, для которой $|z_1 - z_0| \le |\operatorname{Im} z_0|/2$, выполняется неравенство

$$|f_{fl}^{\pm}(z_1) - f_{fl}^{\pm}(z_0)| \le \ c\,\|f\|_{L_p}\,\Omega(z_0, z_1), \quad (3.38)$$

где $\Omega(z_0,z_1)=(d(z_0,z_1))^{\frac{p-2}{2p}}$ *при* $2<p<\infty$ *и* $\Omega(z_0,z_1)=\sqrt{d(z_0,z_1)}+$ $+\sqrt{|z_1-z_0|}\,\ln\frac{1}{|z_1-z_0|}$ *при* $p=\infty$, *а постоянная* c *зависит только от кривой* γ;

2) для всех $z\in\partial D_z^{\pm}$ *таких, что* $|z-b_j|<(b_2-b_1)/3$ *при* $j=1$ *или* $j=2$, *выполняется неравенство*

$$|f_{fl}^{\pm}(z)-f_{fl}^{\pm}(b_j)|\le\ c\,\|f\|_{L_p}\,\big(\omega_1(|z-b_j|)+d(z,b_j)\big), \tag{3.39}$$

где $\omega_1(\delta):=\delta^{\frac{p-1}{p}}$ *при* $2<p<\infty$ *и* $\omega_1(\delta):=\delta\,\ln\frac{1}{\delta}$ *при* $p=\infty$, *а постоянная* c *зависит только от кривой* γ.

Доказательство. Существование интеграла (3.37) во всех точках $z\in\partial D_z^{\pm}\setminus\{b_1,b_2\}$ устанавливается аналогично тому, как при доказательстве теоремы 3.8 установлено существование в тех же точках интеграла (3.17).

Для доказательства непрерывной продолжимости функции $f_{fl}^{\pm}$ в точки множества $\partial D_z^{\pm}\setminus\{b_1,b_2\}$ рассмотрим точку $z_0\in\partial D_z^{\pm}\setminus\{b_1,b_2\}$ и точку $z_1\in D_z^{\pm}$ такую, что $\varepsilon:=|z_1-z_0|\le|\operatorname{Im}z_0|/2$. Обозначим через z_2 одну из ближайших к точке z_1 точек границы $\partial D_z^{\pm}$. Введем в рассмотрение множества

$$\Gamma_1:=\{t\in\partial D_z^{\pm}:|t-z_0|\le2\varepsilon\}\cup\{t\in\gamma_{z_0z_2}:|t-z_0|\le|\operatorname{Im}z_0|\},$$

$$\overline{\Gamma_1}:=\{\bar t:t\in\Gamma_1\},\qquad \Gamma_1':=\gamma_{z_0z_2}\setminus\Gamma_1,\qquad \Gamma_1'':=\gamma_{\bar z_0\bar z_2}\setminus\overline{\Gamma_1},$$

$$\Gamma_2:=\{t\in\partial D_z^{\pm}:|t-z_0|\le|\operatorname{Im}z_0|\}\setminus\Gamma_1,\quad \overline{\Gamma_2}:=\{\bar t:t\in\Gamma_2\},$$

$$\Gamma_3:=\partial D_z^{\pm}\setminus(\Gamma_1\cup\overline{\Gamma_1}\cup\Gamma_1'\cup\Gamma_1''\cup\Gamma_2\cup\overline{\Gamma_2})$$

и рассмотрим выражение

$$2\pi i\,\Big(f_{fl}^{\pm}(z_1)-f_{fl}^{\pm}(z_0)\Big)=$$

$$=\int\limits_{\Gamma_1}\frac{f(t)(t-\operatorname{Re}z_0)}{(\sqrt{(t-z_0)(t-\bar z_0)}\,)^{\mp}}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{f(t)(t-\operatorname{Re}z_1)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}}\,dt+$$

$$+\int\limits_{\overline{\Gamma_1}}\frac{f(t)(t-\operatorname{Re}z_0)}{(\sqrt{(t-z_0)(t-\bar z_0)}\,)^{\mp}}\,dt-\int\limits_{\overline{\Gamma_1}}\frac{f(t)(t-\operatorname{Re}z_1)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}}\,dt+$$

$$+\int\limits_{\Gamma_1'}\frac{f(t)(t-\operatorname{Re}z_0)}{(\sqrt{(t-z_0)(t-\bar z_0)}\,)^{\mp}}\,dt-\int\limits_{\Gamma_1'}\frac{f(t)(t-\operatorname{Re}z_1)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}}\,dt+$$

$$+\int\limits_{\Gamma_1''} \frac{f(t)(t-\operatorname{Re} z_0)}{(\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)}\,)^{\mp}}\, dt - \int\limits_{\Gamma_1''} \frac{f(t)(t-\operatorname{Re} z_1)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}}\, dt +$$

$$+\int\limits_{\Gamma_2} \frac{f(t)\big((t-\operatorname{Re} z_0)\sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)} - (t-\operatorname{Re} z_1)(\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)})^{\mp}\big)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}\ (\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)}\,)^{\mp}}\, dt +$$

$$+\int\limits_{\overline{\Gamma_2}} \frac{f(t)\big((t-\operatorname{Re} z_0)\sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)} - (t-\operatorname{Re} z_1)(\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)})^{\mp}\big)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}\ (\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)}\,)^{\mp}}\, dt +$$

$$+\int\limits_{\Gamma_3} \frac{f(t)\big((t-\operatorname{Re} z_0)\sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)} - (t-\operatorname{Re} z_1)(\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)})^{\mp}\big)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}\ (\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)}\,)^{\mp}}\, dt =:$$

$$=: \sum_{j=1}^{11} I_j. \tag{3.40}$$

При оценке интеграла I_5 используется неравенство

$$\frac{|t-\operatorname{Re} z_0|}{\sqrt{|t-z_0|\ |t-\bar{z}_0|}} \le \sqrt{2}\,,$$

которое при $t \in \{t \in \gamma_{z_0 z_2} : |t-z_0| \ge |\operatorname{Im} z_0|\}$ является следствием неравенств $|t-\operatorname{Re} z_0| \le 2\ |t-z_0|$ и $|t-\operatorname{Re} z_0| \le |t-\bar{z}_0|$. При этом получаем

$$|I_5| \le \sqrt{2} \int\limits_{\Gamma_1'} |f(t)|\,|dt| \le \sqrt{2}\ \|f\|_{L_p}\ l(z_0,z_2) \le c\ \|f\|_{L_p}\ d(z_0,z_2)\,,$$

где постоянная c зависит только от кривой γ.

Аналогично оцениваются интегралы I_6, I_7 и I_8. Другие интегралы в равенстве (3.40) оцениваются подобно соответствующим интегралам из равенства (3.27).

Из оценок интегралов I_j при $j = 1, 2, \ldots, 11$ следуют непрерывная продолжимость функции $f^{\pm}_{fl}$ в точки множества $\partial D^{\pm}_z \setminus \{b_1, b_2\}$ и равенство (3.37) для ее предельных значений, а также неравенство (3.38).

Докажем теперь равенство

$$f^{\pm}_{fl}(b_1) := \lim_{z\to b_1,\ z\in D^{\pm}_z} f^{\pm}_{fl}(z) = 0. \tag{3.41}$$

Пусть точка $z \in D_z^{\pm}$ такая, что $\operatorname{Im} z \neq 0$ и $\delta := |z - b_1| < (b_2 - b_1)/3$. Обозначим через z_3 одну из ближайших к точке z точек границы $\partial D_z^{\pm}$. Введем в рассмотрение множества

$$\gamma_1 := \{t \in \partial D_z^{\pm} : |t - \operatorname{Re} z| < 2\,|\operatorname{Im} z|,\ \operatorname{Im} t \operatorname{Im} z > 0\}, \quad \overline{\gamma_1} := \{\bar{t} : t \in \gamma_1\},$$

$$\gamma_2 := \bigl(\{t \in \partial D_z^{\pm} : |t - b_1| \leq 3\delta\} \cup \gamma_{z_3 b_1} \cup \gamma_{\bar{z}_3 b_1}\bigr) \setminus (\gamma_1 \cup \overline{\gamma_1}),$$

$$\gamma_3 := \partial D_z^{\pm} \setminus (\gamma_1 \cup \overline{\gamma_1} \cup \gamma_2)$$

и представим $f_{fl}^{\pm}(z)$ суммой четырех интегралов:

$$f_{fl}^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} f(t) \left(1 - \frac{t - \operatorname{Re} z}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\right) dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overline{\gamma_1}} f(t) \left(1 - \frac{t - \operatorname{Re} z}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\right) dt + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} f(t) \left(1 - \frac{t - \operatorname{Re} z}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\right) dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_3} \frac{f(t)\bigl(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - (t - \operatorname{Re} z)\bigr)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt =: I_{12} + I_{13} + I_{14} + I_{15}. \quad (3.42)$$

Обозначим $q := p/(p-1)$, если $2 < p < \infty$, и $q := 1$, если $p = \infty$.

Если $\gamma_1 = \varnothing$, то $I_{12} = 0$. Оценим I_{12} в предположении, что $\gamma_1 \neq \varnothing$. В случае, когда $\min\limits_{t \in \gamma} |t - z| \geq |\operatorname{Im} z|/2$, очевидным образом получаем оценку

$$|I_{12}| \leq c\, \|f\|_{L_p}\, \theta\bigl(2|\operatorname{Im} z|\bigr) \leq c\, \|f\|_{L_p}\, |\operatorname{Im} z|\,;$$

здесь и далее в доказательстве через c обозначены постоянные, значения которых не зависят от δ и z, но, вообще говоря, различны даже в пределах одной цепочки неравенств.

Если $\min\limits_{t \in \gamma} |t - z| < |\operatorname{Im} z|/2$, то с учетом неравенств $|t - \bar{z}| \geq |\operatorname{Im} z|$ и $|t - z| \geq |t - z_3|/2$, которые выполняются при всех $t \in \gamma_1$, по аналогии с оценками (3.24) – (3.26) получаем

$$|I_{12}| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_1} |f(t)| \left(1 + \frac{|t - \operatorname{Re} z|}{\sqrt{|t-z||t-\bar{z}|}}\right) |dt| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_1} |f(t)| \left(1 + \frac{2|\operatorname{Im} z|}{\sqrt{\frac{1}{2}|t - z_3|\ |\operatorname{Im} z|}}\right) |dt| \leq$$

$$\leq\ c\,\|f\|_{L_p}\left(\theta(2|\operatorname{Im}z|)+\sqrt{|\operatorname{Im}z|}\left(\int\limits_0^{4|\operatorname{Im}z|}\frac{d\theta_{z_3}(\tau)}{\tau^{q/2}}\right)^{1/q}\right)\leq$$

$$\leq\ c\,\|f\|_{L_p}\left(\theta(2|\operatorname{Im}z|)+\sqrt{|\operatorname{Im}z|}\left(\int\limits_0^{4|\operatorname{Im}z|}\frac{\theta_{z_3}(2\tau)}{\tau}\frac{d\tau}{\tau^{q/2}}\right)^{1/q}\right)\leq$$

$$\leq\ c\,\|f\|_{L_p}\,|\operatorname{Im}z|^{1/q}\,. \tag{3.43}$$

Такая же оценка имеет место и для интеграла I_{13}.

С учетом неравенств $|t-\operatorname{Re}z|\leq 2|t-z|$, $|t-\operatorname{Re}z|\leq 2|t-\bar z|$, которые выполняются при всех $t\in\gamma_2$, получаем оценку интеграла I_{14}:

$$|I_{14}|\leq\frac{3}{2\pi}\int\limits_{\gamma_2}|f(t)|\,|dt|\leq\frac{3}{2\pi}\,\|f\|_{L_p}\,(\theta_{b_1}(3\delta)+2l(z_3,b_1))\leq$$

$$\leq\ c\,\|f\|_{L_p}\,(\delta+d(z_3,b_1)).$$

При оценке интеграла I_{15} используются неравенства $|t-z|\geq$ $\geq 2\,|t-b_j|/3$ и $|t-\bar z|\geq 2\,|t-b_j|/3$, а также неравенство

$$\left|\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}-(t-\operatorname{Re}z)\right|\leq\ c\,|\operatorname{Im}z|$$

с некоторой абсолютной постоянной c, которые выполняются при всех $t\in\gamma_3$. С учетом этих неравенств по аналогии с оценкой (3.43) получаем

$$|I_{15}|\leq\ c\int\limits_{\gamma_3}\frac{|f(t)|\,|\operatorname{Im}z|}{|t-b_1|}\,|dt|\leq\ c\,\|f\|_{L_p}\,|\operatorname{Im}z|\left(\int\limits_{\gamma_3}\frac{|dt|}{|t-b_j|^q}\right)^{1/q}\leq$$

$$\leq\ c\,\|f\|_{L_p}\,\omega_1(\delta)\,.$$

Из полученных оценок интегралов I_{12}, I_{13}, I_{14}, I_{15} следует оценка

$$|f^{\pm}_{fl}(z)|\leq\ c\,\|f\|_{L_p}\,\big(\omega_1(|z-b_1|)+d(z_3,b_1)\big) \tag{3.44}$$

при всех $z\in D^{\pm}_z$ таких, что $|z-b_1|<(b_2-b_1)/3$; здесь постоянная c зависит только от кривой γ.

Теперь равенство (3.41) является очевидным следствием оценки (3.44).

Аналогично устанавливаются равенства

$$f^{+}_{fl}(b_2):=\lim_{z\to b_2,\ z\in D^+_z}f^{+}_{fl}(z)=0,$$

$$f_{fl}^{-}(b_2) := \lim_{z\to b_2,\ z\in D_z^-} f_{fl}^{-}(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\partial D_z^-} f(t)\,dt$$

и оценка

$$|f_{fl}^{\pm}(z) - f_{fl}^{\pm}(b_2)| \le\ c\ \|f\|_{L_p}\ \big(\omega_1(|z-b_2|) + d(z_4, b_2)\big) \tag{3.45}$$

при всех $z \in D_z^{\pm}$ таких, что $|z-b_2| < (b_2-b_1)/3$; здесь z_4 — одна из ближайших к точке z точек границы $\partial D_z^{\pm}$, а постоянная c зависит только от кривой γ.

Очевидно, что из оценок (3.44), (3.45) следует неравенство (3.39), и доказательство теоремы завершено.

Теорема 3.11. *Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая, симметричная относительно действительной оси и удовлетворяющая условию* (3.16). *Пусть, кроме того, для функции $f : \partial D_z \longrightarrow \mathbb{C}$ существует $\beta \in (0;1)$ такое, что выполняется условие*

$$|f(z)| \le\ c\ \big(|z-b_1|^{-\beta} + |z-b_2|^{-\beta}\big) \quad \forall\, z \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1, b_2\}\,, \tag{3.46}$$

где постоянная c не зависит от z.

Тогда функция $f_{fl}^{\pm}$ непрерывно продолжается из области $D_z^{\pm}$ на границу $\partial D_z^{\pm}$ и ее предельные значения $f_{fl}^{\pm}(z)$ при $z \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1, b_2\}$ выражаются формулой (3.37). *При этом:*

1) для каждой точки $z_0 \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1, b_2\}$ существует $\delta(z_0) > 0$ такое, что при всех $z \in \partial D_z^{\pm}$, для которых $|z-z_0| < \delta(z_0)$, выполняется неравенство

$$|f_{fl}^{\pm}(z) - f_{fl}^{\pm}(z_0)| \le\ c\ \Omega_0(z_0, z), \tag{3.47}$$

где $\Omega_0(z_0,z) = (d(z_0,z))^{1-\beta}$ при $\beta > 1/2$ и $\Omega_0(z_0,z) = \sqrt{d(z_0,z)} + \sqrt{|z-z_0|}\ \ln\frac{1}{|z-z_0|}$ при $\beta \le 1/2$, а постоянная c зависит только от кривой γ и функции f;

2) для всех $z \in \partial D_z^{\pm}$, для которых $|z-b_j| < (b_2-b_1)/3$ при $j = 1$ или $j = 2$, выполняется неравенство

$$|f_{fl}^{\pm}(z) - f_{fl}^{\pm}(b_j)| \le\ c\ (d(z, b_j))^{1-\beta}, \tag{3.48}$$

где постоянная c зависит только от кривой γ и функции f.

Доказательство. Прежде всего заметим, что поскольку $d(z_0,z) \to 0$ при $z_0 \in \gamma \setminus \{b_1,b_2\}$ и $|z-z_0| \to 0, z \in \gamma$, то для каждой точки $z_0 \in \gamma \setminus \{b_1, b_2\}$ существует положительное число $\delta(z_0)$ такое, что выполняется неравенство $d(z_0,z) < |\operatorname{Im} z_0|/2$ при всех $z \in \gamma$, для которых $|z-z_0| < \delta(z_0)$.

Теперь для доказательства непрерывной продолжимости функции $f_{fl}^{\pm}$ на множество $\partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1, b_2\}$ рассмотрим точку $z_0 \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1, b_2\}$ и точку $z_1 \in D_z^{\pm}$ такую, что $\varepsilon := |z_1 - z_0| \le \min\{2\delta(z_0), |\operatorname{Im} z_0|\}/4$. Обозначим через z_2 одну из ближайших к точке z_1 точек границы $\partial D_z^{\pm}$. Введем в рассмотрение множества

$$\Gamma_0 := \{t \in \partial D_z^{\pm} : |t - b_1| \le |z_0 - b_1|/2\} \cup \{t \in \partial D_z^{\pm} : |t - b_2| \le |z_0 - b_2|/2\},$$

$$\Gamma_1 := \{t \in \partial D_z^{\pm} : |t - z_0| \le 2\varepsilon\} \cup \gamma_{z_0 z_2}, \quad \overline{\Gamma_1} := \{\bar{t} : t \in \Gamma_1\},$$

$$\Gamma_2 := \{t \in \partial D_z^{\pm} : |t - z_0| \le |\operatorname{Im} z_0|\} \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_1), \quad \overline{\Gamma_2} := \{\bar{t} : t \in \Gamma_2\},$$

$$\Gamma_0' := \big(\{t \in \partial D_z^{\pm} : |t - b_1| \le 2|z_0 - b_1|\} \cup \{t \in \partial D_z^{\pm} : |t - b_2| \le 2|z_0 - b_2|\}\big) \setminus$$

$$\setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma_1} \cup \Gamma_2 \cup \overline{\Gamma_2}), \quad \Gamma_3 := \partial D_z^{\pm} \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma_1} \cup \Gamma_2 \cup \overline{\Gamma_2} \cup \Gamma_0')$$

и рассмотрим выражение

$$2\pi i \left(f_{fl}^{\pm}(z_1) - f_{fl}^{\pm}(z_0)\right) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(t)(t - \operatorname{Re} z_0)}{(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)})^{\mp}}\, dt - \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(t)(t - \operatorname{Re} z_1)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)}}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\overline{\Gamma_1}} \frac{f(t)(t - \operatorname{Re} z_0)}{(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)})^{\mp}}\, dt - \int\limits_{\overline{\Gamma_1}} \frac{f(t)(t - \operatorname{Re} z_1)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)}}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_0} \frac{f(t)\big((t - \operatorname{Re} z_0)\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)} - (t - \operatorname{Re} z_1)(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)})^{\mp}\big)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)}\,(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)}\,)^{\mp}}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_2} \frac{f(t)\big((t - \operatorname{Re} z_0)\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)} - (t - \operatorname{Re} z_1)(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)})^{\mp}\big)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)}\,(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)}\,)^{\mp}}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\overline{\Gamma_2}} \frac{f(t)\big((t - \operatorname{Re} z_0)\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)} - (t - \operatorname{Re} z_1)(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)})^{\mp}\big)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)}\,(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)}\,)^{\mp}}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_0'} \frac{f(t)\big((t - \operatorname{Re} z_0)\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)} - (t - \operatorname{Re} z_1)(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)})^{\mp}\big)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)}\,(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)}\,)^{\mp}}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_3} \frac{f(t)\big((t - \operatorname{Re} z_0)\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)} - (t - \operatorname{Re} z_1)(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)})^{\mp}\big)}{\sqrt{(t - z_1)(t - \bar{z}_1)}\,(\sqrt{(t - z_0)(t - \bar{z}_0)}\,)^{\mp}}\, dt =:$$

$$=: \sum_{j=16}^{24} I_j\,.$$

Учитывая условие (3.46), по аналогии с оценкой (3.43) и оценкой соответствующего интеграла при доказательстве теоремы 3.8 получаем неравенства

$$|I_{16}| \le\; c\,\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}\;\left(|z_0-b_1|^{-\beta}+|z_0-b_2|^{-\beta}\right)\int\limits_0^{2\varepsilon+d(z_0,z_2)}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \le$$

$$\le\; c\;\left(\min\{|z_0-b_1|,|z_0-b_2|\}\right)^{\frac{1}{2}-\beta}\;\sqrt{2\varepsilon+d(z_0,z_2)}\,,$$

здесь и далее в доказательстве через c обозначены постоянные (различные даже в пределах одной цепочки неравенств), значения которых зависят только от кривой γ и функции f. Таким же способом, как и I_{16}, оцениваются интегралы I_{17}, I_{18}, I_{19}.

При оценке интегралов I_{20}, I_{21}, I_{22}, I_{23} и I_{24} используется неравенство

$$\left|(t-\operatorname{Re} z_0)\sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}-(t-\operatorname{Re} z_1)\left(\sqrt{(t-z_0)(t-\bar z_0)}\right)^{\mp}\right| \le$$

$$\le\; c\,\sqrt{\varepsilon}\left(\sqrt{\varepsilon}\sqrt{|t-z_0|\;|t-\bar z_0|}+|t-\operatorname{Re} z_1|\sqrt{|t-z_1|+|t-\bar z_0|}\right), \qquad (3.49)$$

которое выполняется при всех $t\in\partial D_z^{\pm}\setminus(\Gamma_1\cup\overline{\Gamma_1})$ с некоторой абсолютной постоянной c.

Учитывая также условие (3.46), по аналогии с оценкой (3.43) получаем оценки

$$|I_{20}| \le\; c\,\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{|z_0-b_1|}}\int\limits_0^{|z_0-b_1|}\tau^{-\beta}\,d\tau+\frac{1}{\sqrt{|z_0-b_2|}}\int\limits_0^{|z_0-b_2|}\tau^{-\beta}\,d\tau\right) \le$$

$$\le\; c\;\max\{|z_0-b_1|^{\frac{1}{2}-\beta},|z_0-b_2|^{\frac{1}{2}-\beta}\}\;\sqrt{\varepsilon}\,,$$

$$|I_{23}| \le\; c\,\sqrt{\varepsilon}\left(|z_0-b_1|^{-\beta}+|z_0-b_2|^{-\beta}\right)\int\limits_{\Gamma_0'}\frac{|dt|}{\sqrt{|t-z_0|}} \le$$

$$\le\; c\;\max\{|z_0-b_1|^{\frac{1}{2}-\beta},|z_0-b_2|^{\frac{1}{2}-\beta}\}\;\sqrt{\varepsilon}\,,$$

$$|I_{24}| \le c\sqrt{\varepsilon}\left(\int\limits_{|z_0-b_1|}^{d} \tau^{-\frac{1}{2}-\beta}\,d\tau + \int\limits_{|z_0-b_2|}^{d} \tau^{-\frac{1}{2}-\beta}\,d\tau\right),$$

где $d := \max\limits_{t,z\in\gamma} |t-z|$.

С учетом условия (3.46) подобно оценке (3.43) и оценке соответствующего интеграла при доказательстве теоремы 3.8 получаем неравенства

$$|I_{21}| \le c\sqrt{\varepsilon}\,\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}\,\bigl(|z_0-b_1|^{-\beta} + |z_0-b_2|^{-\beta}\bigr)\int\limits_{\varepsilon}^{|\operatorname{Im} z_0|} \frac{d\tau}{\tau} \le$$

$$\le c\,\bigl(\min\{|z_0-b_1|, |z_0-b_2|\}\bigr)^{\frac{1}{2}-\beta}\sqrt{\varepsilon}\,\ln\frac{|\operatorname{Im} z_0|}{\varepsilon}.$$

Такая же оценка имеет место и для интеграла I_{22}.

Из оценок интегралов I_j при $j = 16, 17, \ldots, 24$ следуют непрерывная продолжимость функции $f^{\pm}_{fl}$ в точки множества $\partial D^{\pm}_z \setminus \{b_1, b_2\}$ и равенство (3.37) для ее предельных значений, а также неравенство (3.47).

Докажем теперь равенство (3.41) и неравенство (3.48) при $j = 1$. С этой целью рассмотрим точку $z \in D^{\pm}_z$ такую, что $\operatorname{Im} z \ne 0$ и $\delta := |z - b_1| < (b_2 - b_1)/3$. Обозначим через z_3 одну из ближайших к точке z точек границы $\partial D^{\pm}_z$. Введем в рассмотрение множества

$$\gamma_0 := \{t \in \partial D^{\pm}_z : |t - b_1| \le \delta/2\},$$

$$\gamma_1 := \{t \in \partial D^{\pm}_z : |t-\operatorname{Re} z| < 2|\operatorname{Im} z|,\ \operatorname{Im} t \operatorname{Im} z > 0\}\setminus\gamma_0,\quad \overline{\gamma_1} := \{\overline{t} : t \in \gamma_1\},$$

$$\gamma_2 := \bigl(\{t \in \partial D^{\pm}_z : |t - b_1| \le 3\delta\} \cup \gamma_{z_3 b_1} \cup \gamma_{\bar z_3 b_1}\bigr) \setminus (\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \overline{\gamma_1}),$$

$$\gamma_3 := \partial D^{\pm}_z \setminus (\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \overline{\gamma_1} \cup \gamma_2)$$

и представим $f^{\pm}_{fl}(z)$ суммой пяти интегралов:

$$f^{\pm}_{fl}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} f(t)\left(1 - \frac{t - \operatorname{Re} z}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\right)dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} f(t)\left(1 - \frac{t - \operatorname{Re} z}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\right)dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{\gamma_1}} f(t)\left(1 - \frac{t - \operatorname{Re} z}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\right)dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2} f(t)\left(1 - \frac{t - \operatorname{Re} z}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\right)dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_3}\frac{f(t)(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}-(t-\operatorname{Re}z))}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt =: I_{25}+I_{26}+I_{27}+I_{28}+I_{29}.$$

Интеграл I_{25} оценивается аналогично интегралу I_{20}, а интегралы $I_{26}, I_{27}, I_{28}, I_{29}$ оцениваются с учетом условия (3.46) подобно тому, как при доказательстве теоремы 3.10 оценены соответственно интегралы $I_{12}, I_{13}, I_{14}, I_{15}$. Из описанных оценок интегралов $I_{25}, I_{26}, I_{27}, I_{28}, I_{29}$ следуют равенство (3.41) и неравенство (3.48) при $j=1$. Аналогично устанавливается неравенство (3.48) и при $j=2$. Теорема доказана.

В случае, когда кривая γ ограничивает область, пересечение которой с полуплоскостью $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im}z>0\}$ является k-областью, оценки (3.38), (3.39) уточняются. При этом справедлива следующая теорема.

Теорема 3.12. *Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая, симметричная относительно действительной оси и удовлетворяющая условию* (3.16), *а область $\{z\in D_z^+ : \operatorname{Im}z>0\}$ (или $\{z\in D_z^- : \operatorname{Im}z>0\}$) при этом является k-областью. Если $f\in L_p(\gamma)$, $2<p\le\infty$, то для модуля непрерывности функции f_{fl}^+ (или, соответственно, f_{fl}^-) при любом $\varepsilon\ge 0$ справедлива оценка*

$$\omega_{\partial D_z^\pm}(f_{fl}^\pm,\varepsilon)\le\ c\,\|f\|_{L_p}\,\omega(\varepsilon), \tag{3.50}$$

где $\omega(\varepsilon)=\varepsilon^{\frac{p-2}{2p}}$ при $2<p<\infty$ и $\omega(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\,\ln\frac{1}{\varepsilon}$ при $p=\infty$, а постоянная c зависит только от кривой γ.

Доказательство. Уточним сначала оценку (3.38) с учетом того, что область $\{z\in D_z^+ : \operatorname{Im}z>0\}$ (или $\{z\in D_z^- : \operatorname{Im}z>0\}$) является k-областью.

Пусть $z_0\in\partial D_z^\pm\setminus\{b_1,b_2\}$ и точка $z_1\in\partial D_z^\pm$ такая, что $\varepsilon:=|z_1-z_0|\le$ $\le\ |\operatorname{Im}z_0|/(2k)$. Представим приращение функции $f_{fl}^\pm$ в точке z_0 равенством (3.40), в котором

$$\Gamma_1:=\{t\in\partial D_z^\pm : |t-z_0|\le 2k\varepsilon\},\quad \overline{\Gamma_1}:=\{\bar t : t\in\Gamma_1\},\quad \Gamma_1'=\Gamma_1''=\varnothing,$$

$$\Gamma_2:=\{t\in\partial D_z^\pm : 2k\varepsilon<|t-z_0|\le|\operatorname{Im}z_0|\},\quad \overline{\Gamma_2}:=\{\bar t : t\in\Gamma_2\},$$

$$\Gamma_3:=\partial D_z^\pm\setminus(\Gamma_1\cup\overline{\Gamma_1}\cup\Gamma_2\cup\overline{\Gamma_2}),$$

а вместо выражения $\sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}$ содержатся предельные значения $(\sqrt{(t-z_1)(t-\bar z_1)}\,)^\mp$.

Поскольку область $\{z\in D_z^\pm : \operatorname{Im}z>0\}$ является k-областью, то выполняется неравенство (3.35), с учетом которого легко получаем неравенство (3.49) при всех $t \in \partial D_z^{\pm} \setminus (\Gamma_1 \cup \overline{\Gamma_1}\,)$. Далее аналогично оценке (3.38) получаем неравенство

$$|f_{fl}^{\pm}(z_1) - f_{fl}^{\pm}(z_0)| \leq \ c\ \|f\|_{L_p}\ \omega(\varepsilon), \tag{3.51}$$

в котором постоянная c зависит только от кривой γ.

Уточним теперь оценку (3.44) модуля предельных значений функции $f_{fl}^{\pm}(z)$ в окрестности точки b_1. С этой целью рассмотрим точку $z \in \partial D_z^{\pm} \setminus \{b_1\}$ такую, что $\delta := \min\{|z-b_1|, |z-b_2|\} < (b_2-b_1)/(3k)$. Представим $f_{fl}^{\pm}(z)$ равенством (3.42), в котором

$$\gamma_1 := \{t \in \partial D_z^{\pm} : |t - \operatorname{Re} z| < 2\ |\operatorname{Im} z|,\ \operatorname{Im} t\ \operatorname{Im} z > 0\},$$

$$\overline{\gamma_1} := \{\bar{t} : t \in \gamma_1\}, \quad \gamma_2 := \{t \in \partial D_z^{\pm} : |t - b_1| \leq 3k\delta\} \setminus (\gamma_1 \cup \overline{\gamma_1}),$$

$$\gamma_3 := \partial D_z^{\pm} \setminus (\gamma_1 \cup \overline{\gamma_1} \cup \gamma_2),$$

а вместо выражения $\sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}$ содержатся предельные значения $(\sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}\,)^{\mp}$.

При условии, что область $\{z \in D_z^{\pm}\ :\ \operatorname{Im} z > 0\}$ является k-областью, аналогично оценке (3.35) устанавливается неравенство

$$\left|(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^{\mp} - (t - \operatorname{Re} z)\right| \leq \ c\ |\operatorname{Im} z|$$

для всех $t \in \gamma_3$ с некоторой абсолютной постоянной c. Далее подобно оценке (3.44) получаем неравенство

$$|f_{fl}^{\pm}(z)| \leq \ c\ \|f\|_{L_p}\ \omega_1(\delta)\,,$$

в котором $\omega_1(\delta) := \delta^{\frac{p-1}{p}}$ при $2 < p < \infty$ и $\omega_1(\delta) := \delta\ \ln\frac{1}{\delta}$ при $p = \infty$, а постоянная c зависит только от кривой γ.

Аналогично оценивается модуль разности $f_{fl}^{\pm}(z) - f_{fl}^{\pm}(b_2)$ в окрестности точки b_2 и уточняется оценка (3.45).

В результате сделанных здесь уточнений оценок (3.44), (3.45) установлено неравенство

$$|f_{fl}^{\pm}(z) - f_{fl}^{\pm}(b_j)| \leq \ c\ \|f\|_{L_p}\ \omega_1(\delta) \tag{3.52}$$

при $j = 1$ или $j = 2$ и всех $z \in D_z^{\pm}$ таких, что $|z - b_j| < (b_2 - b_1)/(3k)$; здесь постоянная c зависит только от кривой γ.

Перейдем теперь к доказательству оценки (3.50). Пусть $0 < \varepsilon < (b_2-b_1)/(3k(2k+1))$. Рассмотрим точки $z_0, z_1 \in \partial D_z^{\pm}$, для которых $|z_1 - z_0| = \varepsilon$, и следующие случаи их расположения относительно действительной оси.

В случае, когда $|\operatorname{Im} z_0| \geq 2k\varepsilon$, справедлива оценка (3.51).

Если $|z_0 - b_j| < 2k\varepsilon$ при $j = 1$ или $j = 2$, то, учитывая неравенство (3.52), получаем

$$|f^{\pm}_{fl}(z_1) - f^{\pm}_{fl}(z_0)| \leq |f^{\pm}_{fl}(z_1) - f^{\pm}_{fl}(b_j)| + |f^{\pm}_{fl}(z_0) - f^{\pm}_{fl}(b_j)| \leq$$
$$\leq c\,\|f\|_{L_p}\,\omega_1((2k+1)\varepsilon) \leq c\,\|f\|_{L_p}\,\omega_1(\varepsilon),$$

где постоянные c зависят только от кривой γ.

Наконец, в случае, когда $\min\{|z_0 - b_1|, |z_0 - b_2|\} \geq 2k\varepsilon > |\operatorname{Im} z_0|$, аналогично оценке (3.52) устанавливаются неравенства

$$|f^{+}_{fl}(z_1) - f^{+}_{fl}(z_0)| \leq |f^{+}_{fl}(z_1)| + |f^{+}_{fl}(z_0)| \leq$$
$$\leq c\,\|f\|_{L_p}\,\omega_1((2k+1)\varepsilon) \leq c\,\|f\|_{L_p}\,\omega_1(\varepsilon),$$

если область $\{z \in D^{+}_z : \operatorname{Im} z > 0\}$ является k-областью, или неравенства

$$|f^{-}_{fl}(z_1) - f^{-}_{fl}(z_0)| \leq \left| f^{-}_{fl}(z_1) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma'} f(t)\,dt \right| + \left| f^{-}_{fl}(z_0) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma'} f(t)\,dt \right| \leq$$
$$\leq c\,\|f\|_{L_p}\,\omega_1((2k+1)\varepsilon) \leq c\,\|f\|_{L_p}\,\omega_1(\varepsilon),$$

если область $\{z \in D^{-}_z : \operatorname{Im} z > 0\}$ является k-областью; здесь $\Gamma' := \Gamma^{\gamma}_{z_0\bar z_0} \cap \Gamma^{\gamma}_{z_1\bar z_1}$, при этом ориентация множества Γ' индуцирована ориентацией границы ∂D^{-}_z, а постоянные c зависят только от кривой γ.

Очевидным следствием полученных оценок является неравенство (3.50), и доказательство теоремы завершено.

С учетом того, что область $\{z \in D^{+}_z : \operatorname{Im} z > 0\}$ (или $\{z \in D^{-}_z : \operatorname{Im} z > 0\}$) является k-областью, уточняются оценки (3.47), (3.48) аналогично тому, как при доказательстве теоремы 3.12 сделаны уточнения оценок (3.38), (3.39). При этом по схеме доказательства теоремы 3.11 доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.13. *Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая, симметричная относительно действительной оси и удовлетворяющая условию* (3.16), *а область $\{z \in D^{+}_z : \operatorname{Im} z > 0\}$ (или $\{z \in D^{-}_z : \operatorname{Im} z > 0\}$) при этом является k-областью. Пусть, кроме того, для функции $f : \partial D_z \longrightarrow \mathbb{C}$ существует $\beta \in (0;1)$ такое, что выполняется условие* (3.46). *Тогда для модуля непрерывности функции f^{+}_{fl} (или, соответственно, f^{-}_{fl}) при любом $\varepsilon \geq 0$ имеет место оценка*

$$\omega_{\partial D^{\pm}_z}(f^{\pm}_{fl}, \varepsilon) \leq c\,\omega_0(\varepsilon),$$

где $\omega_0(\varepsilon) = \varepsilon^{1-\beta}$ при $\beta > 1/2$ и $\omega_0(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\,\ln\frac{1}{\varepsilon}$ при $\beta \leq 1/2$, а постоянная c зависит только от кривой γ и функции f.

§ 18. Внутренняя задача Дирихле для осесимметричного потенциала

Важный класс задач математической физики, которые имеют многочисленные применения, образуют краевые задачи для решений уравнений эллиптического типа.

Основной краевой задачей для уравнений эллиптического типа является задача Дирихле. Для двумерного и трехмерного уравнения Лапласа разработаны различные методы эффективного решения задачи Дирихле (см., например, монографии [75, 76, 77, 50, 47, 3]). Однако, заметим, что непосредственное применение этих методов к решению задач Дирихле в меридианной плоскости пространственного потенциального поля с осевой симметрией, как правило, наталкивается на существенные трудности, связанные с вырождением уравнений (2.2), (2.3) на оси Ox.

В работе [24] описаны некоторые корректные постановки краевых задач для одного эллиптического уравнения второго порядка с вырождением на прямой, которые показали определенное отличие этих задач от краевых задач для эллиптических уравнений без вырождения. Следовательно, решение краевых задач в меридианной плоскости пространственного потенциального поля с осевой симметрией требует развития специальных методов, которые учитывали бы природу и специфические особенности осесимметричных задач.

Один из способов исследования осесимметричных краевых задач базируется на представлении их решений в виде потенциалов простого или двойного слоя, для построения которых используются фундаментальные решения соответствующих уравнений с частными производными (см. [103, 49, 72]). В частности, таким способом в работе [72] задача Дирихле для решений уравнения, обобщающего уравнение (2.2), в области, граница которой является кривой Ляпунова, редуцирована к интегральному уравнению Фредгольма.

Также применяются для исследования краевых задач представления решений с помощью гипергеометрических функций (см., например, [52, 79]), многомерные интегральные преобразования (см., например, [25]) и вариационные методы (см., например, [30, 5, 6]).

Эффективный способ решения осесимметричных краевых задач состоит в сведении их к краевым задачам теории аналитических функций комплексной переменной (см., например, [15, 16, 80, 81, 64, 69, 22, 23]). Реализации этой цели, как правило, способствуют интегральные представления решений через аналитические функции комплексной переменной и формулы их обращения на границе области.

Ниже для решения задач Дирихле для осесимметричного потенциала и функции тока Стокса применяются интегральные выражения (2.17), (2.18).

18.1. Постановка задачи Дирихле и вспомогательной задачи. Пусть D — ограниченная область меридианной плоскости xOr с замкнутой жордановой спрямляемой границей.

Рассмотрим *внутреннюю задачу Дирихле для осесимметричного потенциала* об отыскании непрерывной на $\overline{D}$ функции $\varphi(x,r)$, которая в области D удовлетворяет уравнению (2.2), а на границе ∂D принимает заданные значения $\varphi_{\partial D}(x,r)$, то есть удовлетворяет равенству $\varphi(x,r) = \varphi_{\partial D}(x,r)$ при всех $(x,r) \in \partial D$.

Отметим, что осесимметричный потенциал $\varphi(x,r)$ в области D подчиняется принципу максимума. Другими словами, если $|\varphi(x,r)|$ достигает локального максимума во внутренний точке области D, то $\varphi(x,r) = \mathrm{const}$ всюду в D. Это следует из того, что функция $u(x,y,z) := \varphi(x, \sqrt{y^2+z^2})$ является гармонической в области трехмерного евклидова пространства, образованной вращением области D относительно оси Ox.

Естественным следствием принципа максимума является единственность решения внутренней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала.

С целью решения задачи Дирихле рассмотрим *внутреннюю вспомогательную задачу* для заданных предельных значений осесимметричного потенциала $\varphi_{\partial D}(x,r)$ об отыскании голоморфной в области D_z и непрерывной в $\overline{D_z}$ функции F, удовлетворяющей дополнительному условию симметрии (3.15), такой, что ее предельные значения являются решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_z} \frac{F(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^-}\, dt = \varphi_{\partial D}(x,r)\,, \tag{3.53}$$

где $(x,r) \in \partial D$, $r \neq 0$, $z = x + ir$.

18.2. Редукция вспомогательной задачи к сингулярному интегральному уравнению. При решении внутренней вспомогательной задачи будем использовать некоторое конформное отображение $\sigma_+(Z)$ единичного круга $\{Z \in \mathbb{C} \ :\ |Z| < 1\}$ на область D_z^+ такое, что $\sigma_+(-1) = b_1$, $\sigma_+(1) = b_2$, и образом полукруга $\{Z \in \mathbb{C} \ :\ |Z| < 1,\ \mathrm{Im}\, Z > 0\}$ при отображении $\sigma_+(Z)$ является область $\{z \in D_z^+ \ : \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

Легко видеть, что такое отображение существует и при всех $Z \in \{Z \in \in \mathbb{C} \ : \ |Z| \le 1\}$ удовлетворяет условию $\sigma_+(\bar{Z}) = \overline{\sigma_+(Z)}$.

Введем при этом в рассмотрение функцию

$$M_+(Z,T) := \sqrt{\frac{(T-Z)(T-\bar{Z})}{(\sigma_+(T)-\sigma_+(Z))(\sigma_+(T)-\sigma_+(\bar{Z}))}}\ , \tag{3.54}$$

которую при каждом фиксированном $Z \neq -1$ будем понимать как непрерывную ветвь функции, аналитической в единичном круге по переменной T, такую, что $M_+(Z,-1) > 0$.

Рассмотрим также функцию $m(\xi,\tau) := M_+\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}, \frac{\tau-i}{\tau+i}\right)$, где $\xi,\tau \in \mathbb{R}$.

Введем в рассмотрение гельдеровские классы функций. Функция $g(z)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha \in (0;1]$ на множестве E, $E \subset \mathbb{C}$, если

$$|g(z_1) - g(z_2)| \le \ c\, |z_1 - z_2|^\alpha \qquad \forall\, z_1, z_2 \in E$$

и постоянная c не зависит от z_1 и z_2. Через $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha$ обозначим класс функций $g : \partial D_z \longrightarrow \mathbb{C}$, для каждой из которых при фиксированном $\alpha \in (0;1]$ существует $\nu \in [0;\alpha)$ такое, что выполняется условие

$$|g(z_1) - g(z_2)| \le$$

$$\le c\left(\max\{|z_1-b_1||z_1-b_2|, |z_2-b_1||z_2-b_2|\}\right)^{-\nu} |z_1-z_2|^\alpha \tag{3.55}$$

$$\forall\, z_1, z_2 \in \partial D_z,$$

где постоянная c не зависит от z_1, z_2. Очевидно, что функции класса $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha$ удовлетворяют на множестве ∂D_z условию Гельдера с показателем $\alpha - \nu$, однако при этом вне произвольной фиксированной окрестности точек b_1 и b_2 выполняется условие Гельдера с показателем α.

Класс функций $g_{\partial D} : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$, для каждой из которых функция g, определяемая равенством $g(x+ir) := g_{\partial D}(x,r)$ при $(x,r) \in \partial D$, принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha$, будем обозначать $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$.

Отметим некоторые равенства, которые используются при редукции вспомогательной задачи для заданных предельных значений потенциала $\varphi_{\partial D}(x,r)$ к сингулярному интегральному уравнению на действительной оси.

Если функция φ_* удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha > 1/2$ на отрезке $[a_1,a_2]$ и суммируема на отрезке $[a,a_1]$, то по стандартной схеме [8, с. 573] при любом $\xi \in (a_1, a_2)$ получаем равенство

$$\frac{d}{d\xi} \int\limits_a^\xi \frac{s\ \varphi_*(s)}{\sqrt{(\xi^2 - s^2)(s^2 - a^2)}}\, ds = -\xi \int\limits_a^\xi \frac{s\ (\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi))}{(\xi^2 - s^2)^{3/2}\sqrt{s^2 - a^2}}\, ds. \quad (3.56)$$

При тех же предположениях о функции φ_* легко устанавливается равенство

$$\lim_{\tau \to \xi} \int\limits_\tau^\xi \frac{s\ \varphi_*(s)}{\sqrt{(\xi^2 - s^2)(s^2 - \tau^2)}}\, ds = \frac{\pi}{2}\ \varphi_*(\xi) \qquad \forall\, \xi \in (a_1, a_2]. \quad (3.57)$$

В следующей теореме приведены достаточные условия редукции вспомогательной задачи для заданных предельных значений осесимметричного потенциала $\varphi_{\partial D}(x, r)$ к сингулярному интегральному уравнению на действительной оси.

Теорема 3.14. *Пусть функция $\varphi_{\partial D}$ принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$, $1/2 < \alpha \le 1$, и удовлетворяет условию*

$$\varphi_{\partial D}(x, -r) = \varphi_{\partial D}(x, r) \qquad \forall\, (x, r) \in \partial D. \quad (3.58)$$

Пусть при этом отображение $\sigma_+(Z)$ дифференцируемо в точках множества $\{Z \in \mathbb{C}\ :\ |Z| = 1, Z \ne \pm 1\}$, функция $\sigma_+'(Z)$ в тех же точках непрерывна и не равна нулю, а в окрестности точек $Z = \pm 1$ удовлетворяет оценке

$$|\sigma_+'(Z)| \le\ c\ (|Z - 1|^{-\beta} + |Z + 1|^{-\beta})\,, \quad (3.59)$$

где $\beta \in (0; 1)$ и постоянная c не зависит от Z. Пусть, кроме того, функция $M_+(Z, T)$ при любых $A_1, A_2 \in (-1; 1), A_1 < A_2$, удовлетворяет условию

$$\begin{gathered} |M_+(Z_1, T) - M_+(Z_2, T)| \le\ c\ |Z_1 - Z_2|^{\alpha'} \quad \forall\, T, Z_1, Z_2 \in \\ \in \{Z \in \mathbb{C}\ :\ |Z| = 1\}\ : -1 < \operatorname{Re} T < A_1 < \operatorname{Re} Z_1 < \operatorname{Re} Z_2 < A_2, \\ \operatorname{Im} Z_1 \operatorname{Im} T > 0, \quad \operatorname{Im} Z_2 \operatorname{Im} T > 0, \end{gathered} \quad (3.60)$$

где $1/2 < \alpha' \le 1$ и постоянная c не зависит от Z_1 и Z_2.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *каждое решение F внутренней вспомогательной задачи для предельных значений потенциала $\varphi_{\partial D}$ по формуле*

$$U_p(\xi) = \operatorname{Re} \frac{i \Big(F(\sigma_+(\frac{\xi - i}{\xi + i})) - \varphi_{\partial D}(b_2, 0)\Big)\, \sigma_+'(\frac{\xi - i}{\xi + i})}{2(\xi + i)} \quad \forall\, \xi > 0$$

порождает решение сингулярного интегрального уравнения

$$A(\xi,\xi)U_p(\xi)+\frac{2\xi B(\xi,\xi)}{\pi}\int_0^\infty \frac{U_p(\tau)}{\tau^2-\xi^2}\,d\tau-$$

$$-\frac{4\xi}{\pi^2}\int_0^\xi\left(\int_\tau^\xi \frac{s(B(s,\tau)-B(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds\int_0^\infty \frac{\tau U_p(\eta)}{\eta^2-\tau^2}\,d\eta\right)d\tau-$$

$$-\frac{2\xi}{\pi}\int_0^\xi U_p(\tau)\int_\tau^\xi \frac{s(A(s,\tau)-A(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds\,d\tau=f_*(\xi)\quad \forall\,\xi>0, \tag{3.61}$$

в котором

$$A(\xi,\tau):=2\,\mathrm{Re}\,m(\xi,\tau),\qquad B(\xi,\tau):=2\,\mathrm{Im}\,m(\xi,\tau), \tag{3.62}$$

$$f_*(\xi):=\varphi_*(\xi)-\xi\int_0^\xi \frac{s(\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}\,ds \tag{3.63}$$

и функция φ_* *выражается через заданную функцию* $\varphi_{\partial D}$ *равенством*

$$\varphi_*(\xi):=\frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}}\Big(\varphi_{\partial D}(x,r)-\varphi_{\partial D}(b_2,0)\Big), \tag{3.64}$$

где $x+ir=\sigma_+(\frac{\xi-i}{\xi+i})$*;*

2) *если в сингулярном интегральном уравнении* (3.61) *функции* A,B,f_* *определены равенствами* (3.62), (3.63) *и функция* U_p *является таким его решением, что функция*

$$F_0(z)=-\frac{2(\xi+i)}{\pi\sigma'_+(\frac{\xi-i}{\xi+i})}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U_p(|\tau|)}{\tau-\xi}\,d\tau,\ \ z=\sigma_+\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)\in D_z^+,\mathrm{Im}\,\xi>0, \tag{3.65}$$

непрерывно продолжается из области D_z^+ *на границу* ∂D_z^+*, то функция*

$$F(z)=\varphi_{\partial D}(b_2,0)+F_0(z) \tag{3.66}$$

является решением внутренней вспомогательной задачи для предельных значений потенциала $\varphi_{\partial D}$.

Доказательство. Перепишем интегральное уравнение (3.53) в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z}\frac{F(t)-\varphi_{\partial D}(b_2,0)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^-}\,dt=\varphi_{\partial D}(x,r)-\varphi_{\partial D}(b_2,0)\,. \tag{3.67}$$

Введем в рассмотрение функцию $F_0(t) := F(t) - \varphi_{\partial D}(b_2,0)$ и выполним ряд преобразований интегрального уравнения (3.67). Вследствие теоремы Коши и голоморфности функции F_0 в области D_z получаем равенства

$$\int\limits_{\Gamma^\gamma_{z\bar{z}}}\frac{F_0(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^-}\,dt=-\int\limits_{\Gamma^\gamma_{z\bar{z}}}\frac{F_0(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^-}\,dt=$$

$$=\int\limits_{\partial D^\pm_z\setminus\Gamma^\gamma_{z\bar{z}}}\frac{F_0(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^-}\,dt=\int\limits_{\partial D^\pm_z\setminus\Gamma^\gamma_{z\bar{z}}}\frac{F_0(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^-}\,dt\,.$$

Итак, интегральное уравнение (3.67) приводится к уравнению

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma^\gamma_{z\bar{z}}}\frac{F_0(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^-}\,dt=\varphi_{\partial D}(x,r)-\varphi_{\partial D}(b_2,0)\,. \tag{3.68}$$

Используя конформное отображение $z=\sigma_+(Z)$ единичного круга на область D^+_z и обозначая через $C_{z\bar{z}}$ прообраз дуги $\Gamma^\gamma_{z\bar{z}}$ при этом отображении, преобразуем уравнение (3.68) к виду

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{C_{z\bar{z}}}\frac{F_0(\sigma_+(T))\sigma'_+(T)}{(\sqrt{(\sigma_+(T)-\sigma_+(Z))(\sigma_+(T)-\sigma_+(\bar{Z}))}\;)^-}\,dT=$$

$$=\varphi_{\partial D}(\operatorname{Re}\sigma_+(Z),\operatorname{Im}\sigma_+(Z))-\varphi_{\partial D}(b_2,0)\,. \tag{3.69}$$

Введем в рассмотрение непрерывную ветвь $\sqrt{(T-Z)(T-\bar{Z})}$ функции $Q(T)=\sqrt{(T-Z)(T-\bar{Z})}$, аналитической вне разреза вдоль кривой $C_{z\bar{z}}$, такую, что $Q(T)>0$ при всех $T\in\mathbb{R}\;:\;T>-1$. При $T\in C_{z\bar{z}}$ выражение $\sqrt{(T-Z)(T-\bar{Z})}$ понимаем как значение функции $Q(T)$ на правом краю разреза, то есть

$$\sqrt{(T-Z)(T-\bar{Z})}:=\lim_{W\to T\in C_{z\bar{z}},|W|>1}\sqrt{(W-Z)(W-\bar{Z})}\,.$$

Легко устанавливается равенство

$$\left(\sqrt{(\sigma_+(T)-\sigma_+(Z))(\sigma_+(T)-\sigma_+(\bar Z))}\,\right)^- = \frac{\sqrt{(T-Z)(T-\bar Z)}}{M_+(Z,T)}\ ,$$

с учетом которого уравнение (3.69) приводится к виду

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{C_{z\bar z}} \frac{F_+(T)\sigma'_+(T)\ M_+(Z,T)}{\sqrt{(T-Z)(T-\bar Z)}}\,dT =$$
$$= \varphi_{\partial D}(\operatorname{Re}\sigma_+(Z),\operatorname{Im}\sigma_+(Z)) - \varphi_{\partial D}(b_2,0)\,. \qquad (3.70)$$

где $F_+(T) := F_0(\sigma_+(T))$.

Выполним теперь конформное отображение $\xi = i\,\frac{1+Z}{1-Z}$ комплексной плоскости. При этом отображении образом дуги $C_{z\bar z}$ является отрезок $[-|\xi|,|\xi|]$, причем точки $T,\bar T$ дуги $C_{z\bar z}$, симметричные относительно действительной прямой, отображаются соответственно в точки τ и $-\tau$ отрезка $[-|\xi|,|\xi|]$, симметричные относительно точки 0. С учетом равенства

$$\sqrt{(T-Z)(T-\bar Z)} = -\frac{2i}{(\tau+i)\,\sqrt{\xi^2+1}}\,\sqrt{\xi^2-\tau^2}\quad \forall T\in C_{z\bar z}\,,$$

в котором соответствующие точки $T\in C_{z\bar z}$ и $\tau\in[-|\xi|,|\xi|]$ связаны соотношениям $T=\frac{\tau-i}{\tau+i}$, указанным конформным отображением плоскости уравнение (3.70) приводится к интегральному уравнению

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{-|\xi|}^{|\xi|} \frac{F_*(\tau)\ m(\xi,\tau)}{\sqrt{\xi^2-\tau^2}}\,d\tau = \varphi_*(\xi)\qquad \forall\,\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\,, \qquad (3.71)$$

где функция $F_*(\tau) := \frac{iF_\pm(T)\sigma'_\pm(T)}{2(\tau+i)}$ голоморфна в полуплоскости $\{\tau\in\mathbb{C}\ :\ \operatorname{Im}\tau>0\}$, непрерывно продолжается на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и обращается в нуль на бесконечности.

Ввиду четности функции φ_* уравнение (3.71) равносильно уравнению

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\xi} \frac{F_*(\tau)m(\xi,\tau)+F_*(-\tau)m(\xi,-\tau)}{\sqrt{\xi^2-\tau^2}}\,d\tau = \varphi_*(\xi)\qquad \forall\,\xi>0. \quad (3.72)$$

Полагая в равенстве (3.72) $\xi = s$, а затем умножая обе его части на $s(\xi^2-s^2)^{-1/2}$ и, наконец, интегрируя по переменной s на отрезке $[0,\xi]$, получаем равенство

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\xi}\frac{s}{\sqrt{\xi^2-s^2}}\int\limits_0^{s}\frac{F_*(\tau)m(s,\tau)+F_*(-\tau)m(s,-\tau)}{\sqrt{s^2-\tau^2}}\,d\tau\,ds=\int\limits_0^{\xi}\frac{s\,\varphi_*(s)}{\sqrt{\xi^2-s^2}}\,ds.$$

Изменяя порядок интегрирования в повторном интеграле, из этого равенства получаем

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\xi}\int\limits_{\tau}^{\xi}\frac{s\,(F_*(\tau)m(s,\tau)+F_*(-\tau)m(s,-\tau))}{\sqrt{(\xi^2-s^2)(s^2-\tau^2)}}\,ds\,d\tau=\int\limits_0^{\xi}\frac{s\,\varphi_*(s)}{\sqrt{\xi^2-s^2}}\,ds. \quad (3.73)$$

Далее, дифференцируя равенство (3.73) по переменной ξ и учитывая при этом равенства (3.56), (3.57), получаем

$$-\frac{2\xi}{\pi}\int\limits_0^{\xi}\int\limits_{\tau}^{\xi}\frac{s\,[F_*(\tau)(m(s,\tau)-m(\xi,\tau))+F_*(-\tau)(m(s,-\tau)-m(\xi,\tau))]}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds\,d\tau+$$

$$+F_*(\xi)m(\xi,\xi)+F_*(-\xi)m(\xi,-\xi)=f_*(\xi)\,. \quad (3.74)$$

Очевидно, что при всех $\tau\in\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$m(\xi,-\tau)=\overline{m(\xi,\tau)}. \quad (3.75)$$

Функция F_*, в свою очередь, удовлетворяет соотношению

$$F_*(-\tau)=\overline{F_*(\tau)}\qquad\forall\,\tau\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\,. \quad (3.76)$$

Действительно, рассматривая отображение $\mu_+(\tau):=\sigma_+(\frac{\tau-i}{\tau+i})$ полуплоскости $\{\tau\in\mathbb{C}\ :\ \operatorname{Im}\tau\geq 0\}$ на множество $\overline{D_z^+}$, замечаем, что образом точек τ и $-\tau$ прямой $\mathbb{R}$ при этом отображении являются соответственно точки t и $\bar{t}$ границы ∂D_z^+, симметричные относительно вещественной прямой. Поэтому выполняется равенство

$$\mu'_+(-\tau)=-\overline{\mu'_+(\tau)}\qquad\forall\,\tau\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\,. \quad (3.77)$$

Теперь с учетом тождества

$$\sigma'_+(T)=\frac{(\tau+i)^2}{2i}\,\mu'_+(\tau)\qquad\forall\,\tau\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

преобразуем выражение $F_*(\tau)$ к виду

$$F_*(\tau)=\frac{1}{4}\,F_+\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)\mu'_+(\tau)(\tau+i)$$

и, как следствие соотношений (3.15), (3.77), получим равенство (3.76).

Введем в рассмотрение функции $U_p(\xi) := \operatorname{Re} F_*(\xi), V_p(\xi) := \operatorname{Im} F_*(\xi)$ и с учетом соотношений (3.75), (3.76) перепишем равенство (3.74) в виде

$$A(\xi,\xi)U_p(\xi) - B(\xi,\xi)V_p(\xi) - \frac{2\xi}{\pi}\int\limits_0^\xi U_p(\tau)\int\limits_\tau^\xi \frac{s(A(s,\tau)-A(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds\,d\tau +$$

$$+\frac{2\xi}{\pi}\int\limits_0^\xi V_p(\tau)\int\limits_\tau^\xi \frac{s(B(s,\tau)-B(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds\,d\tau = f_*(\xi)\,. \tag{3.78}$$

Используя формулу Гильберта (см. [8, с. 93]) для обращения сингулярного интеграла Коши и учитывая четность функции U_p, имеем

$$V_p(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{U_p(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau = -\frac{2\xi}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{U_p(\tau)}{\tau^2-\xi^2}\,d\tau \qquad \forall\,\xi>0\,. \tag{3.79}$$

Наконец, подставляя выражение (3.79) функции V_p в равенство (3.78), получаем сингулярное интегральное уравнение (3.61) для нахождения функции U_p. Таким образом, утверждение 1 теоремы доказано, а для завершения доказательства утверждения 2 остается заметить, что функция F_0 выражается через функцию U_p по формуле (3.65) в результате решения задачи Шварца для полуплоскости [31, с. 209].

18.3. Вспомогательные утверждения. Прежде, чем приступить к регуляризации сингулярного интегрального уравнения (3.61), докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 3.1. *Пусть функция $\varphi_* : (0,\infty) \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\xi\to\infty}\varphi_*(\xi) = 0, \tag{3.80}$$

$$|\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi)| \le c\,\frac{|s-\xi|^\alpha}{s^{\alpha_\infty}\,\xi^\alpha} \qquad \forall\, s,\xi : 1 \le s < \xi\,, \tag{3.81}$$

$$|\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi)| \le c\,\frac{|s-\xi|^\alpha}{s^{\alpha_0}\,\xi^{\alpha_1}} \qquad \forall\, s,\xi : 0 < s < \xi \le 3\,, \tag{3.82}$$

где $\alpha \in (1/2;1]$, $\alpha_\infty \in (0;\infty)$, $\alpha_0 \in [0;2)$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, а постоянная c не зависит от s и ξ. Тогда для функции (3.63) справедливы оценки

$$|f_*(\xi)| \le \frac{c}{\xi^{\beta_\infty}} \qquad \forall\,\xi \ge 2\,, \tag{3.83}$$

$$|f_*(\xi)| \le \frac{c}{\xi^{\beta_0}} \qquad \forall\, \xi \in (0;2)\,, \tag{3.84}$$

$$|f_*(\xi+\varepsilon) - f_*(\xi)| \le c\left(\frac{\varepsilon^{\alpha-1/2}}{\xi^{\beta_2}} + \frac{\varepsilon}{\xi^{\beta_\infty+1}}\right) \quad \forall\, \xi \ge 2\ \forall\, \varepsilon \in (0;\xi/2]\,, \tag{3.85}$$

$$|f_*(\xi+\varepsilon) - f_*(\xi)| \le c\left(\frac{\varepsilon^{\alpha-1/2}}{\xi^{\beta_1}} + \frac{\varepsilon}{\xi^{\beta_0+1}}\right) \ \forall\, \xi \in (0;2)\ \forall\, \varepsilon \in (0;\xi/2]\,, \tag{3.86}$$

где $\beta_\infty := \min\{2;\alpha_\infty\}$, $\beta_0 := \max\{\alpha_0, \alpha_0+\alpha_1-\alpha\}$, $\beta_1 := \alpha_0+\alpha_1-1/2$, $\beta_2 := \alpha+\alpha_\infty-1/2$, *а постоянная* c *не зависит от* ξ *и* ε.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что очевидным образом из условий (3.80), (3.81) следует неравенство

$$|\varphi_*(s)| \le \frac{c}{s^{\alpha_\infty}} \qquad \forall\, s \ge 1\,, \tag{3.87}$$

а из условия (3.82) — неравенство

$$|\varphi_*(s)| \le \frac{c}{s^{\alpha_0}} \qquad \forall\, s \in (0;3]\,, \tag{3.88}$$

в которых постоянная c не зависит от s.

Оценим сначала $|f_*(\xi)|$ при $\xi \ge 2$ суммой пяти слагаемых:

$$|f_*(\xi)| \le |\varphi_*(\xi)| + \xi\int\limits_0^1 \frac{s|\varphi_*(s)|}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}ds + \xi|\varphi_*(\xi)|\int\limits_0^1 \frac{sds}{(\xi^2-s^2)^{3/2}} +$$

$$+\xi\int\limits_1^{\xi/2} \frac{s|\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi)|}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}ds + \xi\int\limits_{\xi/2}^{\xi} \frac{s|\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi)|}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}ds =: \sum_{j=1}^{5} S_j(\xi)\,.$$

При оценке слагаемых $S_j(\xi)$ через c будем обозначать различные постоянные, которые не зависят от ξ.

Для первого слагаемого $S_1(\xi)$ справедлива оценка (3.87). Учитывая неравенство (3.88), получаем оценку второго слагаемого:

$$S_2(\xi) \le \frac{c}{\xi^2}\int\limits_0^1 s^{1-\alpha_0}ds \le \frac{c}{\xi^2}\,.$$

Для третьего слагаемого, учитывая неравенство (3.87), имеем оценку

$$S_3(\xi) \le \frac{c}{\xi^{2+\alpha_\infty}}\,.$$

Четвертое слагаемое оценивается с учетом условия (3.81) и очевидного неравенства $\xi^2 - s^2 \geq 3\,\xi^2/4$ при $s \in [1;\xi/2]$:

$$S_4(\xi) \leq \frac{c}{\xi^2}\int\limits_1^{\xi/2} s^{1-\alpha_\infty}\,ds \leq c\left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\xi^{\alpha_\infty}}\right).$$

Также с учетом условия (3.81) и очевидного неравенства $\xi^2 - s^2 \geq$ $\geq 3\,\xi(\xi-s)/2$ при $s \in [\xi/2,\xi]$ устанавливается оценка пятого слагаемого:

$$S_5(\xi) \leq \frac{c}{\xi^{\alpha+\alpha_\infty-1/2}}\int\limits_{\xi/2}^{\xi} |s-\xi|^{\alpha-3/2}\,ds \leq \frac{c}{\xi^{\alpha_\infty}}\,.$$

Очевидным следствием полученных оценок слагаемых $S_1(\xi)$, $S_2(\xi)$, …, $S_5(\xi)$ является неравенство (3.83).

При $\xi \in (0;2)$ оценим $|f_*(\xi)|$ суммой трех слагаемых:

$$|f_*(\xi)| \leq |\varphi_*(\xi)| + \xi\int\limits_0^{\xi/2}\frac{s|\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi)|}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}ds + \xi\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\frac{s|\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi)|}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}ds =:$$

$$=: s_1(\xi)+s_2(\xi)+s_3(\xi). \tag{3.89}$$

Для слагаемого $s_1(\xi)$ справедлива оценка (3.88). Слагаемые $s_2(\xi)$, $s_3(\xi)$ оцениваются таким же способом, как соответственно слагаемые $S_4(\xi)$, $S_5(\xi)$ при доказательстве неравенства (3.83). В этом случае, используя условие (3.82) вместо условия (3.81), получаем оценки

$$s_2(\xi) \leq \frac{c}{\xi^{\alpha_0+\alpha_1-\alpha}}, \qquad s_3(\xi) \leq \frac{c}{\xi^{\alpha_0+\alpha_1-\alpha}}\,,$$

в которых постоянная c не зависит от ξ. Таким образом, неравенство (3.84) доказано.

Оценим теперь $|f_*(\xi_1)-f_*(\xi_2)|$ при $0<\xi_1<\xi_2$, $\xi_2-\xi_1 =: \varepsilon \leq \xi_1/2$ суммой шести слагаемых:

$$|f_*(\xi_1)-f_*(\xi_2)| \leq |\varphi_*(\xi_1)-\varphi_*(\xi_2)| + |\xi_1-\xi_2|\left|\int\limits_0^{\xi_1}\frac{s(\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi_1))}{(\xi_1^2-s^2)^{3/2}}ds\right| +$$

$$+\xi_2\int\limits_{\xi_1-\varepsilon}^{\xi_1}\frac{s|\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi_1)|}{(\xi_1^2-s^2)^{3/2}}ds + \xi_2\int\limits_{\xi_1-\varepsilon}^{\xi_2}\frac{s|\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi_2)|}{(\xi_2^2-s^2)^{3/2}}ds +$$

$$+\xi_2 \; |\varphi_*(\xi_1) - \varphi_*(\xi_2)| \int\limits_0^{\xi_1-\varepsilon} \frac{s\; ds}{(\xi_2^2 - s^2)^{3/2}} +$$

$$+\xi_2 \int\limits_0^{\xi_1-\varepsilon} s \; |(\xi_1^2 - s^2)^{-3/2} - (\xi_2^2 - s^2)^{-3/2}| \; |\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi_1)| \; ds =: \sum_{j=1}^{6} S_j.$$

В дальнейшем доказательстве через c будем обозначать постоянные, значения которых, вообще говоря, различны и не зависят от ξ_1, ξ_2 и ε.

Оценим слагаемые S_j при $\xi_1 \geq 2$. Заметим, что очевидными следствиями условия (3.81) являются неравенства

$$S_1 \leq \frac{c}{\xi_1^{\alpha+\alpha_\infty}} \; \varepsilon^{\alpha} \,, \qquad S_5 \leq \frac{c}{\xi_1^{\beta_2}} \; \varepsilon^{\alpha-1/2} \,.$$

Оценивая слагаемые S_3 и S_4 таким же способом, как выше оценено $S_5(\xi)$, получаем неравенства

$$S_3 \leq \frac{c}{\xi_1^{\beta_2}} \; \varepsilon^{\alpha-1/2} \,, \qquad S_4 \leq \frac{c}{\xi_1^{\beta_2}} \; \varepsilon^{\alpha-1/2} \,.$$

Кроме того, выполняются неравенства

$$S_2 \leq \; \frac{c}{\xi_1} \; \varepsilon \; \sum_{j=2}^{5} S_j(\xi_1) \leq \; \frac{c}{\xi_1^{1+\beta_\infty}} \; \varepsilon \,.$$

С учетом равенства

$$(\xi_1^2 - s^2)^{-3/2} - (\xi_2^2 - s^2)^{-3/2} = 3 \; \xi_*(\xi_*^2 - s^2)^{-5/2}(\xi_2 - \xi_1), \qquad (3.90)$$

где ξ_* — некоторая точка отрезка $[\xi_1, \xi_2]$, оценим слагаемое S_6 суммой четырех слагаемых:

$$S_6 \leq \xi_2 \int\limits_0^1 s \; \frac{3 \; \xi_2 \; \varepsilon}{(\xi_1^2 - s^2)^{5/2}} \; |\varphi_*(s)| \; ds + \xi_2 \int\limits_0^1 s \; \frac{3 \; \xi_2 \; \varepsilon}{(\xi_1^2 - s^2)^{5/2}} \; |\varphi_*(\xi_1)| \; ds +$$

$$+\xi_2 \int\limits_1^{\xi_1/2} s \, \frac{3 \, \xi_2 \, \varepsilon \, |\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi_1)|}{(\xi_1^2 - s^2)^{5/2}} \, ds + \xi_2 \int\limits_{\xi_1/2}^{\xi_1-\varepsilon} s \, \frac{3 \, \xi_2 \, \varepsilon \, |\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi_1)|}{(\xi_1^2 - s^2)^{5/2}} \, ds =:$$

$$=: S_6^{I} + S_6^{II} + S_6^{III} + S_6^{IV}.$$

Далее, оценивая слагаемые S_6^I, S_6^{II}, S_6^{III}, S_6^{IV} подобно тому, как при доказательстве неравенства (3.83) оценены соответственно слагаемые $S_2(\xi)$, $S_3(\xi)$, $S_4(\xi)$, $S_5(\xi)$, получаем неравенства

$$S_6^I \leq \frac{c}{\xi_1^3}\,\varepsilon\,, \qquad S_6^{II} \leq \frac{c}{\xi_1^{3+\alpha_\infty}}\,\varepsilon\,,$$

$$S_6^{III} \leq c\,\varepsilon\left(\frac{1}{\xi_1^3} + \frac{1}{\xi_1^{1+\alpha_\infty}}\right), \qquad S_6^{IV} \leq \frac{c}{\xi_1^{\beta_2}}\,\varepsilon^{\alpha-1/2}\,.$$

Из полученных оценок слагаемых $S_1, S_2, \ldots, S_6$ при $\xi_1 \geq 2$ очевидным образом следует неравенство (3.85).

Выполним теперь оценку слагаемых S_j при $\xi_1 \in (0;2)$. В этом случае $S_1, S_2, \ldots, S_5$ оцениваются таким же способом, как и при $\xi_1 \geq 2$. Так, используя условие (3.82) вместо условия (3.81), получаем оценки

$$S_1 \leq \frac{c}{\xi_1^{\alpha_0+\alpha_1}}\,\varepsilon^{\alpha}, \;\; S_3 \leq \frac{c}{\xi_1^{\beta_1}}\,\varepsilon^{\alpha-1/2}, \;\; S_4 \leq \frac{c}{\xi_1^{\beta_1}}\,\varepsilon^{\alpha-1/2}, \;\; S_5 \leq \frac{c}{\xi_1^{\beta_1}}\,\varepsilon^{\alpha-1/2},$$

а также оценку

$$S_2 \leq \frac{c}{\xi_1}\,\varepsilon\,\left(s_2(\xi_1) + s_3(\xi_1)\right) \leq \frac{c}{\xi_1^{1+\beta_0}}\,\varepsilon\,.$$

С учетом равенства (3.90) оценим S_6 суммой двух слагаемых:

$$S_6 \leq \xi_2 \int\limits_0^{\xi_1/2} s\,\frac{3\,\xi_2\,\varepsilon\,|\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi_1)|}{(\xi_1^2 - s^2)^{5/2}}\,ds + \xi_2 \int\limits_{\xi_1/2}^{\xi_1-\varepsilon} s\,\frac{3\,\xi_2\,\varepsilon\,|\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi_1)|}{(\xi_1^2 - s^2)^{5/2}}\,ds,$$

которые, в свою очередь, оцениваются подобно тому, как при доказательстве неравенства (3.84) оценены соответственно слагаемые $s_2(\xi)$ и $s_3(\xi)$. Таким образом, получаем оценку

$$S_6 \leq \frac{c}{\xi_1^{\beta_1}}\,\varepsilon^{\alpha-1/2}.$$

Из оценок слагаемых $S_1, S_2, \ldots, S_6$, полученных при $\xi_1 \in (0;2)$, следует неравенство (3.86). Лемма доказана.

Введем в рассмотрение класс $\mathcal{H}_0(\mathbb{R})$ функций $g_* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, для каждой из которых существует предел

$$\lim_{\tau\to\pm\infty} g_*(\tau) =: g_*(\infty)$$

и существуют $\alpha, \alpha_\infty \in (0;1]$ такие, что выполняются оценки

$$|g_*(\tau_1) - g_*(\tau_2)| \leq \ c\,|\tau_1 - \tau_2|^{\alpha} \qquad \forall\, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, \tag{3.91}$$

$$|g_*(\tau) - g_*(\infty)| \leq \ c\,|\tau|^{-\alpha_\infty} \qquad \forall\, \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{3.92}$$

в которых постоянная c не зависит от τ_1, τ_2 и τ.

Лемма 3.2. *Пусть функция* $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ *удовлетворяет условиям*

$$\lim_{s\to\infty} \varphi(s) = 0, \tag{3.93}$$

$$|\varphi(s) - \varphi(\xi)| \leq \ c\,\frac{|s-\xi|^{\alpha}}{s^{\alpha'_\infty}\ \xi^{\alpha}} \qquad \forall\, s, \xi : 1 \leq s < \xi\,, \tag{3.94}$$

$$|\varphi(s) - \varphi(\xi)| \leq \ c\,\frac{|s-\xi|^{\alpha}}{\xi^{\nu}} \qquad \forall\, s, \xi : 0 \leq s < \xi \leq 3\,, \tag{3.95}$$

где $\alpha \in (1/2;1]$, $\alpha'_\infty \in (0;\alpha]$, $\nu \in [0;\alpha)$, *а постоянная* c *не зависит от* s *и* ξ. *Тогда функция*

$$h_*(\xi) := \begin{cases} (\xi + i)\ f_*(\xi) & \textit{при} \quad \xi \geq 0\,, \\ (\xi + i)\ f_*(-\xi) & \textit{при} \quad \xi < 0\,, \end{cases}$$

принадлежит классу $\mathcal{H}_0(\mathbb{R})$ *и*

$$\lim_{\xi\to\infty} h_*(\xi) = 0\,, \tag{3.96}$$

при этом f_* *задается формулой* (3.63), *в которой*

$$\varphi_*(\xi) := \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{\xi^2+1}} \qquad \forall\, \xi \geq 0\,.$$

Доказательство. Легко устанавливается, что для функции φ_* выполняются условия (3.81), (3.82) при $\alpha_\infty = \alpha'_\infty + 1$, $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = \nu$. Отсюда, в частности, следует, что полученные при доказательстве леммы 3.1 оценки выражений $s_2(\xi)$ и $s_3(\xi)$, определенных в равенстве (3.89), принимают вид $s_2(\xi) \leq \ c\,\xi^{\alpha-\nu}$ и $s_3(\xi) \leq \ c\,\xi^{\alpha-\nu}$, где постоянная c не зависит от ξ. Очевидными следствиями этих оценок являются равенство $f_*(0) = \varphi_*(0)$ и неравенство

$$|f_*(\xi) - f_*(0)| \leq \ c\,\xi^{\alpha-\nu} \qquad \forall\, \xi \in (0;2), \tag{3.97}$$

в котором постоянная c не зависит от ξ.

Теперь с учетом неравенства (3.97) и оценок (3.83) – (3.86) легко устанавливается выполнимость условий вида (3.91), (3.92) для функции h_*, а также равенство (3.96). Лемма доказана.

Обозначим через $C_{\mathbb{R}}$ банахово пространство функций $g_* : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, непрерывных на расширенной вещественной прямой $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, с нормой

$$\|g_*\|_{C_{\mathbb{R}}} := \sup_{\tau \in \mathbb{R}} |g_*(\tau)| .$$

При этом введем в рассмотрение модуль непрерывности

$$\omega_{\mathbb{R}}(g_*, \varepsilon) := \sup_{\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R},\, |\tau_1 - \tau_2| \le \varepsilon} |g_*(\tau_1) - g_*(\tau_2)| ,$$

а также локальный центрированный (относительно бесконечно удаленной точки) модуль непрерывности

$$\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*, \varepsilon) := \sup_{\tau \in \mathbb{R},\, |\tau| \ge 1/\varepsilon} |g_*(\tau) - g_*(\infty)|$$

функции $g_* \in C_{\mathbb{R}}$. Теперь через $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ обозначим класс функций $g_* \in C_{\mathbb{R}}$, модули непрерывности которых удовлетворяют условиям Дини:

$$\int_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R}}(g_*, \eta)}{\eta}\, d\eta < \infty, \qquad \int_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*, \eta)}{\eta}\, d\eta < \infty. \tag{3.98}$$

Рассмотрим также модуль непрерывности

$$\omega_C(g, \varepsilon) := \sup_{|Z_1| = |Z_2| = 1,\, |Z_1 - Z_2| \le \varepsilon} |g(Z_1) - g(Z_2)|$$

функции g, заданной на единичной окружности $C := \{Z \in \mathbb{C} \,:\, |Z| = 1\}$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Если модули непрерывности функции $g_* : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ при $k \ge 0$ удовлетворяют условиям*

$$\int_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R}}(g_*, \eta)}{\eta} \left(\ln \frac{1}{\eta}\right)^k d\eta < \infty\,, \quad \int_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*, \eta)}{\eta} \left(\ln \frac{1}{\eta}\right)^k d\eta < \infty, \tag{3.99}$$

то модуль непрерывности функции $g(Z) := g_*(\xi)$, где $Z = \frac{\xi - i}{\xi + i}$ и $\xi \in \mathbb{R}$, в свою очередь, удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \frac{\omega_C(g, \eta)}{\eta} \left(\ln \frac{1}{\eta}\right)^k d\eta < \infty\,. \tag{3.100}$$

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < 1/4$ и $z_1, z_2 \in C \ : \ |z_2 - z_1| = \varepsilon$. Оценим $|g(z_1) - g(z_2)|$ в следующих случаях расположения точек z_1, z_2 на окружности C.

В случае $\operatorname{Re} z_1 \le 1/4$ выполняются неравенства $|z_1 - 1| > 3/4$, $|z_2 - 1| > 1/2$, с использованием которых легко устанавливается оценка $\left| i \, \frac{1+z_1}{1-z_1} - i \, \frac{1+z_2}{1-z_2} \right| < 6\,\varepsilon$; поэтому $|g(z_1) - g(z_2)| < \omega_{\mathbb{R}}(g_*, 6\,\varepsilon)$.

В случае $|z_1 - 1| \le 2\sqrt[4]{\varepsilon}$ выполняется неравенство $|z_2 - 1| \le 3\sqrt[4]{\varepsilon}$, поэтому получаем соотношения $|g(z_1) - g(z_2)| \le |g(z_1) - g(1)| + |g(1) - g(z_2)| \le 2\,\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*, 3\sqrt[4]{\varepsilon})$.

Наконец, в случае, когда $\operatorname{Re} z_1 > 1/4$ и $|z_1 - 1| > 2\sqrt[4]{\varepsilon}$, выполняется неравенство $|z_2 - 1| > \sqrt[4]{\varepsilon}$ и поэтому легко устанавливается оценка $\left| i \, \frac{1+z_1}{1-z_1} - i \, \frac{1+z_2}{1-z_2} \right| < \sqrt{\varepsilon}$, из которой следует соотношение $|g(z_1) - g(z_2)| \le \omega_{\mathbb{R}}(g_*, \sqrt{\varepsilon})$.

Очевидным следствием полученных соотношений является оценка

$$\omega_C(g, \varepsilon) \le \omega_{\mathbb{R}}(g_*, 6\,\varepsilon) + \omega_{\mathbb{R}}(g_*, \sqrt{\varepsilon}) + 2\,\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*, 3\sqrt[4]{\varepsilon})\,. \tag{3.101}$$

Теперь условие (3.100) является следствием оценки (3.101) и условий (3.99). Лемма доказана.

При регуляризации сингулярного интегрального уравнения (3.61) используется перестановка порядка интегрирования в повторных интегралах, которые являются композицией сингулярного и регулярного интегралов по вещественной прямой. В монографиях [8, 51] доказана возможность изменения порядка интегрирования при классических предположениях о кривой интегрирования, плотности сингулярного интеграла и ядре регулярного интеграла. В работах [55, 56] аналогичные результати получены на замкнутом контуре интегрирования при более общих предположениях о нем и заданных функциях. Нам понадобится следующий результат об изменении порядка интегрирования в повторных интегралах по вещественной прямой, который не следует непосредственно из результатов работ [8, 51, 55, 56].

Лемма 3.4. *Пусть функция U_* принадлежит классу $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ и обращается в нуль в бесконечно удаленной точке, а для функции $\widehat{m}(\xi, \tau)$ справедливы оценки*

$$|\widehat{m}(\xi, \tau)| \le \Omega(\xi, \tau) \qquad \forall\, \xi, \tau \, : \, 0 < \tau < \xi, \tag{3.102}$$

$$|\widehat{m}(\xi, s) - \widehat{m}(\xi, \tau)| \le \Omega(\xi, \tau) \left(\frac{s - \tau}{\xi - \tau} \right)^{\beta} \quad \forall\, \xi, s, \tau \, : \, 0 < \tau < s < \xi, \tag{3.103}$$

где $\beta \in (0; 1]$ и функция $\Omega(\xi, \tau)$ удовлетворяет условиям

$$\sup_{\tau \in [0, s]} \Omega(\xi, \tau) \le \ c(\xi, s) \quad \forall\, \xi, s \, : \, 0 < s < \xi, \tag{3.104}$$

$$\int\limits_0^\xi \sup_{\tau\,:\,\eta\le\xi-\tau\le 2\eta} \Omega(\xi,\tau)\ \ln\frac{\xi}{\eta}\,d\eta \le\ c(\xi), \tag{3.105}$$

в которых постоянные $c(\xi,s)$, $c(\xi)$ *зависят только от объектов, указанных в скобках.*

Тогда при всех $\xi>0$ *выполняется равенство*

$$\int\limits_0^\xi \widehat{m}(\xi,\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{U_*(s)}{s-\tau}\,ds\,d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty}U_*(s)\int\limits_0^\xi\frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\,d\tau\,ds. \tag{3.106}$$

Доказательство. Пусть $N>2\xi$, $0<\varepsilon<\xi/16$. Представим каждый из повторных интегралов, входящих в равенство (3.106), суммой трех интегралов:

$$I := \int\limits_{-\infty}^{\infty}U_*(s)\int\limits_0^\xi\frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\,d\tau\,ds =$$

$$=\Big(\int\limits_{-\infty}^{-N}+\int\limits_N^{\infty}\Big)U_*(s)\int\limits_0^\xi\frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\,d\tau\,ds+\int\limits_{-N}^{N}U_*(s)\int\limits_{\{\tau\in[0,\xi]\,:\,|\tau-s|>\varepsilon\}}\frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\,d\tau\,ds+$$

$$+\int\limits_{-N}^{N}U_*(s)\int\limits_{\{\tau\in[0,\xi]\,:\,|\tau-s|\le\varepsilon\}}\frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\,d\tau\,ds =: I_1+I_2+I_3,$$

$$I^* := \int\limits_0^\xi \widehat{m}(\xi,\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{U_*(s)}{s-\tau}\,ds\,d\tau =$$

$$=\int\limits_0^\xi \widehat{m}(\xi,\tau)\Big(\int\limits_{-\infty}^{-N}+\int\limits_N^{\infty}\Big)\frac{U_*(s)}{s-\tau}\,ds\,d\tau+\int\limits_0^\xi \widehat{m}(\xi,\tau)\Big(\int\limits_{-N}^{\tau-\varepsilon}+\int\limits_{\tau+\varepsilon}^{N}\Big)\frac{U_*(s)}{s-\tau}\,ds\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^\xi \widehat{m}(\xi,\tau)\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\frac{U_*(s)}{s-\tau}\,ds\,d\tau =: I_1^*+I_2^*+I_3^*.$$

Согласно теореме Фубини выполняется равенство $I_2=I_2^*$. В силу соотношений (3.102), (3.105) и предположения о том, что $U_*\in\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ и

$U_*(\infty) = 0$, интегралы I_1, I_1^* стремятся к нулю при $N \to \infty$, а интеграл I_3^* стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Покажем теперь, что интеграл I_3 также стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. С этой целью представим его в виде

$$I_3 = \int\limits_{\xi}^{\xi+\varepsilon} U_*(s) \int\limits_{s-\varepsilon}^{\xi} \frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds + \int\limits_{-\varepsilon}^{0} U_*(s) \int\limits_{0}^{s+\varepsilon} \frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds +$$

$$+ \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} U_*(s) \int\limits_{s-\varepsilon}^{\xi} \frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds + \int\limits_{0}^{\varepsilon} U_*(s) \int\limits_{0}^{s+\varepsilon} \frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds +$$

$$+ \int\limits_{\varepsilon}^{8\varepsilon} U_*(s) \int\limits_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds + \int\limits_{\xi-8\varepsilon}^{\xi-\varepsilon} U_*(s) \int\limits_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds +$$

$$+ \int\limits_{8\varepsilon}^{\xi-8\varepsilon} U_*(s) \int\limits_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds =: \sum_{j=1}^{7} I_3^j.$$

Учитывая теорему Фубини, оценку (3.102) и условие (3.105), получаем

$$|I_3^1| \le \|U_*\|_{C_{\mathbb{R}}} \int\limits_{\xi}^{\xi+\varepsilon} \int\limits_{s-\varepsilon}^{\xi} \frac{|\widehat{m}(\xi,\tau)|}{s-\tau}\, d\tau\, ds = \|U_*\|_{C_{\mathbb{R}}} \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} |\widehat{m}(\xi,\tau)| \int\limits_{\xi}^{\tau+\varepsilon} \frac{ds}{s-\tau}\, d\tau =$$

$$= \|U_*\|_{C_{\mathbb{R}}} \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} |\widehat{m}(\xi,\tau)| \;\ln \frac{\varepsilon}{\xi-\tau}\; d\tau \le$$

$$\le \|U_*\|_{C_{\mathbb{R}}} \int\limits_{0}^{\varepsilon} \sup_{\tau\,:\,\eta\le\xi-\tau\le 2\eta} \Omega(\xi,\tau)\;\ln\frac{\varepsilon}{\eta}\; d\eta \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Учитывая дополнительно условие (3.104), аналогично устанавливаем, что $I_3^2 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Введем в рассмотрение множества $e_1 := [s - (\xi - s)/4, s + (\xi - s)/4]$, $e_2 := [s - \varepsilon, \xi] \setminus e_1$ и представим I_3^3 в виде суммы двух интегралов:

$$I_3^3 = \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} U_*(s) \int\limits_{e_1} \frac{\widehat{m}(\xi,\tau) - \widehat{m}(\xi,s)}{s-\tau}\, d\tau\, ds + \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} U_*(s) \int\limits_{e_2} \frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds =: i_1 + i_2.$$

Теперь с учетом оценки (3.103) и условия (3.105) получаем соотношения

$$|i_1| \le c(\beta)\, \|U_*\|_{C_{\mathbb{R}}} \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} (\xi-s)^{-\beta} \sup_{\tau\,:\,3(\xi-s)/4\le\xi-\tau\le5(\xi-s)/4} \Omega(\xi,\tau) \int\limits_{e_1} |s-\tau|^{\beta-1}\, d\tau\, ds \le$$

$$\le c(\beta)\ \|U_*\|_{C_{\mathbb{R}}} \int\limits_0^{4\varepsilon/3} \sup_{\tau\,:\,\eta\le\xi-\tau\le2\eta} \Omega(\xi,\tau)\ d\eta \to 0, \quad \varepsilon\to 0,$$

где через $c(\beta)$ обозначены различные постоянные, которые зависят только от β.

Так же, как и при оценке интеграла I_3^1, устанавливается, что $i_2 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, $I_3^3 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Аналогично устанавливается, что интегралы I_3^4, I_3^5, I_3^6 также стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. И, наконец, подобно оценке интеграла i_1 получаем

$$|I_3^7| \le\ c(\beta)\ \|U_*\|_{C_{\mathbb{R}}}\ \varepsilon^{\beta} \int\limits_{7\varepsilon}^{\xi-7\varepsilon} \sup_{\tau\ :\ \eta\le\xi-\tau\le2\eta} \Omega(\xi,\tau)\ \frac{d\eta}{\eta^{\beta}} \to 0, \quad \varepsilon\to 0.$$

Следствием полученных соотношений является равенство

$$\lim_{N\to\infty}\ \lim_{\varepsilon\to 0}\ (I - I^*) = 0, \tag{3.107}$$

из которого в силу того, что интегралы I, I^* не зависят ни от N, ни от ε, следует равенство (3.106). Лемма доказана.

Далее в этом параграфе предполагаем, что область D_z^+ имеет гладкую границу ∂D_z^+ и такая, что конформное отображение $\sigma_+(Z)$ имеет на единичной окружности непрерывную контурную производную, которая не обращается в нуль. В этом случае при всех $T_0, T_1, Z_1, Z_0 \in \{Z\in\mathbb{C} : |Z| = 1\}$ таких, что $-1 < \operatorname{Re} T_0 < \operatorname{Re} T_1 < \operatorname{Re} Z_1 < \operatorname{Re} Z_0 < 1$, $\operatorname{Im} T_1 \operatorname{Im} T_0 > 0$, $\operatorname{Im} Z_1 \operatorname{Im} T_0 > 0$ и $\operatorname{Im} Z_0 \operatorname{Im} T_0 > 0$, справедливы оценки

$$\left|\frac{\sigma_+(T_0)-\sigma_+(Z_1)}{T_0-Z_1} - \frac{\sigma_+(T_0)-\sigma_+(Z_0)}{T_0-Z_0}\right| \le$$
$$\le c\ \frac{\omega(\sigma'_+, |T_0-Z_0|)}{|T_0-Z_0|}\ |Z_1-Z_0|, \tag{3.108}$$

$$\left|\frac{\sigma_+(T_1)-\sigma_+(Z_0)}{T_1-Z_0} - \frac{\sigma_+(T_0)-\sigma_+(Z_0)}{T_0-Z_0}\right| \le$$

$$\leq\ c\,\frac{\omega(\sigma'_+,|T_0-Z_0|)}{|T_0-Z_0|}\ |T_1-T_0|, \tag{3.109}$$

где c — некоторая абсолютная постоянная.

С учетом того, что при сделанных предположениях об отображении σ_+ при всех $T,Z\in\{Z\in\mathbb{C}\ :\ |Z|=1\}$ выполняются неравенства

$$0<c_1\leq\left|\frac{\sigma_+(T)-\sigma_+(Z)}{T-Z}\right|\leq c_2\,,$$

из (3.108), (3.109) следуют аналогичные оценки для функции (3.54):

$$|M_+(Z_1,T_0)-M_+(Z_0,T_0)|\leq\ c\,\frac{\omega(\sigma'_+,|T_0-Z_0|)}{|T_0-Z_0|}\ |Z_1-Z_0|, \tag{3.110}$$

$$|M_+(Z_0,T_1)-M_+(Z_0,T_0)|\leq\ c\,\frac{\omega(\sigma'_+,|T_0-Z_0|)}{|T_0-Z_0|}\ |T_1-T_0| \tag{3.111}$$

при всех $T_0,T_1,Z_1,Z_0\in\{Z\in\mathbb{C}:|Z|=1\}$ таких, что $-1<\operatorname{Re}T_0<$ $<\operatorname{Re}T_1<\operatorname{Re}Z_1<\operatorname{Re}Z_0<1$, $\operatorname{Im}T_1\operatorname{Im}T_0>0$, $\operatorname{Im}Z_1\operatorname{Im}T_0>0$, $\operatorname{Im}Z_0\operatorname{Im}T_0>0$, где c, c_1, c_2 — некоторые абсолютные постоянные.

Очевидно, что из оценки (3.110) следует оценка (3.60). Оценки (3.110), (3.111) существенно используются при доказательстве следующей леммы.

Лемма 3.5. *Для функции*

$$\widehat{m}(\xi,\tau)=\frac{2\xi}{\pi}\int\limits_{\tau}^{\xi}\frac{s(m(s,\tau)-m(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds$$

справедливы оценки

$$|\widehat{m}(\xi,\tau)|\leq c\,\frac{\omega(\sigma'_+,|T-Z|)}{|T-Z|}\,\frac{1}{(\xi+1)^{3/2}\sqrt{\tau+1}}\quad\forall\,\xi>\tau>0\,, \tag{3.112}$$

$$|\widehat{m}(\xi,\tau)-\widehat{m}(\xi-\varepsilon,\tau)|\leq c\,\frac{\omega(\sigma'_+,|T-Z|)}{|T-Z|}\,\frac{1}{(\xi+1)(\tau+1)}\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}}\,, \tag{3.113}$$

$$|\widehat{m}(\xi,\tau+\varepsilon)-\widehat{m}(\xi,\tau)|\leq c\,\frac{\omega(\sigma'_+,|T-Z|)}{|T-Z|}\,\frac{1}{\tau^2+1}\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}} \tag{3.114}$$

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\forall\,\tau>0\quad\forall\,\xi>\tau+3\varepsilon\,,$$

где $T=\frac{\tau-i}{\tau+i}$, $Z=\frac{\xi-i}{\xi+i}$ *и* c *— некоторая абсолютная постоянная.*

Доказательство. С учетом неравенства (3.110) легко получаем оценку (3.112). Для доказательства оценки (3.113) представим приращение функции $\widehat{m}(\xi,\tau)$ по первой переменной в виде

$$\widehat{m}(\xi,\tau)-\widehat{m}(\xi-\varepsilon,\tau)=\frac{2\xi}{\pi}\int\limits_{\xi-2\varepsilon}^{\xi}\frac{s(m(s,\tau)-m(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds-$$

$$-\frac{2(\xi-\varepsilon)}{\pi}\int\limits_{\xi-2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\frac{s(m(s,\tau)-m(\xi-\varepsilon,\tau))}{((\xi-\varepsilon)^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_{\tau}^{\xi-2\varepsilon}\frac{s(m(s,\tau)-m(\xi,\tau))}{\sqrt{s^2-\tau^2}}\left(\frac{\xi}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}-\frac{\xi-\varepsilon}{((\xi-\varepsilon)^2-s^2)^{3/2}}\right)ds-$$

$$-\frac{2(\xi-\varepsilon)(m(\xi,\tau)-m(\xi-\varepsilon,\tau))}{\pi}\int\limits_{\tau}^{\xi-2\varepsilon}\frac{s\,ds}{((\xi-\varepsilon)^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,.$$

Теперь, оценивая интегралы в правой части этого равенства с использованием неравенства (3.110), получаем оценку (3.113). Аналогично с учетом оценок (3.110), (3.111) доказывается неравенство (3.114). Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Пусть модуль непрерывности контурной производной конформного отображения $\sigma_+(Z)$ на единичной окружности удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^1\frac{\omega(\sigma'_+,\eta)}{\eta}\,\ln\frac{1}{\eta}\,d\eta<\infty\,, \tag{3.115}$$

а для функции $\widehat{m}(\xi,\tau)$ справедливы оценки (3.112) – (3.114). *Тогда для функции*

$$m_p(\xi,\tau)=\int\limits_0^{\xi}\frac{\widehat{m}(\xi,s)}{s-\tau}\,ds\,,$$

в свою очередь, справедливы оценки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}\,d\tau\le$$

$$\leq c\,\frac{\ln(\xi+1)}{(\xi+1)^{3/2}}\int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma'_+,\eta)}{\eta}\,\frac{\ln\frac{3}{\eta}}{(\xi+1)^{-1/2}\ln(\xi+1)+\sqrt{\eta}\ln\frac{3}{\eta}}\,d\eta\ \forall\,\xi\geq 1, \tag{3.116}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}\,d\tau\leq\ c\int\limits_0^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_+,\eta)}{\eta}\ \ln\frac{3}{\eta}\,d\eta \qquad \forall\,\xi\in(0,1]\,, \tag{3.117}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|m_p(\xi+\varepsilon,\tau)-m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}\,d\tau\leq$$

$$\leq\ c\,\frac{1}{\xi+1}\,\sqrt{\varepsilon}\,\ln\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma'_+,\eta)}{\eta}\,\frac{\ln\frac{3}{\eta}}{\sqrt{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\eta}\ln\frac{3}{\eta}}\,d\eta \tag{3.118}$$

$$\forall\,\xi>0\quad\forall\,\varepsilon\in(0,\min\{\xi,1/2\})\,,$$

где c — некоторая абсолютная постоянная.

Доказательство. Для доказательства неравенства (3.116) используем равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}\,d\tau=\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{-2\xi}+\int\limits_{2\xi}^{\infty}\Bigg)\frac{|m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}\,d\tau+\int\limits_{-2\xi}^{0}\frac{|m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{\xi}^{2\xi}\frac{|m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}\,d\tau+\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\frac{|m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}\,d\tau+\int\limits_{0}^{\xi/2}\frac{|m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}\,d\tau=:\sum_{j=4}^{8}I_j$$

и оценим интегралы $I_4, I_5, \ldots, I_8$ при произвольном $\xi\geq 1$.

С учетом оценки (3.112) получаем соотношение

$$I_4\leq\ c\,\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{-2\xi}+\int\limits_{2\xi}^{\infty}\Bigg)\frac{d\tau}{\tau^2+1}\int\limits_0^{\xi}|\widehat{m}(\xi,s)|\,ds\leq$$

$$\leq\ c\,\frac{1}{(\xi+1)^{5/2}}\int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma'_+,\eta)}{\eta}\,\frac{d\eta}{(\xi+1)^{-3/2}+\eta^{3/2}}\leq$$

$$\leq\ c\ \frac{\ln(\xi+1)}{(\xi+1)^{3/2}}\ \int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma'_+,\eta)}{\eta}\ \frac{\ln\frac{3}{\eta}}{(\xi+1)^{-1/2}\ln(\xi+1)+\sqrt{\eta}\ln\frac{3}{\eta}}\ d\eta.$$

Здесь и далее в доказательстве через c обозначены абсолютные постоянные, значения которых, вообще говоря, различны даже в пределах одной цепочки неравенств.

Интегралы I_5, I_6 оцениваются с помощью теоремы Фубини и соотношения (3.112) подобно оценке интеграла I_3^1 при доказательстве леммы 3.4. Также аналогично оценке интеграла I_3^3 оценивается интеграл I_7, при этом используются неравенства (3.112), (3.114).

Наконец, введем в рассмотрение множества $e'_1 := [\tau-\tau^3/\xi^2, \tau+\tau^3/\xi^2]$, $e'_2 := [0,\tau-\tau^3/\xi^2]\cup[\tau+\tau^3/\xi^2, 3\xi/4]$, $e'_3 := [3\xi/4,\xi]$ и оценим интеграл I_8 суммой трех интегралов:

$$I_8 \leq \int\limits_0^{\xi/2}\int\limits_{e'_1}\frac{|\widehat{m}(\xi,s)-\widehat{m}(\xi,\tau)|}{|s-\tau|}\,ds\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} + \int\limits_0^{\xi/2}\int\limits_{e'_2}\frac{|\widehat{m}(\xi,s)|}{|s-\tau|}\,ds\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} +$$

$$\int\limits_0^{\xi/2}\int\limits_{e'_3}\frac{|\widehat{m}(\xi,s)|}{s-\tau}\,ds\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} =: i'_1+i'_2+i'_3.$$

Теперь интеграл i'_1 оценивается аналогично тому, как при доказательстве леммы 3.4 оценен интеграл i_1, а, оценивая интегралы i'_2, i'_3 с учетом неравенства (3.112) и свойств модуля непрерывности (см., например, [19, 82]), получаем

$$i'_2 \leq\ c\ \frac{1}{(\xi+1)^{3/2}}\int\limits_0^{\xi/2}\frac{\omega(\sigma'_+,|T-Z|)}{|T-Z|}\ \int\limits_{e'_2}\frac{ds}{|s-\tau|\sqrt{s+1}}\ \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} \leq$$

$$\leq\ c\ \frac{1}{(\xi+1)^{3/2}}\int\limits_0^{\xi/2}\frac{\omega(\sigma'_+,|T-Z|)\sqrt{\tau+1}}{|T-Z|}\ \ln\frac{\xi}{\tau}\ \frac{d\tau}{\tau^2+1} \leq$$

$$\leq\ c\ \frac{1}{(\xi+1)^{3/2}}\left(\omega(\sigma'_+,2)\int\limits_0^{1/2}\ln\frac{\xi}{\tau}\,d\tau+\ln(\xi+1)\int\limits_{2\xi/(\xi^2+4)}^{2}\frac{\omega(\sigma'_+,\eta)}{\eta^{3/2}}\,d\eta\right) \leq$$

$$\le\ c\,\frac{\ln(\xi+1)}{(\xi+1)^{3/2}}\int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma'_+,\eta)}{\eta}\,\frac{\ln\frac{3}{\eta}}{(\xi+1)^{-1/2}\ln(\xi+1)+\sqrt{\eta}\ln\frac{3}{\eta}}\,d\eta\,,$$

$$i'_3\le\ c\,\frac{1}{(\xi+1)^{5/2}}\int\limits_0^{\xi/2}\int\limits_{e'_3}\frac{\omega(\sigma'_+,|S-Z|)}{|S-Z|}\,\frac{ds}{\sqrt{s+1}}\,\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}\le$$

$$\le\ c\,\frac{\ln(\xi+1)}{\xi+1}\int\limits_0^{\xi/(\xi^2+1)}\frac{\omega(\sigma'_+,\eta)}{\eta}\,d\eta\le$$

$$\le\ c\,\frac{\ln(\xi+1)}{(\xi+1)^{3/2}}\int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma'_+,\eta)}{\eta}\,\frac{\ln\frac{3}{\eta}}{(\xi+1)^{-1/2}\ln(\xi+1)+\sqrt{\eta}\ln\frac{3}{\eta}}\,d\eta\,.$$

Таким образом, неравенство (3.116) доказано. Аналогично устанавливаются оценки (3.117), (3.118). Лемма доказана.

18.4. Регуляризация сингулярного интегрального уравнения вспомогательной задачи. Обозначим через $C^e_{\mathbb{R}}$ подпространство банахова пространства $C_{\mathbb{R}}$, состоящее из четных функций, а через $\mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$ — множество четных функций класса $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$.

Введем в рассмотрение функции

$$\widehat{m}(\xi,\tau):=\begin{cases}\dfrac{2\xi}{\pi}\displaystyle\int\limits_\tau^\xi\frac{s(m(s,\tau)-m(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds & \text{при } \xi\tau>0, |\tau|<|\xi|,\\ 0 & \text{при } \xi\tau<0 \text{ или } \xi\tau>0, |\tau|>|\xi|,\end{cases}\qquad(3.119)$$

$$\widehat{A}(\xi,\tau):=2\,\mathrm{Re}\,\widehat{m}(\xi,\tau)\,,\qquad \widehat{B}(\xi,\tau):=2\,\mathrm{Im}\,\widehat{m}(\xi,\tau)\,,\qquad(3.120)$$

$$k_p(\xi,\tau):=-\frac{\xi}{|\xi|}\,\widehat{A}(\xi,\tau)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\xi\frac{\widehat{B}(\xi,\eta)}{\eta-\tau}\,d\eta\,,\qquad(3.121)$$

$$\widehat{f}_*(\tau):=\begin{cases} f_*(\tau) & \text{при}\quad \tau\ge0\,,\\ f_*(-\tau) & \text{при}\quad \tau<0\end{cases}\qquad(3.122)$$

и интегральные операторы

$$(k_pf)(\xi):=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{k_p(\xi,\tau)}{\sqrt{\tau^2+1}}\,f(|\tau|)\,d\tau\,,\qquad(3.123)$$

$$(Rf)(\xi) := \sqrt{\xi^2+1}\,\left(\frac{A(\xi,\xi)}{(A(\xi,\xi))^2+(B(\xi,\xi))^2}\,f(\xi)+\right.$$

$$\left.+\frac{P_+(\xi)}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{(\tau^2+1)\,\left|\operatorname{Im}\sigma_+\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)\right|}{2\,|\tau|}}\;\frac{f(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau\right),$$

где $P_+(\xi) := \sqrt{\sigma'_+\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)} - \sqrt{\sigma'_+\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)}$, при этом значения корней положительны при $\xi = 0$.

Установим условия на границу области D_z^+, достаточные для регуляризации сингулярного интегрального уравнения (3.61).

Теорема 3.15. *Пусть функция $\varphi_{\partial D}$ принадлежит класу $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D), 1/2 < \alpha \le 1$, и удовлетворяет условию (3.58), а конформное отображение $\sigma_+(Z)$ на единичной окружности имеет непрерывную контурную производную, которая не обращается в нуль, и ее модуль непрерывности удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(\sigma'_+,\eta)}{\eta}\,\ln^3\frac{1}{\eta}\,d\eta < \infty\,. \tag{3.124}$$

Тогда каждое решение сингулярного интегрального уравнения (3.61) вида

$$U_p(\xi) = \frac{U_0(\xi)}{\sqrt{\xi^2+1}}, \tag{3.125}$$

где $U_0 \in \mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$, может быть получено в результате решения интегрального уравнения Фредгольма

$$U_0(\xi) + (R(k_pU_0))(\xi) = (R\widehat{f_*})(\xi) \quad \forall\,\xi\in\mathbb{R}, \tag{3.126}$$

в котором оператор $R\,k_p$ компактен в пространстве $C^e_{\mathbb{R}}$. При этом уравнение (3.126) имеет в пространстве $C^e_{\mathbb{R}}$ единственное решение, которое, кроме того, принадлежит классу $\mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$.

Доказательство. Из оценок (3.112), (3.114) следует, что для функции $\widehat{B}(\xi,\tau)$ выполняются неравенства вида (3.102), (3.103) при $\beta = 1/2$ и $\Omega(\xi,\tau) = c\,\frac{\omega(\sigma'_+,|T-Z|)}{|T-Z|}$, где c — некоторая абсолютная постоянная. Поэтому с учетом леммы 3.4 перепишем сингулярное интегральное уравнение (3.61) в виде

$$A(\xi,\xi)U_p(\xi) + \frac{iB(\xi,\xi)}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{U_p(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_p(\xi,\tau)U_p(\tau)\,d\tau = \widehat{f_*}(\xi) \quad \forall\,\xi\in\mathbb{R}\,. \tag{3.127}$$

Заметим, что поскольку обе части уравнения (3.127) являются четными функциями, то уравнения (3.127) и (3.61) эквивалентны.

Индекс [8, с. 176] сингулярного интегрального уравнения (3.127)

$$\varkappa := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\arg\frac{\overline{m(\xi,\xi)}}{m(\xi,\xi)} = 0\,. \tag{3.128}$$

Это следует из основных свойств индекса [8, с. 101], а также из теоремы 4 главы X монографии [14]. Таким образом, оператор

$$(R_h f)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}}\,(Rf)(\xi)$$

задает единственное решение характеристического уравнения, соответствующего уравнению (3.127). Применяя теперь метод Карлемана – Векуа (см. [8, 51]) регуляризации уравнения (3.127), получаем интегральное уравнение (3.126), равносильное уравнению (3.127).

Покажем, что оператор $R\,k_p$ компактен в пространстве $C^e_{\mathbb{R}}$ и всякое решение U_0 уравнения (3.126) в этом пространстве принадлежит классу $\mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$.

Действительно, из лемм 3.5, 3.6 и условия (3.124) с учетом четности функции $\sqrt{\xi^2+1}\ (k_pU_0)(\xi)$ следует, что для модуля непрерывности и локального центрированного относительно бесконечно удаленной точки модуля непрерывности этой функции выполняются условия вида (3.99) при $k=1$, причем указанные условия выполняются равномерно по U_0 из единичного шара пространства $C^e_{\mathbb{R}}$. Отсюда с учетом леммы 3.3 и оценки Зигмунда для модуля непрерывности сингулярного интеграла Коши [106, 34] следует компактность оператора $R\,k_p$ в пространстве $C^e_{\mathbb{R}}$, а также вывод о том, что $(R(k_pU_0))\in\mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$ при всех $U_0\in C^e_{\mathbb{R}}$. Кроме того, используя условие $\varphi_{\partial D}\in\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$, лемму 3.2 и упомянутую оценку Зигмунда, устанавливаем, что $(R\widehat{f_*})\in\mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$.

Таким образом, для каждого решения уравнения (3.126) в пространстве $C^e_{\mathbb{R}}$ доказано, что $U_0 = (R\widehat{f}_* - R(k_p U_0)) \in \mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$.

Покажем, наконец, что уравнение (3.126) имеет единственное решение в пространстве $C^e_{\mathbb{R}}$. С этой целью заметим, что однородное уравнение

$$U_0(\xi) + (R(k_p U_0))(\xi) = 0 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R} \tag{3.129}$$

имеет в пространстве $C^e_{\mathbb{R}}$ только нулевое решение. Действительно, уравнение (3.129) получено равносильными преобразованиями уравнения (3.67) с нулевой правой частью:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_z} \frac{F_0(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^-}\, dt = 0\,, \tag{3.130}$$

которое имеет единственное голоморфное в D^+_z решение $F_0(z) \equiv 0$, что является следствием єдинственности решения задачи Дирихле для осесимметричного потенциала и теоремы 2.8. Переходя теперь от уравнения (3.67) к уравнению (3.126), приходим к выводу о том, что указанному решению уравнения (3.130) соответствует единственное решение $U_0(\xi) \equiv 0$ однородного уравнения (3.129). Таким образом, в соответствии с альтернативой Фредгольма уравнение (3.126) имеет единственное решение в пространстве $C^e_{\mathbb{R}}$ и доказательство завершено.

Отметим, что условие (3.124) выполняются, в частности, в случае, когда граница области D — замкнутая жорданова кривая Ляпунова, что является очевидным следствием теоремы Келлога [14, с. 468]. Условие (3.124) выполняется также в более общем случае замкнутой гладкой жордановой границы ∂D, у которой угол $\vartheta(s)$ наклона касательной к положительному направлению оси Ox как функция дуговой координаты s имеет модуль непрерывности $\omega_{\mathbb{R}}(\vartheta, \varepsilon)$, удовлетворяющий условию

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R}}(\vartheta, \eta)}{\eta}\ \ln^4 \frac{1}{\eta}\, d\eta < \infty\,.$$

Это следует из оценки модуля непрерывности производной конформного отображения единичного круга, приведенной в теореме 2 работы [10] (см. также роботу [102]).

18.5. Теорема о разрешимости внутренней задачи Дирихле. Сформулируем теперь результат о разрешимости внутренней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала.

Теорема 3.16. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.15. *Тогда решение внутренней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала задается формулой* (3.12), *в которой F — единственное решение внутренней вспомогательной задачи для заданных граничных значений потенциала $\varphi_{\partial D}$ и имеет вид* (3.66), *где голоморфная функция F_0 выражается равенством* (3.65); *при этом функция U_p имеет вид* (3.125), *где U_0 является решением уравнения Фредгольма* (3.126) *в пространстве $C^e_{\mathbb{R}}$.*

Доказательство. Существование решения (3.66) внутренней вспомогательной задачи для заданных граничных значений потенциала $\varphi_{\partial D}$ является следствием теорем 3.14, 3.15, а единственность ее решения следует из единственности решения задачи Дирихле для осесимметричного потенциала, теоремы 2.8 и теоремы 3.9, из которой также следует, что решение внутренней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала задается формулой (3.12). Теорема доказана.

Отметим, что в работе [72] задача Дирихле для уравнения, обобщающего уравнение (2.2), с помощью потенциала двойного слоя, ассоциированного с этим уравнением, также редуцирована к интегральному уравнению Фредгольма, но при более жестких ограничениях на границу области.

Покажем теперь, что все естественные решения уравнения (2.2) в ограниченной области D с произвольной жордановой (в том числе и неспрямляемой) границей представляются формулами вида (2.17).

18.6. Доказательство теоремы 3.4. Пусть $\varphi(x,r)$ — решение уравнения (2.2) в области D и $z = x + ir$. Обозначим через γ_ρ образ окружности $\{Z \in \mathbb{C} \ : \ |Z| = \rho < 1\}$ при отображении $\sigma_+(Z)$, а через $D^+_{z,\rho}$ — область, ограниченную кривой γ_ρ. Для каждой точки $z \in D^+_z$ рассмотрим ту кривую γ_ρ, которая содержит z, и через $\Gamma_{z\bar{z}}$ обозначим одну из ее дуг с концами в точках z и $\bar{z}$. Тогда очевидно, что с учетом теоремы Коши равенство (2.17) при $z \in \gamma_\rho$, $r \neq 0$, приводится к виду

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{F(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^-}\, dt = \varphi(x,r), \tag{3.131}$$

где $\quad (\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^- := \lim\limits_{\tau\to t,\tau\in\mathbb{C}\setminus\overline{D^+_{z,\rho}}} \sqrt{(\tau-z)(\tau-\bar{z})}.$

Покажем, что существует единственная голоморфная в области D^+_z функция F, удовлетворяющая условию (3.15) и уравнению (3.131) при всех $\rho \in (0;1)$ и всех $z \in \gamma_\rho$ таких, что $r \neq 0$. Действительно, в соответствии с теоремой 3.16 существует единственная голоморфная в области $D^+_{z,\rho}$ функция F_ρ, удовлетворяющая уравнению (3.131) при $F = F_\rho$ и условию вида (3.15) в области $D^+_{z,\rho}$. Заметим, что при этом выполняется также равенство $F_\rho(x) = \varphi(x,0)$ при всех $x \in \overline{D^+_{z,\rho}} \cap \mathbb{R}$. С учетом последнего замечания становится очевидным, что функции F_ρ при различных значениях $\rho \in (0;1)$ являются сужением на область $D^+_{z,\rho}$ единственной функции F, голоморфной в области D^+_z. Теорема доказана.

18.7. Задача Дирихле для осесимметричного потенциала в круге. В следующей теореме устанавливается формула решения задачи Дирихле для осесимметричного потенциала в круге меридианной плоскости.

Теорема 3.17. *Пусть* $D = \{(x,r) : x^2 + r^2 < 1\}$ *и функция* $\varphi_{\partial D}$ *принадлежит классу* $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$, $1/2 < \alpha \le 1$, *а также удовлетворяет условию* (3.58). *Тогда решение задачи Дирихле для осесимметричного потенциала в круге* D *задается формулой*

$$\varphi(x,r) = \begin{cases} \varphi_{\partial D}(1;0) + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D_z} \dfrac{F_*\big(i\frac{1+t}{1-t}\big)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt & \text{при } r \ne 0, \\ \varphi_{\partial D}(1;0) + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D_z} \dfrac{F_*\big(i\frac{1+t}{1-t}\big)}{t-x}\, dt & \text{при } r = 0, \end{cases}$$

в которой $z = x + ir$,

$$F_*(\xi) = -i(\xi + i) f_*(|\xi|) - \frac{2\xi(\xi+i)}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{f_*(\tau)}{\tau^2 - \xi^2}\, d\tau \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \tag{3.132}$$

при этом функция f_* *задается формулой* (3.63), *где* φ_* *выражается через заданную функцию* $\varphi_{\partial D}$ *равенством*

$$\varphi_*(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}} \left(\varphi_{\partial D}\Big(\frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}, \frac{-2\xi}{\xi^2+1} \Big) - \varphi_{\partial D}(1;0) \right) \quad \forall\, \xi > 0\,. \tag{3.133}$$

Доказательство. Очевидно, что при условиях теоремы выполняется тождество $M_+(Z,T) \equiv 1$. Поэтому уравнение (3.61) превращается в равенство $U_p(\xi) = f_*(\xi)/2$ при всех $\xi > 0$. Теперь после обозначения граничных значений правой части равенства (3.65) через F_* для завершения доказательства достаточно заметить, что они выражаются формулой Сохоцкого (см., например, [8, с. 47]) и представляются равенством (3.132).

Отметим, что в роботе [69] при решении задачи Дирихле для осесимметричного потенциала в круге интегральное уравнение вида (3.68) при более жестких ограничениях на правую часть уравнения редуцировано к краевой задаче Гильберта с разрывным коэффициентом и отрицательным индексом, что привело автора указанной работы к необходимости дополнительного исследования условий разрешимости краевой задачи.

Связь осесимметричных потенциалов с аналитическими функциями векторного аргумента, установленная в теореме 2.6, и разложение степенной функции (2.13) по элементам базиса алгебры $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ показывают, что в теории решений уравнения (2.2) полиномы Лежандра (1.64) играют такую же роль, как тригонометрические ряды Фурье в теории плоских гармонических функций.

В частности, известно, что решение задачи Дирихле в круге для двумерного уравнения Лапласа можно получить в результате разложения заданных граничных значений искомой гармонической функции в тригонометрический ряд Фурье [75, с. 603]. Аналогичный факт имеет место и в теории задачи Дирихле для осесимметричного потенциала в круге меридианной плоскости.

Так, рассмотрим ряд Фурье функции $\varphi_{\partial D}(x, \sqrt{1-x^2})$ по полиномам Лежандра:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ P_n(x), \tag{3.134}$$

где $\quad a_n := \frac{2n+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \varphi_{\partial D}(t, \sqrt{1-t^2}) \ P_n(t) \ dt\,.$

Если функция $\varphi_{\partial D}$ удовлетворяет условию (3.58), а ряд (3.134) равномерно сходится (или равномерно суммируем методом Чезаро некоторого порядка $k > 0$, или же равномерно суммируем по Абелю) на отрезке $[-1; 1]$ к функции $\varphi_{\partial D}(x, \sqrt{1-x^2})$, то функция

$$\varphi(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ (x^2 + r^2)^{n/2} \ P_n\Big(x \ (x^2 + r^2)^{-1/2}\Big) \tag{3.135}$$

является решением задачи Дирихле для осесимметричного потенциала в единичном круге.

Отметим, что идея построения решения задачи Дирихле для осесимметричного потенциала в круге в виде ряда (3.135) описана в монографии [18, с. 124].

§ 19. Внешняя задача Дирихле для осесимметричного потенциала

19.1. Постановка задачи Дирихле и вспомогательных задач. Пусть теперь D — неограниченная область меридианной плоскости xOr, граница которой ∂D является замкнутой жордановой спрямляемой кривой, симметричной относительно оси Ox.

Рассмотрим *внешнюю задачу Дирихле для осесимметричного потенциала* об отыскании непрерывной на $\overline{D}$ функции $\varphi(x,r)$, которая удовлетворяет уравнению (2.2) в области D и дополнительному условию

$$\lim_{x^2+r^2\to\infty} \varphi(x,r) = 0\,, \tag{3.136}$$

а также принимает заданные значения $\varphi_{\partial D}(x,r)$ на границе области ∂D, то есть удовлетворяет равенству $\varphi(x,r) = \varphi_{\partial D}(x,r)$ при всех $(x,r) \in \in \partial D$.

Заметим, что в случае неограниченной области D для решений уравнения (2.2), которые не удовлетворяют условию (3.136), принцип максимума, не выполняется. Поэтому функция $\varphi(x,r)$, удовлетворяющая уравнению (2.2) в области D и принимающая заданные значения $\varphi_{\partial D}(x,r)$ на границе области ∂D, но не удовлетворяющая условию (3.136), не является единственной. Таким образом, дополнительное условие (3.136) включено в постановку внешней задачи Дирихле для того, чтобы обеспечить единственность решения задачи.

Имея целью построение решения внешней задачи Дирихле, рассмотрим особо один специальный случай этой задачи, а именно: рассмотрим задачу об отыскании такого решения $\varphi_D(x,r)$ уравнения (2.2) в области D, которое удовлетворяет условию вида (3.136) и тождеству $\varphi_D(x,r) \equiv \equiv 1$ на границе ∂D. Назовем эту задачу *характеристической* задачей области D.

Используя решение характеристической задачи области D, будем искать решение внешней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала в виде

$$\varphi(x,r) = \begin{cases} \varphi_{\partial D}(b_2,0)\ \varphi_D(x,r) + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D_z} \dfrac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\,dt & \\ & \text{при } r \neq 0, \\ \varphi_{\partial D}(b_2,0)\ \varphi_D(x,0) + F(x) & \text{при } r = 0,\ x < b_1, \\ \varphi_{\partial D}(b_2,0)\ \varphi_D(x,0) - F(x) & \text{при } r = 0,\ x > b_2, \end{cases} \tag{3.137}$$

где функция F является голоморфной в области D_z и непрерывной в $\overline{D_z}$, при этом обращается в нуль в бесконечно удаленной точке, удовлетворяет дополнительному условию симметрии (3.15), а ее граничные значения являются решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z} \frac{F(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^+}\,dt = \varphi_{\partial D}(x,r) - \varphi_{\partial D}(b_2,0), \tag{3.138}$$

в котором $(x,r)\in\partial D$, $r\neq 0$, $z = x+ir$. Задачу об отыскании такой функции F назовем *внешней вспомогательной задачей* для заданных граничных значений осесимметричного потенциала $\varphi_{\partial D}(x,r)$.

19.2. Редукция вспомогательной задачи к интегральному уравнению Фредгольма. Для решения внешней задачи Дирихле используется модификация метода, примененного выше при решении внутренней задачи. Будем использовать конформное отображение $\sigma_-(Z)$ единичного круга $\{Z\in\mathbb{C}\ :\ |Z|<1\}$ на область D_z^-, удовлетворяющее условиям нормировки $\sigma_-(0)=\infty$ и $\sigma_-(-1)=b_1$. Отметим, что образом полукруга $\{Z\in\mathbb{C}\ :\ |Z|<1, \operatorname{Im} Z>0\}$ при отображении $\sigma_-(Z)$ является область $\{z\in D_z^-\ :\operatorname{Im} z<0\}$, и при всех $Z\in\{Z\in\mathbb{C}\ :\ |Z|\leq 1\}$ выполняется равенство $\sigma_-(\bar{Z}) = \overline{\sigma_-(Z)}$. Действительно, существует единственное конформное отображение указанного полукруга на область $\{z\in D_z^-\ :\operatorname{Im} z<0\}$, которое отображает точки $-1,0,1$ соответственно в точки b_1,∞,b_2. Его аналитическим продолжением на единичный круг в соответствии с принципом симметрии [31, с. 148] является отображение $\sigma_-(Z)$.

Введем в рассмотрение функцию

$$M_-(Z,T) := \sqrt{\frac{(T-Z)(T-\bar{Z})}{T^2(\sigma_-(T)-\sigma_-(Z))(\sigma_-(T)-\sigma_-(\bar{Z}))}}\,,$$

которую при каждом фиксированном Z таком, что $Z\neq -1$ и $Z\neq 0$, будем понимать как непрерывную ветвь функции, аналитической в единичном круге по переменной T, такую, что $M_-(Z,-1)>0$.

При $\xi,\tau\in\mathbb{R}$ функцию $m(\xi,\tau)$ определим теперь равенством

$$m(\xi,\tau) := M_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}, \frac{\tau-i}{\tau+i}\right). \tag{3.139}$$

Поскольку уравнение (3.138) имеет такой же вид, как уравнение (3.67), то аналогично теореме 3.14 доказывается следующее утверждение, содержащее достаточные условия редукции внешней вспомогательной задачи для заданных граничных значений осесимметричного потенциала $\varphi_{\partial D}(x,r)$ к сингулярному интегральному уравнению на вещественной прямой.

Теорема 3.18. *Пусть функция $\varphi_{\partial D}$ принадлежит класу $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D), 1/2<\alpha\le 1$, и удовлетворяет условию (3.58). Пусть при этом отображение $\sigma_-(Z)$ дифференцируемо в точках множества $\{Z\in\mathbb{C}\ :\ |Z|=1, Z\ne\pm1\}$, функция $\sigma'_-(Z)$ в тех же точках непрерывна и не равна нулю, а в окрестности точек $Z=\pm1$ удовлетворяет оценке вида (3.59) и, кроме того, функция $M_-(Z,T)$ удовлетворяет условию вида (3.60).*

Тогда справедливы утверждения:

1) *каждое решение F внешней вспомогательной задачи для граничных значений потенциала $\varphi_{\partial D}$ по формуле*

$$U_p(\xi)=\mathrm{Re}\,\frac{i(\xi-i)F(\sigma_-(\frac{\xi-i}{\xi+i}))\sigma'_-(\frac{\xi-i}{\xi+i})}{2(\xi+i)^2}\qquad\forall\,\xi>0$$

порождает решение сингулярного интегрального уравнения (3.61), в котором функции $A(\xi,\tau)$, $B(\xi,\tau)$, f_* определяются соотношениями (3.62), (3.63), при этом $m(\xi,\tau)$ определена равенством (3.139) и $x+ir=\sigma_-(\frac{\xi-i}{\xi+i})$ для точки (x,r) в (3.64);

2) *если в сингулярном интегральном уравнении (3.61) функции A,B,f_* определены соотношениями (3.62), (3.63), при этом $m(\xi,\tau)$ определена равенством (3.139) и $x+ir=\sigma_-(\frac{\xi-i}{\xi+i})$ для точки (x,r) в (3.64), а функция U_p является таким его решением, что функция*

$$F(z)=-\frac{2(\xi+i)^2}{\pi(\xi-i)\sigma'_-(\frac{\xi-i}{\xi+i})}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{U_p(|\tau|)}{\tau-\xi}\,d\tau\,,\tag{3.140}$$

$$z=\sigma_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)\in D_z^-,\mathrm{Im}\,\xi>0\,,$$

непрерывно продолжается из области D_z^- на границу ∂D_z^-, то функция (3.140) является решением внешней вспомогательной задачи для граничных значений потенциала $\varphi_{\partial D}$.

Как и при решении внутренней задачи Дирихле, используем функции (3.119) – (3.122) и интегральный оператор (3.123), а оператор R определим теперь равенством

$$(Rf)(\xi):=\sqrt{\xi^2+1}\ \left(\frac{A(\xi,\xi)}{(A(\xi,\xi))^2+(B(\xi,\xi))^2}f(\xi)+\right.$$

$$+\frac{P_-(\xi)}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{(\tau^2+1)\,\left|\operatorname{Im}\sigma_-\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)\right|}{2\,|\tau|}}\;\frac{f(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau\right),$$

где $P_-(\xi) := \sqrt{-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)^2\,\sigma'_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)} \;-\; \sqrt{-\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)^2\,\sigma'_-\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)}$, при этом значения корней положительны при $\xi = 0$.

Достаточные условия редукции внешней вспомогательной задачи для граничных значений потенциала $\varphi_{\partial D}(x,r)$ к интегральному уравнению Фредгольма содержатся в следующем утверждении, которое доказывается аналогично теореме 3.15.

Теорема 3.19. *Пусть функция $\varphi_{\partial D}$ принадлежит класу $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D), 1/2 < \alpha \le 1$, и удовлетворяет условию* (3.58), *а конформное отображение $\sigma_-(Z)$ на единичной окружности имеет непрерывную контурную производную, которая не обращается в нуль и модуль непрерывности которой удовлетворяет условию вида* (3.124). *Тогда каждое решение сингулярного интегрального уравнения* (3.61) *вида* (3.125) *может быть получено в результате решения интегрального уравнения Фредгольма* (3.126), *в котором оператор $R\,k_p$ компактен в пространстве $C^e_{\mathbb{R}}$. При этом уравнение* (3.126) *имеет в пространстве $C^e_{\mathbb{R}}$ единственное решение, которое, кроме того, принадлежит класу $\mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$.*

19.3. Редукция характеристической задачи к интегральному уравнению Фредгольма. Справедлива следующая теорема, содержащая достаточные условия существования решения характеристической задачи неограниченной области D.

Теорема 3.20. *Пусть конформное отображение $\sigma_-(Z)$ на границе единичной окружности имеет непрерывную контурную производную, которая не обращается в нуль и модуль непрерывности которой удовлетворяет условию вида* (3.124). *Тогда существует единственное решение характеристической задачи области D, которое задается формулой*

$$\varphi_D(x,r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\partial D_z}\dfrac{F_D(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt & \text{при } r \ne 0\,, \\ F_D(x) & \text{при } r = 0\,,\ x < b_1\,, \\ -F_D(x) & \text{при } r = 0\,,\ x > b_2\,, \end{cases} \tag{3.141}$$

где $(x,r) \in D, z = x + ir$, а голоморфная в области D_z функция F_D

выражается равенством

$$F_D(z) = -\frac{2(\xi+i)^2}{\pi(\xi-i)\sigma'_-(\frac{\xi-i}{\xi+i})} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{U_D(|\tau|)}{\sqrt{\tau^2+1}}\, \frac{d\tau}{\tau-\xi}\,,$$

$$z = \sigma_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right) \in D_z\,, \quad \mathrm{Im}\,\xi > 0\,,$$

при этом U_D *является решением интегрального уравнения Фредгольма* (3.126), *в котором* $\widehat{f}_*(\xi) \equiv (\xi^2+1)^{-1}$.

Доказательство. Будем искать функцию F_D, голоморфную в области D_z и непрерывную в $\overline{D_z}$, которая обращается в нуль в бесконечно удаленной точке и удовлетворяет условию симметрии вида (3.15), а ее граничные значения являются решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_z} \frac{F_D(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)})^+}\, dt = 1\,.$$

Оно приводится к сингулярному интегральному уравнению вида (3.61) с правой частью $f_*(\xi) = (\xi^2+1)^{-1}$. Регуляризуя далее указанное сингулярное интегральное уравнение так, как это сделано при доказательстве теоремы 3.15, получаем интегральное уравнение Фредгольма (3.126) с искомой функцией $U_0 \equiv U_D$, при этом его правая часть $(R\widehat{f}_*)(\xi)$ принадлежит классу $\mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$. Поэтому из теоремы 3.19 следует, что уравнение (3.126) имеет в пространстве $C^e_{\mathbb{R}}$ единственное решение U_D, которое, кроме того, принадлежит классу $\mathcal{D}^e_{\mathbb{R}}$. Таким образом, существует единственное решение характеристической задачи области D, которое задается формулой (3.141). Теорема доказана.

19.4. Теорема о разрешимости внешней задачи Дирихле. Вследствие решения характеристической задачи области D и внешней вспомогательной задачи для заданных граничных значений потенциала $\varphi_{\partial D}(x,r)$ получаем решение (3.137) внешней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала. Таким образом, справедливо следующее утверждение, которое является следствием теорем 3.18 – 3.20.

Теорема 3.21. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.19. *Тогда решение внешней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала задается формулой* (3.137), *в которой функция* $\varphi_D(x,r)$ *выражается равенством* (3.141), *а голоморфная функция* F — *равенством* (3.140); *при этом функция* U_p *имеет вид* (3.125), *где* U_0 *является решением уравнения Фредгольма* (3.126) *в пространстве* $C^e_{\mathbb{R}}$.

Следствие 1. *При условиях теоремы* 3.21 *решение внешней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала представляется формулой* (3.14), *в которой функция* F *выражается равенством* (3.140), *где*

$$U_p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}} \left(U_0(\xi) + \varphi_{\partial D}(b_2, 0) U_D(\xi) \right).$$

Таким образом, при выполнении условий теоремы 3.21 внешняя задача Дирихле для осесимметричного потенциала редуцирована к двум интегральным уравнениям Фредгольма (3.126) для нахождения функций U_0 и U_D. Отметим, что в работе [72] внешняя задача Дирихле для уравнения, обобщающего уравнение (2.2), с помощью потенциала двойного слоя, ассоциированного с этим уравнением, также редуцирована к интегральному уравнению Фредгольма, но при более жестких ограничениях на границу области.

Покажем теперь, что все естественные решения уравнения (2.2) в неограниченной области D с произвольной ограниченной жордановой (в том числе и неспрямляемой) границей, удовлетворяющие условию (3.136), представляются формулами вида (3.8).

19.5. Доказательство теоремы 3.6. Пусть $\varphi(x,r)$ — решение уравнения (2.2) в области D и $z = x + ir \in D_z$. Обозначим через γ_ρ образ окружности $\{Z \in \mathbb{C} \ : \ |Z| = \rho < 1\}$ при отображении $\sigma_-(Z)$, а через $D_{z,\rho}$ — неограниченную область, границей которой является кривая γ_ρ. Для каждой точки $z \in D_z^-$ рассмотрим ту кривую γ_ρ, которая содержит z, и через $\Gamma_{z\bar{z}}$ обозначим ту ее дугу с концами в точках z и $\bar{z}$, которая пересекает вещественную прямую на интервале $(-\infty, b_1)$. Тогда очевидно, что с учетом теоремы Коши и условия (3.7) равенство (3.8) при $z \in \gamma_\rho$, $r \neq 0$, приводится к виду

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{F(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^+} \, dt = \varphi(x,r)\,,$$

где $(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^+ := \lim\limits_{\tau \to t, \tau \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_{z,\rho}}} \sqrt{(\tau - z)(\tau - \bar{z})}$.

Теперь с учетом следствия 1 доказательство завершается аналогично доказательству теоремы 3.4.

19.6. Задача Дирихле для осесимметричного потенциала во внешней области, ограниченной окружностью. Отметим, что в случае, когда границей области D является окружность, характеристическая задача области D и внешняя вспомогательная задача для заданных граничных значений потенциала $\varphi_{\partial D}(x,r)$ решаются в явном виде. При этом справедлива следующая теорема, в которой устанавливается формула решения задачи Дирихле для осесимметричного потенциала в дополнении к кругу меридианной плоскости.

Теорема 3.22. *Пусть* $D = \{(x,r) \,:\, x^2 + r^2 > 1\}$, *функция* $\varphi_{\partial D}$ *принадлежит классу* $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$, $1/2 < \alpha \le 1$, *и удовлетворяет условию* (3.58). *Тогда решение задачи Дирихле для осесимметричного потенциала в области* D *выражается формулой*

$$\varphi(x,r) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_{\partial D}(1;0)}{\sqrt{x^2+r^2}} + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\partial D_z} \dfrac{F_*\big(i\frac{1+t}{1-t}\big)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt & \text{при } r \neq 0\,, \\ -\dfrac{\varphi_{\partial D}(1;0)}{x} + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\partial D_z} \dfrac{F_*\big(i\frac{1+t}{1-t}\big)}{t-x}\,dt & \text{при } r = 0\,,\ x < -1, \\ \dfrac{\varphi_{\partial D}(1;0)}{x} - \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\partial D_z} \dfrac{F_*\big(i\frac{1+t}{1-t}\big)}{t-x}\,dt & \text{при } r = 0\,,\ x > 1\,, \end{cases}$$

в которой $z = x + ir$,

$$F_*(\xi) = i(\xi - i) f_*(|\xi|) + \frac{2\xi(\xi - i)}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{f_*(\tau)}{\tau^2 - \xi^2}\,d\tau \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{3.142}$$

при этом функция f_* *задается формулой* (3.63), *где* φ_* *выражается через заданную функцию* $\varphi_{\partial D}$ *равенством* (3.133).

Доказательство. Очевидно, что при выполнении условий теоремы $\sigma_-(Z) = 1/Z$ и справедливо тождество $M_-(Z,T) \equiv 1$. Поэтому уравнение (3.61) превращается в равенство $U_*(\xi) = f_*(\xi)/2$ при всех $\xi > 0$. Отсюда, в частности, следует, что единственным решением характеристической задачи области D в этом случае является функция $\varphi_D(x,r) = 1/\sqrt{x^2+r^2}$. Теперь после обозначения граничных значений правой части равенства (3.140) через F_* для завершения доказательства достаточно заметить, что они выражаются формулой Сохоцкого (см., например, [8, с. 47]) и представляются равенством (3.142).

§ 20. Задача Дирихле для функции тока Стокса

20.1. Постановка задачи Дирихле и вспомогательной задачи. Пусть D — область меридианной плоскости xOr с замкнутой жордановой спрямляемой границей, симметричная относительно оси Ox.

Рассмотрим *задачу Дирихле для функции тока Стокса* об отыскании непрерывной на $\overline{D}$ функции $\psi(x,r)$, которая в области D удовлетворяет уравнению (2.3) и условию (2.37), а на границе ∂D принимает заданные значения $\psi_{\partial D}(x,r)$, то есть выполняется равенство $\psi(x,r) = \psi_{\partial D}(x,r)$ при всех $(x,r) \in \partial D$. Кроме того, в случае неограниченной области D требуется также выполнение условия

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \psi(x,r) = 0. \tag{3.143}$$

При этом задачу для ограниченной области D будем называть *внутренней* задачей Дирихле, а задачу для неограниченной области D — *внешней* задачей Дирихле.

Заметим, что функция тока Стокса $\psi(x,r)$, удовлетворяющая условию (2.37) в области D, а также условию (3.143) в случае неограниченной области D, подчиняется принципу максимума. Действительно, принцип максимума выполняется для решений уравнения (2.3) в областях $\{(x,r) \in D : r > \varepsilon, x^2 + r^2 < N\}$ и $\{(x,r) \in D : r < -\varepsilon,\ x^2 + r^2 < N\}$ при всех положительных N и ε, для которых указанные области не пустые (см., например, [47, с. 13]). Очевидно, что отсюда при условии (2.37), а также условии (3.143) в случае неограниченной области D, следует справедливость принципа максимума для функции $\psi(x,r)$ в области D.

Естественным следствием принципа максимума является единственность решения задачи Дирихле для функции тока Стокса.

Предположим теперь, что граница ∂D_z является замкнутой жордановой спрямляемой кривой, симметричной относительно вещественной прямой и удовлетворяет условию (3.16).

С целью решения задачи Дирихле рассмотрим *вспомогательные задачи* для заданных граничных значений функции тока Стокса $\psi_{\partial D}(x,r)$ об отыскании голоморфной в области D_z и непрерывной на множестве $\overline{D_z} \setminus \{b_1, b_2\}$ функции F, граничные значения которой в случае $D_z = D_z^+$ (*внутренняя* задача) являются решением интегрального уравнения

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_z^+} \frac{F(t)\ (t-x)}{(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})})^-}\, dt = \psi_{\partial D}(x,r), \tag{3.144}$$

$$z = x + ir \in \partial D_z^+ \setminus \{b_1, b_2\},$$

или в случае $D_z = D_z^-$ (*внешняя* задача) — решением интегрального уравнения

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z^-}\frac{F(t)\,(t-x)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)})^+}\,dt=\psi_{\partial D}(x,r), \tag{3.145}$$

$$z=x+ir\in\partial D_z^-\setminus\{b_1,b_2\}.$$

Кроме того, будем требовать, чтобы решение вспомогательной задачи удовлетворяло дополнительному условию симметрии (3.15) и оценке

$$|F(z)|\le c\,\left(|z-b_1|^{-\beta_F}+|z-b_2|^{-\beta_F}\right)\qquad\forall\,z\in\overline{D_z}\setminus\{b_1,b_2\}, \tag{3.146}$$

где $\beta_F\in[0;1)$ и постоянная c не зависит от z, а также обращалось в нуль в бесконечно удаленной точке в случае $D_z=D_z^-$.

Как следует из теорем 3.2, 3.11, решение внутренней задачи Дирихле для функции тока Стокса задается формулой (2.18), в которой функция F является решением внутренней вспомогательной задачи для заданных граничных значений $\psi_{\partial D}(x,r)$.

Очевидно, что для существования решения задачи Дирихле для функции тока Стокса, удовлетворяющего условию (2.37), необходимо, чтобы для заданных граничных значений выполнялись равенства

$$\psi_{\partial D}(b_1,0)=\psi_{\partial D}(b_2,0)=0\,.$$

При этом отметим, что если в случае $D_z=D_z^-$ выполняется равенство $\psi_{\partial D}(b_2,0)=0$ и функция F является решением внешней вспомогательной задачи для заданных граничных значений $\psi_{\partial D}$, то она также удовлетворяет условию (3.10). Действительно, переходя при сделанных предположениях к пределу в равенстве (3.145) при $z\to b_2$ и учитывая при этом теорему 3.11 получаем равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z^-}F(t)\,dt=0,$$

из которого в силу теоремы Коши следует равенство (3.10).

Далее в этом случае, предполагая дополнительно, что функция F обращается в нуль в бесконечно удаленной точке, делаем вывод о том, что она имеет в этой точке нуль не ниже второго порядка.

Поэтому из теорем 3.3, 3.11 следует, что решение внешней задачи Дирихле для функции тока Стокса также задается формулой (2.18), в которой функция F является решением внешней вспомогательной задачи для заданных граничных значений $\psi_{\partial D}(x,r)$.

20.2. Вспомогательная задача для нулевых граничных значений. Рассмотрим сначала однородные интегральные уравнения (3.144), (3.145) при $\psi_{\partial D}(x,r)\equiv 0$.

Теорема 3.23. *Пусть граница ∂D_z^+ является замкнутой жордановой спрямляемой кривой, удовлетворяющей условию* (3.16), *а функция F голоморфна в области D_z^+, непрерывна на множестве $\overline{D_z^+}\setminus\{b_1,b_2\}$, удовлетворяет условию* (3.15) *и оценке вида* (3.146). *Если при этом для всех $z\in\partial D_z^+\setminus\{b_1,b_2\}$ выполняется равенство*

$$\int\limits_{\partial D_z^+}\frac{F(t)\ (t-\operatorname{Re}z)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)})^-}\,dt=0, \tag{3.147}$$

то $F(z)\equiv C$, где C — некоторая действительная постоянная.

Доказательство. Заметим, что если при условиях теоремы равенство (3.147) выполняется при всех $z\in\partial D_z^+\setminus\{b_1,b_2\}$, то оно выполняется также при всех $z\in D_z^+$. Это следует из единственности решения внутренней задачи Дирихле для функции тока Стокса и теоремы 3.11.

Выберем теперь круг с центром в точке вещественной прямой, содержащийся в области D_z^+. Применяя к этому кругу теорему 2.9 и учитывая теорему единственности аналитических функций [31, с. 68], устанавливаем, что равенство (3.147) выполняется при всех z из указанного круга тогда и только тогда, когда голоморфная в области D_z^+ функция F тождественно равна некоторой постоянной C. Поскольку при этом функция F удовлетворяет условию (3.15), то $C\in\mathbb{R}$ и доказательство завершено.

Теорема 3.24. *Пусть граница ∂D_z^- является замкнутой жордановой спрямляемой кривой, удовлетворяющей условию* (3.16), *а функция F голоморфна в области D_z^-, непрерывна на множестве $\overline{D_z^-}\setminus\{b_1,b_2\}$ и удовлетворяет оценке вида* (3.146). *Если при этом функция F обращается в нуль в бесконечно удаленной точке и для всех $z\in\partial D_z^-\setminus\{b_1,b_2\}$ выполняется равенство*

$$\int\limits_{\partial D_z^-}\frac{F(t)\ (t-\operatorname{Re}z)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)})^+}\,dt=0, \tag{3.148}$$

то $F(z)\equiv 0$.

Доказательство. Как отмечено выше, функция F, удовлетворяющая равенству (3.148) в точках множества $\partial D_z^- \setminus \{b_1, b_2\}$, при условиях теоремы имеет в бесконечно удаленной точке нуль не ниже второго порядка, то есть удовлетворяет условию (3.11). Далее, как и при доказательстве теоремы 3.23, заключаем, что равенство (3.148) выполняется при всех $z \in D_z^-$.

Выберем теперь окрестность бесконечно удаленной точки, содержащуюся в области D_z^-. Наконец, применяя к этой окрестности теорему 2.20 и учитывая теорему единственности аналитических функций [31, с. 68], устанавливаем, что равенство (3.148) выполняется при всех z из указанной окрестности тогда и только тогда, когда голоморфная в области D_z^- функция F, которая обращается в нуль в бесконечно удаленной точке, тождественно равна нулю. Теорема доказана.

20.3. Редукция вспомогательной задачи к сингулярному интегральному уравнению. Далее при более жестких, чем в теоремах 3.23, 3.24, ограничениях на границу ∂D_z осуществляется преобразование неоднородных интегральных уравнений (3.144), (3.145) задачи Дирихле для функции тока Стокса к сингулярному интегральному уравнению Коши на вещественной прямой.

При решении внутренней задачи Дирихле для функции тока Стокса, как и при решении внутренней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала, будем использовать конформное отображение $\sigma_+(Z)$ единичного круга $\{Z \in \mathbb{C} \ : \ |Z| < 1\}$ на область D_z^+ и функцию $M_+(Z, T)$.

При решении внешней задачи Дирихле аналогично будем использовать конформное отображение $\sigma_-(Z)$ единичного круга $\{Z \in \mathbb{C} \ : \ |Z| < 1\}$ на область D_z^- и функцию $M_-(Z, T)$.

В следующей теореме приведены достаточные условия редукции вспомогательной задачи для заданных граничных значений функции тока Стокса $\psi_{\partial D}(x, r)$ к сингулярному интегральному уравнению на вещественной прямой.

Теорема 3.25. *Пусть функция $\psi_{\partial D}$ принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D), 1/2 < \alpha \le 1$, и удовлетворяет условиям*

$$\psi_{\partial D}(b_1, 0) = \psi_{\partial D}(b_2, 0) = 0, \tag{3.149}$$

$$\psi_{\partial D}(x, -y) = \psi_{\partial D}(x, r) \qquad \forall\, (x, r) \in \partial D. \tag{3.150}$$

Пусть при этом отображение $\sigma_\pm(Z)$ дифференцируемо в точках множества $\{Z \in \mathbb{C} \ : \ |Z| = 1, Z \ne \pm 1\}$ и функция $\sigma'_\pm(Z)$ в тех же точках *непрерывна и удовлетворяет оценке*

$$c_1\,(|Z-1|^{-\beta}+|Z+1|^{-\beta}) \le |\sigma'_\pm(Z)| \le \; c_2\,(|Z-1|^{-\beta}+|Z+1|^{-\beta}), \quad (3.151)$$

где $\beta \in [0;1)$ *и положительные постоянные* c_1, c_2 *не зависят от* Z.

Тогда справедливы утверждения:

1) *каждое решение* F *внутренней вспомогательной задачи для граничных значений функции тока Стокса* $\psi_{\partial D}$ *по формуле*

$$V_f(\xi) = \operatorname{Im} \frac{iF(\sigma_+(\frac{\xi-i}{\xi+i}))\sigma'_+(\frac{\xi-i}{\xi+i})}{2(\xi+i)} \qquad \forall\, \xi > 0$$

порождает решение сингулярного интегрального уравнения

$$D(\xi,\xi)V_f(\xi) - \frac{2C(\xi,\xi)}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\tau\; V_f(\tau)}{\tau^2-\xi^2}\,d\tau +$$

$$+\frac{4\xi}{\pi^2}\int\limits_0^\xi \left(\int\limits_\tau^\xi \frac{s(C(s,\tau)-C(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds \int\limits_0^\infty \frac{\eta\; V_f(\eta)}{\eta^2-\tau^2}\,d\eta\right) d\tau -$$

$$-\frac{2\xi}{\pi}\int\limits_0^\xi V_f(\tau)\int\limits_\tau^\xi \frac{s(D(s,\tau)-D(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds\,d\tau = g_*(\xi) \quad \forall\, \xi > 0, \quad (3.152)$$

в котором

$$C(\xi,\tau) := 2\operatorname{Re} n(\xi,\tau)\,, \qquad D(\xi,\tau) := 2\operatorname{Im} n(\xi,\tau)\,, \qquad (3.153)$$

$$g_*(\xi) := \psi_*(\xi) - \xi\int\limits_0^\xi \frac{s(\psi_*(s)-\psi_*(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}\;ds\,, \qquad (3.154)$$

при этом $n(\xi,\tau) = M_+\big(\frac{\xi-i}{\xi+i}, \frac{\tau-i}{\tau+i}\big)\left(\sigma_+\big(\frac{\tau-i}{\tau+i}\big) - \operatorname{Re}\sigma_+\big(\frac{\xi-i}{\xi+i}\big)\right)$ *и функция* ψ_* *выражается через заданную функцию* $\psi_{\partial D}$ *равенством*

$$\psi_*(\xi) := \frac{\psi_{\partial D}(x,r)}{\sqrt{\xi^2+1}}, \qquad (3.155)$$

где $x + ir = \sigma_+(\frac{\xi-i}{\xi+i})$;

2) *если в сингулярном интегральном уравнении* (3.152) *функции* C, D, g_* *определены равенствами* (3.153), (3.154) *и функция* V_f *является таким его решением, что функция*

$$F(z) = \frac{2(\xi+i)}{\pi i \sigma'_+\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{|\tau|} \, \frac{V_f(|\tau|)}{\tau-\xi} \, d\tau, \quad z = \sigma_+\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right) \in D_z^+, \operatorname{Im}\xi > 0, \tag{3.156}$$

непрерывно продолжается из области D_z^+ *в точки множества* $\partial D_z^+ \setminus \{b_1, b_2\}$ *и выполняется оценка вида* (3.146), *то функция* (3.156) *является решением внутренней вспомогательной задачи для граничных значений функции тока Стокса* $\psi_{\partial D}$*;*

3) *каждое решение* F *внешней вспомогательной задачи для граничных значений функции тока Стокса* $\psi_{\partial D}$ *по формуле*

$$V_f(\xi) = \operatorname{Im} \frac{i(\xi-i)F(\sigma_-(\frac{\xi-i}{\xi+i}))\sigma'_-(\frac{\xi-i}{\xi+i})}{2(\xi+i)^2} \qquad \forall \xi > 0$$

порождает решение сингулярного интегрального уравнения (3.152), *в котором функции* C, D, g_* *определяются равенствами* (3.153), (3.154), *при этом* $n(\xi,\tau) = M_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}, \frac{\tau-i}{\tau+i}\right)\left(\sigma_-\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right) - \operatorname{Re}\sigma_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)\right)$ *и* $x+ir = \sigma_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)$ *для точки* (x,r) *в* (3.155);

4) *если в сингулярном интегральном уравнении* (3.152) *функции* C, D, g_* *определены равенствами* (3.153), (3.154), *при этом* $n(\xi,\tau) = M_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}, \frac{\tau-i}{\tau+i}\right)\left(\sigma_-\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right) - \operatorname{Re}\sigma_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)\right)$ *и* $x+ir = \sigma_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)$ *для точки* (x,r) *в* (3.155), *а функция* V_f *является таким его решением, что функция*

$$F(z) = \frac{2(\xi+i)^2}{\pi i(\xi-i)\sigma'_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{|\tau|} \, \frac{V_f(|\tau|)}{\tau-\xi} \, d\tau\,, \tag{3.157}$$

$$z = \sigma_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right) \in D_z^-\,, \quad \operatorname{Im}\xi > 0\,,$$

непрерывно продолжается из области D_z^- *в точки множества* $\partial D_z^- \setminus \{b_1, b_2\}$ *и удовлетворяет оценке вида* (3.146), *то функция* (3.157) *является решением внешней вспомогательной задачи для граничных значений функции тока Стокса* $\psi_{\partial D}$.

Доказательство. Отметим, что при предположениях теоремы об отображении $\sigma_\pm$ для произвольного $A \in (0;1)$ существуют положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что при всех $T, Z \in \{Z \in \mathbb{C}\ :$

$|Z| = 1, |Z+1| > A, |Z-1| > A\}$ выполняется двойное неравенство

$$c_1 \leq \left| \frac{\sigma_\pm(T) - \sigma_\pm(Z)}{T - Z} \right| \leq c_2.$$

Кроме того, с учетом этого неравенства для произвольных $A_1, A_2, A_3, A_4 \in (-1;1)$: $A_1 < A_2 < A_3 < A_4$ легко устанавливается оценка

$$|M_\pm(Z_1,T) - M_\pm(Z_2,T)| \leq c\,|Z_1 - Z_2| \qquad \forall\, T, Z_1, Z_2 \in$$
$$\in \{Z \in \mathbb{C} \;:\; |Z| = 1\} \;: A_1 < \operatorname{Re} T < A_2, \quad A_3 < \operatorname{Re} Z_1 < \operatorname{Re} Z_2 < A_4,$$
$$\operatorname{Im} Z_1 \operatorname{Im} T > 0, \quad \operatorname{Im} Z_2 \operatorname{Im} T > 0,$$

в которой постоянная c не зависит от Z_1 и Z_2.

При решении интегрального уравнения (3.144) используем функцию $F_+(T) := F(\sigma_+(T))\ \sigma'_+(T)$, а при решении интегрального уравнения (3.145) — функцию $F_-(T) := T\,F(\sigma_-(T))\,\sigma'_-(T)$. Заметим, что следствием оценки (3.151) и оценки вида (3.146) является оценка

$$|F_\pm(Z)| \leq c\left(|Z-1|^{-\beta_1} + |Z+1|^{-\beta_1}\right) \;\; \forall\, Z \in \mathbb{C} : |Z| \leq 1, Z \neq \pm 1, \quad (3.158)$$

в которой $\beta_1 = \beta + \beta_F - \beta\beta_F$, при этом $\max\{\beta, \beta_F\} \leq \beta_1 < 1$. Аналогично из оценки (3.158) при $\beta_1 \in [0;1)$ и при условии (3.151) получим оценку вида (3.146), в которой $\beta_F = (\beta - \beta_1)/(1-\beta)$, причем $\beta_F \in [0;1)$.

Введем в рассмотрение функцию $F_*(\tau) := \frac{iF_\pm(T)}{2(\tau+i)}$, которая является голоморфной в полуплоскости $\{\tau \in \mathbb{C} \;:\; \operatorname{Im}\tau > 0\}$, непрерывно продолжается на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и обращается в нуль в бесконечно удаленной точке.

Интегральные уравнения (3.144), (3.145) так же, как и уравнение (3.67), преобразуются к виду

$$D(\xi,\xi)V_f(\xi) - C\xi,\xi)U_f(\xi) - \frac{2\xi}{\pi}\int_0^\xi V_f(\tau)\int_\tau^\xi \frac{s(D(s,\tau) - D(\xi,\tau))}{(\xi^2 - s^2)^{3/2}\sqrt{s^2 - \tau^2}}\,ds\,d\tau +$$

$$+\frac{2\xi}{\pi}\int_0^\xi U_f(\tau)\int_\tau^\xi \frac{s(C(s,\tau) - C(\xi,\tau))}{(\xi^2 - s^2)^{3/2}\sqrt{s^2 - \tau^2}}\,ds\,d\tau = g_*(\xi)\,, \qquad (3.159)$$

где $U_f(\xi) := \operatorname{Re} F_*(\xi)$ и $V_f(\xi) := \operatorname{Im} F_*(\xi)$.

Используя формулу Гильберта (см. [8, с. 93]) для обращения сингулярного интеграла Коши и учитывая нечетность функции V_f, получаем

$$U_f(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_f(\tau)}{\tau - \xi}\,d\tau = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\tau\, V_f(\tau)}{\tau^2 - \xi^2}\,d\tau \qquad \forall\, \xi > 0.$$

Подставляя это выражение функции U_f в равенство (3.159), получаем сингулярное интегральное уравнение (3.152) для нахождения функции V_f. Таким образом, утверждения 1, 3 теоремы доказаны, а для завершения доказательства утверждения 2 (или утверждения 4) остается заметить, что функция F выражается через функцию V_f по формуле (3.156) (или, соответственно, по формуле (3.157)) в результате решения задачи Шварца для полуплоскости [31, с. 209].

20.4. Вспомогательные утверждения. Прежде, чем приступить к регуляризации сингулярного интегрального уравнения (3.152), докажем ряд вспомогательных утверждений.

В дальнейшем предполагаем, что области D_z^+, D_z^- имеют гладкие границы $\partial D_z^+, \partial D_z^-$ и такие, что конформное отображение $\sigma_\pm(Z)$ на границе единичного круга имеет непрерывную контурную производную, которая не обращается в нуль.

В этом случае при всех $T, Z \in \{Z \in \mathbb{C} \ : \ |Z| = 1\}$ таких, что $\operatorname{Re} T < \operatorname{Re} Z, \quad \operatorname{Im} Z \operatorname{Im} T > 0$, справедливы оценки

$$|\operatorname{Re}\sigma_\pm(T) - \operatorname{Re}\sigma_\pm(Z)| \le \ c\,\omega(\sigma'_\pm, \rho_{T,Z})\ |T - Z|,$$

$$|\operatorname{Im}\sigma_\pm(T) - \operatorname{Im}\sigma_\pm(Z)| \le \ c\ |T - Z|,$$

где $\rho_{T,Z} := \min\{|T-1|, |Z+1|\}$ и постоянная c не зависит от T и Z.

Из этих оценок и оценок (3.110), (3.111) для функции $M_\pm(Z,T)$ при сделанных предположениях об отображении $\sigma_\pm$ следуют аналогичные оценки для функции $N_\pm(Z,T) := M_\pm(Z,T)\,(\sigma_\pm(T) - \operatorname{Re}\sigma_\pm(Z))$:

$$|N_\pm(Z_1,T_0) - N_\pm(Z_0,T_0)| \le \ c\,\frac{\omega(\sigma'_\pm, |T_0 - Z_0|)}{|T_0 - Z_0|}\ \rho_{T_0,Z_0}\ |Z_1 - Z_0|, \tag{3.160}$$

$$|N_\pm(Z_0,T_1) - N_\pm(Z_0,T_0)| \le$$
$$\le \ c\ \left(\frac{\omega(\sigma'_\pm, |T_0 - Z_0|)}{|T_0 - Z_0|}\ \rho_{T_0,Z_0} + 1\right)\ |T_1 - T_0| \tag{3.161}$$

при всех $T_0, T_1, Z_1, Z_0 \in \{Z \in \mathbb{C} : |Z| = 1\}$ таких, что $-1 < \operatorname{Re} T_0 < < \operatorname{Re} T_1 < \operatorname{Re} Z_1 < \operatorname{Re} Z_0 < 1$, $\operatorname{Im} T_1 \operatorname{Im} T_0 > 0$, $\quad \operatorname{Im} Z_1 \operatorname{Im} T_0 > 0$, $\operatorname{Im} Z_0 \operatorname{Im} T_0 > 0$, где постоянная c не зависит от T_0, T_1, Z_1, Z_0.

Оценки (3.160), (3.161) существенно используются при доказательстве следующей леммы.

Лемма 3.7. *Для функции*

$$\widehat{n}(\xi,\tau) = \frac{2\xi}{\pi} \int\limits_{\tau}^{\xi} \frac{s(n(s,\tau) - n(\xi,\tau))}{(\xi^2 - s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\, ds,$$

где $n(\xi,\tau) := N_{\pm}\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}, \frac{\tau-i}{\tau+i}\right)$, *справедливы оценки*

$$|\widehat{n}(\xi,\tau)| \le\ c\, \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |T-Z|)}{|T-Z|}\ \frac{\xi}{(\xi+1)^{5/2}\ (\tau+1)^{3/2}} \quad \forall\, \xi > \tau > 0, \tag{3.162}$$

$$|\widehat{n}(\xi,\tau) - \widehat{n}(\xi-\varepsilon,\tau)| \le$$

$$\le\ c\, \frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |T-Z|)}{|T-Z|}\ \frac{\xi}{(\xi+1)^{5/2}\ (\tau+1)^{3/2}}\ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}}\,, \tag{3.163}$$

$$|\widehat{n}(\xi,\tau+\varepsilon) - \widehat{n}(\xi,\tau)| \le$$

$$\le\ c\, \left(\frac{\omega(\sigma'_{\pm}, |T-Z|)}{|T-Z|}\ \frac{\xi}{(\xi+1)\ (\tau^3+1)} + \frac{1}{\tau^2+1}\right)\ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}} \tag{3.164}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \tau > 0 \quad \forall\, \xi > \tau + 3\varepsilon,$$

где $T = \frac{\tau-i}{\tau+i}, Z = \frac{\xi-i}{\xi+i}$ *и постоянная* c *не зависит от* τ, ξ, ε.

Доказательство. Оценка (3.162) является следствием неравенства (3.160), с учетом которого устанавливается также оценка (3.163) подобно соответствующей оценке леммы 3.5.

Для доказательства оценки (3.164) представим приращение функции $\widetilde{n}(\xi,\tau)$ по второй переменной в виде

$$\widehat{n}(\xi,\tau+\varepsilon) - \widehat{n}(\xi,\tau) =$$

$$= \frac{2\xi}{\pi} \int\limits_{\tau+\varepsilon}^{\tau+2\varepsilon} \frac{s(n(s,\tau+\varepsilon) - n(\xi,\tau+\varepsilon))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-(\tau+\varepsilon)^2}}\, ds - \frac{2\xi}{\pi} \int\limits_{\tau}^{\tau+2\varepsilon} \frac{s(n(s,\tau) - n(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\, ds +$$

$$+ \frac{2\xi}{\pi} \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{s(n(s,\tau+\varepsilon) - n(\xi,\tau+\varepsilon))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-(\tau+\varepsilon)^2}}\, ds - \frac{2\xi}{\pi} \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{s(n(s,\tau) - n(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\, ds +$$

$$+\frac{2\xi}{\pi}\int\limits_{\tau+2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\frac{s(n(s,\tau+\varepsilon)-n(\xi,\tau+\varepsilon))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}\left(\frac{1}{\sqrt{s^2-(\tau+\varepsilon)^2}}-\frac{1}{\sqrt{s^2-\tau^2}}\right)ds+$$

$$+\frac{2\xi}{\pi}\int\limits_{\tau+2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\frac{s(n(s,\tau+\varepsilon)-n(s,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds-$$

$$-\frac{2\xi(n(\xi,\tau+\varepsilon)-n(\xi,\tau))}{\pi}\int\limits_{\tau+2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\frac{s\,ds}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds=:\sum_{j=1}^{7}I_j.$$

Учитывая оценку (3.160), получаем

$$|I_1|\le\frac{c\,\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)\rho_{T,Z}\,\xi}{|T-Z|}\int\limits_{\tau+\varepsilon}^{\tau+2\varepsilon}\frac{s}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-(\tau+\varepsilon)^2}}\,\frac{(\xi-s)\,ds}{(\xi+1)(s+1)}\le$$

$$\le\ c\ \frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\ \rho_{T,Z}\ \frac{\sqrt{\tau}}{(\xi+1)(\tau+1)\sqrt{\xi}}\ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}}\le$$

$$\le\ c\ \frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\ \frac{\sqrt{\xi\tau}}{(\xi^2+1)(\tau^2+1)}\ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}}\ .$$

Здесь, как и всюду в доказательстве, через c обозначены постоянные, значения которых не зависят от τ,ξ и ε, но, вообще говоря, различны даже в пределах одной цепочки неравенств.

Аналогично оцениваются интегралы I_2, I_3, I_4 и I_5. При оценке интеграла I_7 с учетом неравенства (3.161) получаем

$$|I_7|\le\ c\ \left(\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\ \rho_{T,Z}+1\right)\ \frac{\varepsilon\ \xi}{\tau^2+1}\int\limits_{\tau+2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\frac{s\,ds}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\le$$

$$\le\ c\ \left(\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\ \rho_{T,Z}+1\right)\ \frac{1}{\tau^2+1}\ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}}\le$$

$$\le\ c\ \left(\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\ \frac{\xi}{(\xi+1)\ (\tau^3+1)}+\frac{1}{\tau^2+1}\right)\ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}}\ .$$

Наконец, при оценке интеграла I_6, используя неравенство (3.161) и обозначая при этом $S:=\frac{s-i}{s+i}$, получаем

$$|I_6|\le\ c\ \frac{\varepsilon\ \xi}{\tau^2+1}\int\limits_{\tau+2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\left(\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-S|)}{|T-S|}\ \rho_{T,S}+1\right)\ \frac{s\,ds}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\le$$

$$\leq\ c\ \frac{\varepsilon\,\xi}{\tau^2+1}\Bigg(\int\limits_{\tau+2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-S|)}{|T-S|}\ \frac{s}{(s+1)(\tau+1)}\ \frac{s\,ds}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\ +$$

$$+\int\limits_{\tau+2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\frac{s\,ds}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\Bigg)\leq$$

$$\leq\ c\Bigg(\frac{\varepsilon\,\xi}{\tau^2+1}\,\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)\int\limits_{\tau+2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\frac{s^2}{(\xi+s)^{3/2}\sqrt{s+\tau}}\,\frac{ds}{(\xi-s)^{3/2}(s-\tau)^{3/2}}\ +$$

$$+\frac{1}{\tau^2+1}\ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}}\Bigg)\leq\ c\ \left(\frac{\xi\sqrt{\varepsilon}}{\tau^2+1}\ \frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{(\xi-\tau)^{3/2}}+\frac{1}{\tau^2+1}\ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}}\right)\leq$$

$$\leq\ c\ \left(\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\ \frac{\xi}{(\xi+1)\ (\tau^3+1)}+\frac{1}{\tau^2+1}\right)\ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}}\ .$$

Следствием полученных оценок является оценка (3.164) и лемма доказана.

Введем в рассмотрение функцию $\Pi(\xi)\ :=\ |\xi|^{\beta_0}\,(|\xi|+1)^{\beta_\infty-\beta_0}$, где $\beta_0\in(0;1)$, $\beta_\infty\in(0;1/2)$. Очевидно, что для функции $\Pi(\xi)$ выполняются соотношения

$$c_1\ |\xi|^{\beta_0}\leq\Pi(\xi)\leq\ c_2\ |\xi|^{\beta_0}\quad\forall\,\xi\in\mathbb{R}:0<|\xi|\leq 1,\tag{3.165}$$

$$c_1\ |\xi|^{\beta_\infty}\leq\Pi(\xi)\leq\ c_2\ |\xi|^{\beta_\infty}\quad\forall\,\xi\in\mathbb{R}:|\xi|\geq 1,\tag{3.166}$$

в которых c_1 и c_2 — некоторые положительные постоянные.

Условимся, что всюду в доказательстве следующих лемм 3.8, 3.9 через c обозначены постоянные, значения которых не зависят от ξ и ε, но, вообще говоря, различны даже в пределах одной цепочки неравенств.

Лемма 3.8. *Пусть модуль непрерывности контурной производной конформного отображения $\sigma_\pm(Z)$ на единичной окружности удовлетворяет условию вида* (3.100) *при $k=0$, а для функции $\widehat{n}(\xi,\tau)$ справедливы оценки* (3.162), (3.163). *Тогда справедливы также оценки*

$$\int\limits_0^\xi\frac{|\widehat{n}(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau\leq\frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\ \frac{1}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta(\xi^{\beta_\infty-1/2}+\eta^{1/2-\beta_\infty})}\,d\eta\ \forall\,\xi\geq 1,\tag{3.167}$$

$$\int_0^{\xi} \frac{|\widehat{n}(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau \le\ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)}\int_0^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\,d\eta \quad \forall\,\xi\in(0;1]\,, \tag{3.168}$$

$$\left|\int_0^{\xi+\varepsilon}\frac{|\widehat{n}(\xi+\varepsilon,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau-\int_0^{\xi}\frac{|\widehat{n}(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau\right|\le$$

$$\le\frac{c\,\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\,\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\int_0^2\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta(\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}+\eta^{1/2-\beta_\infty})}\,d\eta \quad \forall\,\xi>4\varepsilon>0, \tag{3.169}$$

где $\varepsilon_1:=\frac{\varepsilon}{\xi^2+1}$ *и постоянная* c *не зависит от* ξ *и* ε.

Доказательство. Следствием оценки (3.162) является неравенство

$$\int_0^{\xi}\frac{|\widehat{n}(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau\le\ c\,\frac{\xi}{(\xi+1)^{5/2}}\int_0^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\,\frac{d\tau}{\Pi(\tau)(\tau+1)^{3/2}}=:I_8\,.$$

Далее при $\xi\ \ge\ 1$ с учетом неравенств (3.165), (3.166) получаем соотношения

$$I_8\le c\left(\frac{1}{\xi^{3/2}}\int_0^{1/2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\,\frac{d\tau}{\tau^{\beta_0}}+\frac{1}{\xi^{3/2}}\int_{1/2}^{\xi/2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\,\frac{\tau^{1/2-\beta_\infty}\,d\tau}{\tau^2+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\xi^{1+\beta_\infty}}\int_{\xi/2}^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\,\frac{d\tau}{\tau^2+1}\right)\le$$

$$\le\ c\left(\frac{1}{\xi^{3/2}}+\frac{1}{\xi^{3/2}}\int_{\xi/(\xi^2+4)}^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}\,d\eta\ +\frac{1}{\xi^{1+\beta_\infty}}\int_0^{\xi/(\xi^2+1)}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\,d\eta\right)\le$$

$$\le\ c\,\frac{1}{\xi\Pi(\xi)}\,\frac{1}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\int_0^2\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta(\xi^{\beta_\infty-1/2}+\eta^{1/2-\beta_\infty})}\,d\eta$$

и оценка (3.167) доказана. Аналогично устанавливается оценка (3.168).

Для получения оценки (3.169) используем неравенство

$$\left|\int_0^{\xi+\varepsilon}\frac{|\widehat{n}(\xi+\varepsilon,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau-\int_0^{\xi}\frac{|\widehat{n}(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau\right|\le$$

$$\leq \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{|\widehat{n}(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau + \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \frac{|\widehat{n}(\xi+\varepsilon,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau \ + \int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon} \frac{|\widehat{n}(\xi+\varepsilon,\tau)-\widehat{n}(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau =:$$

$$=: I_9 + I_{10} + I_{11}\,.$$

Теперь с учетом неравенств (3.162), (3.165) и (3.166) оцениваем I_9:

$$I_9 \leq \ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)} \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z|)}{|T-Z|}\ \frac{d\tau}{(\tau^2+1)} \leq$$

$$\leq \ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)} \int\limits_{0}^{2\varepsilon_1} \frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta}\,d\eta \leq$$

$$\leq \ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\ \varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty} \int\limits_{0}^{2} \frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta(\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}+\eta^{1/2-\beta_\infty})}\,d\eta\,.$$

Аналогично оценивается интеграл I_{10}.

При оценке интеграла I_{11}, используя неравенство (3.163), получаем

$$I_{11} \leq \ c\,\frac{\xi\,\sqrt{\varepsilon}}{(\xi+1)^{5/2}} \int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon} \frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z|)}{|T-Z|}\ \frac{d\tau}{\sqrt{\xi-\tau}\ \Pi(\tau)\ (\tau+1)^{3/2}}\,.$$

Далее из этого неравенства при $\xi \geq 1$ с учетом неравенств (3.165), (3.166) получаем соотношения

$$I_{11} \leq \ c\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\xi^2}\Bigg(\int\limits_{0}^{1/2} \frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z|)}{|T-Z|}\ \frac{d\tau}{\tau^{\beta_0}} +$$

$$+\int\limits_{1/2}^{\xi/2} \frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z|)}{|T-Z|}\sqrt{\frac{(\xi+1)(\tau+1)}{\xi-\tau}}\ \frac{d\tau}{\tau^{\beta_\infty}\ (\tau^2+1)} +$$

$$+\frac{1}{\xi^{\beta_\infty}}\int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon} \frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z|)}{|T-Z|}\sqrt{\frac{(\xi+1)(\tau+1)}{\xi-\tau}}\ \frac{d\tau}{\tau^2+1}\Bigg) \leq$$

$$\leq\ c\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\xi^2}\left(1+\int\limits_{\xi/(\xi^2+4)}^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}\,d\eta+\frac{1}{\xi^{\beta_\infty}}\int\limits_{\varepsilon_1}^{\xi/(\xi^2+1)}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2}}\,d\eta\right)\leq$$

$$\leq\ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\,\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta(\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}+\eta^{1/2-\beta_\infty})}\,d\eta\,.$$

При $\xi\in(0;1]$ интеграл I_{11} оценивается аналогично.

Таким образом, установлена оценка (3.169) и лемма доказана.

Лемма 3.9. *Пусть модуль непрерывности контурной производной конформного отображения $\sigma_\pm(Z)$ на единичной окружности удовлетворяет условию вида* (3.115), *а для функции $\widehat{n}(\xi,\tau)$ справедливы оценки* (3.162) – (3.164). *Тогда для функции*

$$n_f(\xi,\tau)=\int\limits_0^\xi\frac{\widehat{n}(\xi,s)}{s-\tau}\,ds,$$

в свою очередь, справедливы оценки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|n_f(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau\leq\ c\,\frac{1}{\xi\,\Pi(\xi)}\,\frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\ \times$$

$$\times\int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\frac{\ln\frac{3}{\eta}}{\xi^{\beta_\infty-1/2}\ln(\xi+1)+\eta^{1/2-\beta_\infty}\ln\frac{3}{\eta}}\,d\eta\quad\forall\,\xi\geq1,\qquad(3.170)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|n_f(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau\leq\ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)}\int\limits_0^\xi\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\ \ln\frac{3}{\eta}\,d\eta\quad\forall\,\xi\in(0;1],\ (3.171)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|n_f(\xi+\varepsilon,\tau)-n_f(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau\leq\ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\,\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\ \ln\frac{1}{\varepsilon_1}\ \times$$

$$\times\int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\frac{\ln\frac{3}{\eta}}{\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}+\eta^{1/2-\beta_\infty}\ln\frac{3}{\eta}}\,d\eta,\qquad(3.172)$$

$$\varepsilon_1:=\frac{\varepsilon}{\xi^2+1},\quad\forall\,\xi>4\varepsilon>0,$$

где постоянная c не зависит от ξ и ε.

Доказательство. Для доказательства неравенства (3.170) используем равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|n_f(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau = \left(\int\limits_{-\infty}^{-\xi} + \int\limits_{2\xi}^{\infty}\right)\frac{|n_f(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau + \int\limits_{-\xi}^{0} \frac{|n_f(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau +$$

$$+\int\limits_{\xi}^{2\xi} \frac{|n_f(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau + \int\limits_{\xi/2}^{\xi} \frac{|n_f(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau + \int\limits_{0}^{\xi/2} \frac{|n_f(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau =: \sum_{j=12}^{16} I_j \quad (3.173)$$

и оценим интегралы $I_{12}, I_{13}, \ldots, I_{16}$ при любом $\xi \geq 1$.

С учетом оценки (3.162) получаем соотношения

$$I_{12} \leq\ c\left(\int\limits_{-\infty}^{-\xi} + \int\limits_{2\xi}^{\infty}\right)\frac{d\tau}{\Pi(\tau)\tau}\int\limits_{0}^{\xi} |\widehat{n}(\xi,s)|\,ds \leq$$

$$\leq\ c\,\frac{1}{\Pi(\xi)\ \xi^{3/2}}\ \left(\int\limits_{0}^{\xi/2} + \int\limits_{\xi/2}^{\xi}\right)\frac{\omega(\sigma'_\pm, |S-Z|)}{|S-Z|}\ \frac{ds}{(s+1)^{3/2}}\ ,$$

где $S := \frac{s-i}{s+i}$.

Далее аналогично оценке интеграла I_8 получаем

$$I_{12} \leq\ c\,\frac{1}{\xi\ \Pi(\xi)}\ \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\int\limits_{\xi/(\xi^2+4)}^{2} \frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2}}\,d\eta + \int\limits_{0}^{\xi/(\xi^2+1)} \frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\,d\eta\right) \leq$$

$$\leq\ c\,\frac{1}{\xi\Pi(\xi)}\ \frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\ \int\limits_{0}^{2} \frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\ \frac{\ln\frac{3}{\eta}}{\xi^{\beta_\infty-1/2}\ln(\xi+1) + \eta^{1/2-\beta_\infty}\ln\frac{3}{\eta}}\ d\eta\,.$$

С учетом теоремы Фубини и оценок (3.162), (3.165) и (3.166) имеем

$$I_{13} = \int\limits_{0}^{\xi} \frac{|n_f(\xi,-\tau)|}{\Pi(\tau)}\,d\tau = \int\limits_{0}^{\xi} |\widehat{n}(\xi,s)| \int\limits_{0}^{\xi} \frac{d\tau}{\Pi(\tau)(\tau+s)}\,ds \leq$$

$$\leq \frac{c}{\xi^{3/2}}\left(\int\limits_{0}^{1} \frac{\omega(\sigma'_\pm, |S-Z|)}{|S-Z|}\left(\int\limits_{0}^{s} \frac{d\tau}{s\,\tau^{\beta_0}} + \int\limits_{s}^{1}\frac{d\tau}{\tau^{1+\beta_0}} + \int\limits_{1}^{\xi}\frac{d\tau}{\tau^{1+\beta_\infty}}\right)\frac{ds}{(s+1)^{3/2}} +\right.$$

$$+\int\limits_1^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|S-Z|)}{|S-Z|}\left(\int\limits_0^1\frac{d\tau}{s\ \tau^{\beta_0}}+\int\limits_1^s\frac{d\tau}{s\ \tau^{\beta_\infty}}+\int\limits_s^{\xi}\frac{d\tau}{\tau^{1+\beta_\infty}}\right)\frac{ds}{(s+1)^{3/2}}\right)\leq$$

$$\leq\frac{c}{\xi^{3/2}}\left(\int\limits_0^1\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|S-Z|)}{|S-Z|}\ \frac{ds}{s^{\beta_0}}+\left(\int\limits_1^{\xi/2}+\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\right)\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|S-Z|)}{|S-Z|}\ \frac{s^{1/2-\beta_\infty}\,ds}{s^2+1}\right).$$

Далее I_{13} оценивается подобно интегралу I_8.

Аналогично с учетом теоремы Фубини и оценок (3.162), (3.166) получаем соотношения

$$I_{14}\leq\frac{c}{\Pi(\xi)}\int\limits_0^{\xi}|\widehat{n}(\xi,s)|\int\limits_{\xi}^{2\xi}\frac{d\tau}{\tau-s}\,ds\leq\frac{c}{\Pi(\xi)}\left(\int\limits_0^{\xi/2}+\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\right)|\widehat{n}(\xi,s)|\ln\frac{2\xi}{\xi-s}\,ds\leq$$

$$\leq\ c\ \frac{1}{\xi\ \Pi(\xi)}\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\int\limits_{\xi/(\xi^2+4)}^{2}\ \frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta^{3/2}}\,d\eta+\int\limits_0^{\xi/(\xi^2+1)}\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta}\ \ln\frac{1}{\eta}\ d\eta\right)\leq$$

$$\leq\ c\ \frac{1}{\xi\Pi(\xi)}\ \frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\ \int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta}\ \frac{\ln\frac{3}{\eta}}{\xi^{\beta_\infty-1/2}\ln(\xi+1)+\eta^{1/2-\beta_\infty}\ln\frac{3}{\eta}}\ d\eta\,.$$

Введем теперь в рассмотрение множества $e_1:=[\tau-\delta_1,\tau+\delta_1]$, $e_2:=$ $:=[\xi/4,\tau-\delta_1]\cup[\tau+\delta_1,\xi]$, где $\delta_1=\frac{\xi-\tau}{2\xi}$, и оценим I_{15} суммой трех интегралов:

$$I_{15}\leq\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\int\limits_{e_1}\frac{|\widehat{n}(\xi,s)-\widehat{n}(\xi,\tau)|}{|s-\tau|}\,ds\,\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}+\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\int\limits_{e_2}\frac{|\widehat{n}(\xi,s)|}{|s-\tau|}\,ds\,\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}+$$

$$+\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\int\limits_0^{\xi/4}\frac{|\widehat{n}(\xi,s)|}{|s-\tau|}\,ds\,\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}=:I_{15}^1+I_{15}^2+I_{15}^3.\qquad(3.174)$$

Далее с учетом неравенств (3.164), (3.166) получаем оценку интеграла I_{15}^1:

$$I_{15}^1\leq\frac{c}{\Pi(\xi)}\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\left(\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z|)}{|T-Z|}\ \frac{1}{\tau^3+1}+\frac{1}{\tau^2+1}\right)\int\limits_{e_1}\frac{ds}{\sqrt{|s-\tau|}}\ \frac{d\tau}{\sqrt{\xi-\tau}}\leq$$

$$\leq\ c\,\frac{1}{\Pi(\xi)\sqrt{\xi}}\left(\frac{1}{\xi}\int\limits_0^{\xi/(\xi^2+1)}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\,d\eta+\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\frac{d\tau}{\tau^2+1}\right)\leq\ c\,\frac{1}{\xi\Pi(\xi)}\,\frac{1}{\sqrt{\xi}}\,.$$

Используя теорему Фубини и неравенства (3.162), (3.166), а также обозначая при этом $e_* := [\xi/2,\xi]\backslash(s-\delta_s, s+\delta_s)$, где $\delta_s := \frac{\xi-s}{2\xi-1}$, оцениваем интеграл I^2_{15}:

$$I^2_{15}\leq\frac{c}{\Pi(\xi)}\int\limits_{\xi/4}^{\xi}|\widehat{n}(\xi,s)|\int\limits_{e_*}\frac{d\tau}{|s-\tau|}\,ds\leq c\,\frac{\ln(\xi+1)}{\Pi(\xi)}\int\limits_{\xi/4}^{\xi}|\widehat{n}(\xi,s)|\,ds\leq$$

$$\leq\frac{c\,\ln(\xi+1)}{(\xi+1)\,\Pi(\xi)}\int\limits_{\xi/4}^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|S-Z|)}{|S-Z|}\,\frac{ds}{s^2+1}\leq\frac{c\,\ln\xi}{\xi\,\Pi(\xi)}\int\limits_0^{6\xi/(\xi^2+1)}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\,d\eta\,.$$

С учетом неравенств (3.162), (3.166) получаем оценку интеграла I^3_{15}:

$$I^3_{15}\leq\frac{c}{\Pi(\xi)\ (\xi+1)^{3/2}\ \xi}\int\limits_{\xi/2}^{\xi}d\tau\int\limits_0^{\xi/4}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|S-Z|)}{|S-Z|}\ \frac{\sqrt{s+1}\,ds}{s^2+1}\leq$$

$$\leq\frac{c}{\xi\ \Pi(\xi)}\ \frac{1}{\sqrt{\xi}}\int\limits_{\xi/(\xi^2+4)}^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2}}\,d\eta.$$

Таким образом, при любом $\xi\geq 1$ справедливы соотношения

$$I_{15}\leq\frac{c}{\xi\ \Pi(\xi)}\left(\int\limits_0^{\xi/(\xi^2+1)}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\ \ln\frac{1}{\eta}\,d\eta+\frac{1}{\sqrt{\xi}}\int\limits_{\xi/(\xi^2+4)}^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2}}\,d\eta\right)\leq$$

$$\leq\ c\,\frac{1}{\xi\Pi(\xi)}\,\frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\int\limits_0^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\frac{\ln\frac{3}{\eta}}{\xi^{\beta_\infty-1/2}\ln(\xi+1)+\eta^{1/2-\beta_\infty}\ln\frac{3}{\eta}}\ d\eta.$$

Наконец, введем в рассмотрение множества $e'_1 := [\tau-\delta_2,\tau+\delta_2]$, $e'_2 := [0,\tau-\delta_2]$, $e'_3 := [\tau+\delta_2, 3\xi/4]$, где $\delta_2=\tau^3/\xi^3$, и оценим I_{16} суммой четырех интегралов:

$$I_{16}\leq\int\limits_0^{\xi/2}\int\limits_{e'_1}\frac{|\widehat{n}(\xi,s)-\widehat{n}(\xi,\tau)|}{|s-\tau|}\,ds\ \frac{d\tau}{\Pi(\tau)}+\int\limits_0^{\xi/2}\int\limits_{e'_2}\frac{|\widehat{n}(\xi,s)|}{|s-\tau|}\,ds\ \frac{d\tau}{\Pi(\tau)}+$$

$$\int\limits_0^{\xi/2}\int\limits_{e_3'}\frac{|\widetilde{m}(\xi,s)|}{s-\tau}\,ds\,\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}+\int\limits_0^{\xi/2}\int\limits_{3\xi/4}^{\xi}\frac{|\widetilde{m}(\xi,s)|}{s-\tau}\,ds\,\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}=:$$

$$=: I_{16}^1+I_{16}^2+I_{16}^3+I_{16}^4. \tag{3.175}$$

Теперь с учетом неравенств (3.164) – (3.166) получаем оценку интеграла I_{16}^1:

$$I_{16}^1\le c\int\limits_0^{\xi/2}\left(\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\,\frac{1}{\tau^3+1}+\frac{1}{\tau^2+1}\right)\int\limits_{e_1'}\frac{ds}{\sqrt{|s-\tau|}}\,\frac{d\tau}{\Pi(\tau)\sqrt{\xi-\tau}}\le$$

$$\le\frac{c}{\xi^2}\left(\int\limits_0^{1/2}+\int\limits_{1/2}^{\xi/2}\right)\left(\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\,\frac{1}{\tau^3+1}+\frac{1}{\tau^2+1}\right)\,\frac{\tau^{3/2}\,d\tau}{\Pi(\tau)}\le$$

$$\le\frac{c}{\xi^2}\left(\int\limits_0^{1/2}\tau^{3/2-\beta_0}\,d\tau+\int\limits_{\xi/(\xi^2+4)}^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}\,d\eta+\int\limits_{1/2}^{\xi/2}\tau^{-1/2-\beta_\infty}\,d\tau\right)\le c\,\frac{1}{\xi\Pi(\xi)}\,\frac{1}{\sqrt{\xi}}\,.$$

С учетом неравенств (3.162), (3.165), (3.166) и свойств модуля непрерывности (см., например, [19, 82]) оцениваем интегралы I_{16}^2, I_{16}^4:

$$I_{16}^2\le\frac{c}{(\xi+1)^{3/2}}\left(\int\limits_0^{1/2}\int\limits_{e_2'}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|S-Z|)}{|S-Z|}\,\frac{ds}{(\tau-s)(s+1)^{3/2}}\,\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1/2}^{\xi/2}\left(\int\limits_0^{\tau/2}+\int\limits_{\tau/2}^{\tau-\delta_2}\right)\frac{\omega(\sigma'_\pm,|S-Z|)}{|S-Z|}\,\frac{ds}{(\tau-s)(s+1)^{3/2}}\,\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}\right)\le$$

$$\le\frac{c}{\xi^{3/2}}\left(\int\limits_0^{1/2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|T-Z|)}{|T-Z|}\int\limits_{e_2'}\frac{ds}{\tau-s}\,\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}+\right.$$

$$+\int\limits_{1/2}^{\xi/2}\int\limits_0^{\tau/2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|S-Z|)}{|S-Z|}\,\frac{\sqrt{s+1}\,ds}{s^2+1}\,\frac{d\tau}{\tau\,\Pi(\tau)}+$$

$$+\int\limits_{1/2}^{\xi/2} \frac{\omega(\sigma'_\pm, |T-Z|)}{|T-Z|} \int\limits_{\tau/2}^{\tau-\delta_2} \frac{ds}{\tau - s}\ \frac{d\tau}{\Pi(\tau)\ (\tau+1)^{3/2}}\Biggr) \leq$$

$$\leq \frac{c}{\xi^{3/2}}\Biggl(\int\limits_0^{1/2} \ln\frac{\xi^3}{\tau^2}\ \frac{d\tau}{\tau^{\beta_0}} + \int\limits_{1/\xi}^{2}\int\limits_{\tau_1}^{2} \frac{\omega(\sigma'_\pm, \eta)}{\eta^{3/2}}\, d\eta\ \frac{d\tau_1}{\tau_1^{1-\beta_\infty}} +$$

$$+\int\limits_{1/2}^{\xi/2} \frac{\omega(\sigma'_\pm, |T-Z|)}{|T-Z|} \ln\frac{\xi^3}{\tau^2}\ \frac{\tau^{1/2-\beta_\infty}\, d\tau}{\tau^2+1}\Biggr) \leq \frac{c}{\xi^{3/2}}\ \Biggl(\ln(\xi+1) +$$

$$+\int\limits_{1/\xi}^{2} \frac{\omega(\sigma'_\pm, \eta)}{\eta^{3/2}} \int\limits_{1/\xi}^{\eta} \frac{d\tau_1}{\tau_1^{1-\beta_\infty}}\, d\eta + \ln(\xi+1)\int\limits_{1/\xi}^{2} \frac{\omega(\sigma'_\pm, \eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}\ d\eta\Biggr) \leq$$

$$\leq \frac{c}{\xi\ \Pi(\xi)}\ \frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{1/2-\beta_\infty}} \int\limits_{1/\xi}^{2} \frac{\omega(\sigma'_\pm, \eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}\ d\eta;$$

$$I_{16}^4 \leq \frac{c}{(\xi+1)\,\xi}\int\limits_0^{\xi/2}\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}\int\limits_{3\xi/4}^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_\pm, |S-Z|)}{|S-Z|}\ \frac{ds}{s^2+1} \leq \frac{c}{\xi\,\Pi(\xi)}\int\limits_0^{1/\xi}\frac{\omega(\sigma'_\pm, \eta)}{\eta}\, d\eta,$$

и, используя дополнительно теорему Фубини, оцениваем интеграл I_{16}^3:

$$I_{16}^3 \leq \frac{c}{(\xi+1)^{3/2}}\int\limits_0^{\xi/2}\Biggl(\int\limits_{\tau+\delta_2}^{3\tau/2} + \int\limits_{3\tau/2}^{3\xi/4}\Biggr)\frac{\omega(\sigma'_\pm, |S-Z|)}{|S-Z|}\ \frac{ds}{(s-\tau)(s+1)^{3/2}}\ \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} \leq$$

$$\leq \frac{c}{\xi^{3/2}}\Biggl(\int\limits_0^{\xi/2}\frac{\omega(\sigma'_\pm, |T-Z|)}{|T-Z|}\int\limits_{\tau+\delta_2}^{3\tau/2}\frac{ds}{s-\tau}\ \frac{d\tau}{\Pi(\tau)\ (\tau+1)^{3/2}} +$$

$$+\int\limits_0^{3\xi/4}\frac{\omega(\sigma'_\pm, |S-Z|)}{|S-Z|}\int\limits_0^{2s/3}\frac{d\tau}{\Pi(\tau)(s-\tau)}\ \frac{ds}{(s+1)^{3/2}}\Biggr) \leq$$

$$\leq \frac{c}{\xi^{3/2}}\Biggl(\Biggl(\int\limits_0^{1/2} + \int\limits_{1/2}^{\xi/2}\Biggr)\frac{\omega(\sigma'_\pm, |T-Z|)}{|T-Z|}\ \ln\frac{\xi^3}{\tau^2}\ \frac{d\tau}{\Pi(\tau)\ (\tau+1)^{3/2}} +$$

$$+\left(\int_0^{3/4}+\int_{3/4}^{3\xi/4}\right)\frac{\omega(\sigma'_\pm,|S-Z|)}{|S-Z|}\int_0^{2s/3}\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}\;\frac{ds}{s\,(s+1)^{3/2}}\Bigg)\le$$

$$\le\; c\,\frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{3/2}}\int_{1/\xi}^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}\,d\eta=\frac{c}{\xi\,\Pi(\xi)}\;\frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\int_{1/\xi}^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}\,d\eta;$$

Таким образом, при любом $\xi\ge 1$ справедливы соотношения

$$I_{16}\le\frac{c}{\xi\,\Pi(\xi)}\left(\int_0^{1/\xi}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\,d\eta+\frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\int_{1/\xi}^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}\,d\eta\right)\le$$

$$\le\; c\,\frac{1}{\xi\Pi(\xi)}\;\frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{1/2-\beta_\infty}}\int_0^{2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\frac{\ln\frac{3}{\eta}}{\xi^{\beta_\infty-1/2}\ln(\xi+1)+\eta^{1/2-\beta_\infty}\ln\frac{3}{\eta}}\,d\eta.$$

Следствием полученных оценок является неравенство (3.170).

Для доказательства неравенства (3.171) оценим интегралы $I_{12},I_{13},\ldots,I_{16}$ из равенства (3.173) при любом $\xi\in(0;1]$. Для оценки интегралов I_{15}, I_{16} используем соотношения (3.174), (3.175), в которых при определении множеств e_1,e_2,e'_1,e'_2,e'_3 следует принять $\delta_1=(\xi-\tau)^2$ и $\delta_2=\tau^2$. Теперь интегралы I^j_{15} при $j=1,2,3$ и интегралы $I_{12},I_{14},I^1_{16},I^4_{16}$ оцениваются аналогично тому, как это сделано при $\xi\ge 1$. Интеграл I_{13} оценивается с учетом теоремы Фубини и неравенств (3.162), (3.165):

$$I_{13}=\int_0^{\xi}|\widehat{n}(\xi,s)|\left(\int_0^{s}+\int_s^{\xi}\right)\frac{d\tau}{\Pi(\tau)(\tau+s)}\,ds\le\; c\,\xi\int_0^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|S-Z|)}{|S-Z|}\,\frac{ds}{s^{\beta_0}}\le$$

$$\le c\left(\omega(\sigma'_\pm,\xi)\int_0^{\xi/2}\frac{ds}{s^{\beta_0}}+\xi^{1-\beta_0}\int_{\xi/2}^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|S-Z|)}{|S-Z|}\,ds\right)\le\frac{c\,\xi}{\Pi(\xi)}\int_0^{\xi}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\,d\eta,$$

а при оценке интеграла I^2_{16} с учетом неравенств (3.162), (3.165) и свойств модуля непрерывности (см., например, [19, 82]) получаем

$$I^2_{16}\le\; c\,\xi\int_0^{\xi/2}\int_{e'_2}\frac{\omega(\sigma'_\pm,|S-Z|)}{|S-Z|}\;\frac{ds}{\tau-s}\;\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}\le$$

$$\leq \; c\,\xi \int\limits_0^{\xi/2} \frac{\omega(\sigma'_\pm, |T-Z|)}{|T-Z|} \int\limits_{e'_2} \frac{ds}{\tau - s}\; \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} \leq$$

$$\leq \; c\,\omega(\sigma'_\pm, \xi) \int\limits_0^{\xi/2} \ln\frac{1}{\tau}\; \frac{d\tau}{\tau^{\beta_0}} \leq \; c\; \frac{\xi}{\Pi(\xi)}\; \omega(\sigma'_\pm, \xi)\; \ln\frac{2}{\xi}.$$

Аналогично оценивается интеграл I^3_{16}. Следствием этих оценок является неравенство (3.171).

Перейдем теперь к доказательству оценки (3.172). С этой целью рассмотрим произвольные ξ и ε, удовлетворяющие соотношению $\xi > 4\varepsilon > 0$, и используем неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|n_f(\xi+\varepsilon,\tau) - n_f(\xi,\tau)|}{\Pi(\tau)}\, d\tau \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big| \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\widehat{n}(\xi,s)}{s-\tau}\, ds \Big|\; \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big| \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \frac{\widehat{n}(\xi+\varepsilon,s)}{s-\tau}\, ds \Big|\; \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big| \int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon} \frac{\widehat{n}(\xi+\varepsilon,s) - \widehat{n}(\xi,s)}{s-\tau}\, ds \Big|\; \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} =:$$

$$=: I_{17} + I_{18} + I_{19}\,.$$

Далее оценим I_{17} суммой интегралов:

$$I_{17} \leq \Big(\int\limits_{-\infty}^{-\xi} + \int\limits_{2\xi}^{\infty} \Big) \Big| \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\widehat{n}(\xi,s)}{s-\tau}\, ds \Big|\; \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} + \int\limits_{-\xi}^{0} \Big| \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\widehat{n}(\xi,s)}{s-\tau}\, ds \Big|\; \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} +$$

$$+ \int\limits_{\xi}^{2\xi} \Big| \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\widehat{n}(\xi,s)}{s-\tau}\, ds \Big|\; \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} \; + \int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon} \Big| \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\widehat{n}(\xi,s)}{s-\tau}\, ds \Big|\; \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} +$$

$$+ \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \Big| \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\widehat{n}(\xi,s)}{s-\tau}\, ds \Big|\; \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} =: \sum_{j=1}^{5} I^j_{17}.$$

Оценивая теперь интегралы $I^1_{17}, I^2_{17}, I^3_{17}$ по аналогии с оценками интегралов I_{12}, I_{13}, I_{14} соответственно, получаем

$$I^1_{17} + I^2_{17} + I^3_{17} \leq \; c\; \frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)} \int\limits_0^{2\varepsilon_1} \frac{\omega(\sigma'_\pm, \eta)}{\eta}\; \ln\frac{1}{\eta}\; d\eta.$$

Также подобно оценке интеграла I_{14} оценивается I_{17}^4:

$$I_{17}^4 \le \ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\int\limits_0^{2\varepsilon_1}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\ \ln\frac{1}{\eta}\ d\eta\,.$$

Оценим интеграл I_{17}^5 сначала при $\xi \ge 1$. В этом случае введем в рассмотрение множества $\widetilde{e}_1 := [\tau-\delta_3,\tau+\delta_3]$, $\widetilde{e}_2 := [\xi-\varepsilon,\tau-\delta_3]\cup$ $\cup[\tau+\delta_3,\xi]$, где $\delta_3=\min\{\frac{\xi-\tau}{2\xi},\frac{\tau-(\xi-\varepsilon)}{2\xi}\}$, и оценим I_{17}^5 суммой интегралов:

$$I_{17}^5 \le \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\int\limits_{\widetilde{e}_1}\frac{|\widehat{n}(\xi,s)-\widehat{n}(\xi,\tau)|}{|s-\tau|}\,ds\,\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}+\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\int\limits_{\widetilde{e}_2}\frac{|\widehat{n}(\xi,s)|}{|s-\tau|}\,ds\,\frac{d\tau}{\Pi(\tau)}=:$$

$$=: i_1+i_2\,. \tag{3.176}$$

Далее, оценивая интегралы i_1,i_2 по аналогии с оценками интегралов I_{15}^1,I_{15}^2 соответственно, получаем

$$i_1\le\ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\,\frac{\varepsilon}{\xi^{3/2}}\le\ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\,\sqrt{\varepsilon_1},$$

$$i_2\le\frac{c}{\xi\Pi(\xi)}\ln{(\xi+1)}\int\limits_0^{2\varepsilon_1}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\,d\eta\le\ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\ \int\limits_0^{2\varepsilon_1}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\ \ln\frac{1}{\eta}\ d\eta.$$

Для оценки интеграла I_{17}^5 в случае $\xi\in(0;1)$ используем соотношение (3.176), в котором через $\widetilde{e}_1,\widetilde{e}_2$ теперь обозначены следующие множества: $\widetilde{e}_1 := [\tau-\delta_4,\tau+\delta_4]$, $\widetilde{e}_2 := [\xi-\varepsilon,\tau-\delta_4]\cup[\tau+\delta_4,\xi]$, где $\delta_4=\min\{(\xi-\tau)^2,$ $(\tau-(\xi-\varepsilon))^2\}$.

В этом случае, оценивая интегралы i_1,i_2 по аналогии с оценками интегралов I_{15}^1,I_{15}^2 соответственно, получаем

$$i_1\le\frac{c}{\Pi(\xi)}\int\limits_0^{\varepsilon}\left(\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\sqrt{\eta}}\xi+\sqrt{\eta}\right)\,d\eta\le\ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\ \sqrt{\varepsilon},$$

$$i_2\le\ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\ \int\limits_0^{\varepsilon}\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\ \ln\frac{1}{\eta}\ d\eta.$$

Таким образом, при любом $\xi > 0$ справедливы оценки

$$I_{17} \le \ c\, \frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)} \ \left(\sqrt{\varepsilon_1} + \int\limits_0^{2\varepsilon_1} \frac{\omega(\sigma'_\pm, \eta)}{\eta} \ \ln\frac{1}{\eta}\, d\eta \right) \le$$

$$\le \frac{c\,\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\, \varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\, \ln\frac{1}{\varepsilon_1} \int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma'_\pm, \eta)}{\eta} \frac{\ln\frac{3}{\eta}}{\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty} \ln\frac{1}{\varepsilon_1} + \eta^{1/2-\beta_\infty} \ln\frac{3}{\eta}}\, d\eta\,.$$

Аналогично оценивается интеграл I_{18}.

Оценим еще I_{19} суммой интегралов:

$$I_{19} \le \Big(\int\limits_{-\infty}^{-\xi} + \int\limits_{2\xi}^{\infty} \Big) \Big| \int\limits_0^{\xi-\varepsilon} \frac{\widehat{n}(\xi+\varepsilon, s) - \widehat{n}(\xi, s)}{s-\tau}\, ds \Big|\ \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} \ +$$

$$+ \int\limits_{-\xi}^{0} \Big| \int\limits_0^{\xi-\varepsilon} \frac{\widehat{n}(\xi+\varepsilon, s) - \widehat{n}(\xi, s)}{s-\tau}\, ds \Big| \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} + \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{2\xi} \Big| \int\limits_0^{\xi-\varepsilon} \frac{\widehat{n}(\xi+\varepsilon, s) - \widehat{n}(\xi, s)}{s-\tau}\, ds \Big| \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} +$$

$$+ \int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon} \Big| \int\limits_0^{\xi-\varepsilon} \frac{\widehat{n}(\xi+\varepsilon, s) - \widehat{n}(\xi, s)}{s-\tau}\, ds \Big|\ \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} \ +$$

$$+ \int\limits_0^{\xi/2} \Big| \int\limits_0^{\xi-\varepsilon} \frac{\widehat{n}(\xi+\varepsilon, s) - \widehat{n}(\xi, s)}{s-\tau}\, ds \Big|\ \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} =: \sum_{j=1}^{5} I_{19}^j.$$

Оценивая интеграл I_{19}^1 сначала подобно оценке интеграла I_{12}, а затем подобно оценке интеграла I_{11}, с учетом неравенства (3.163) получаем

$$I_{19}^1 \le \ c\, \frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\ \sqrt{\varepsilon_1} \int\limits_{\varepsilon_1}^{2} \frac{\omega(\sigma'_\pm, \eta)}{\eta^{3/2}}\ d\eta.$$

Аналогично, оценивая интегралы I_{19}^2, I_{19}^3 сначала подобно оценкам интегралов I_{13}, I_{14} соответственно, а затем подобно оценке интеграла I_{11}, получаем

$$I_{19}^2 \le \ c\, \frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\ \varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty} \int\limits_{\varepsilon_1}^{2} \frac{\omega(\sigma'_\pm, \eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}\ d\eta\,,$$

$$I_{19}^3 \le \; c \, \frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)} \, \sqrt{\varepsilon_1} \int\limits_{\varepsilon_1}^{2} \frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2}} \, \ln\frac{3}{\eta} \, d\eta.$$

Выполним теперь оценку интеграла I_{19}^4.

Рассматривая сначала случай $\xi \ge 1$, введем в рассмотрение множества $e'_{1,\varepsilon} := [\tau - \delta\,'_\varepsilon, \tau + \delta\,'_\varepsilon]$, $e'_{2,\varepsilon} := [\tau - \frac{\xi-\varepsilon-\tau}{2}, \tau - \delta\,'_\varepsilon] \cup [\tau + \delta\,'_\varepsilon, \tau + \frac{\xi-\varepsilon-\tau}{2}]$, $e'_{3,\varepsilon} := [0, \xi-\varepsilon] \setminus (e'_{1,\varepsilon} \cup e'_{2,\varepsilon})$, где $\delta\,'_\varepsilon = \min\{\frac{\xi-\varepsilon-\tau}{2\xi}, \frac{\varepsilon}{2\xi}\}$, и оценим I_{19}^4 суммой трех интегралов:

$$I_{19}^4 \le \int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon} \int\limits_{e'_{1,\varepsilon}} \frac{|\widehat{n}(\xi+\varepsilon,s) - \widehat{n}(\xi+\varepsilon,\tau) - (\widehat{n}(\xi,s) - \widehat{n}(\xi,\tau))|}{|s-\tau|} \, ds \, \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} \; +$$

$$+ \int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon} \int\limits_{e'_{2,\varepsilon}} \frac{|\widehat{n}(\xi+\varepsilon,s) - \widehat{n}(\xi,s)|}{|s-\tau|} \, ds \, \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} \; +$$

$$+ \int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon} \int\limits_{e'_{3,\varepsilon}} \frac{|\widehat{n}(\xi+\varepsilon,s) - \widehat{n}(\xi,s)|}{|s-\tau|} \, ds \, \frac{d\tau}{\Pi(\tau)} =: i'_1 + i'_2 + i'_3. \tag{3.177}$$

Теперь, оценивая i'_1 с учетом неравенства (3.164), подобно оценкам интегралов I_{15}^1 и I_{11} получаем

$$i'_1 \le \frac{c}{\xi^2\,\Pi(\xi)} \left(\int\limits_{\xi/2}^{\xi-2\varepsilon} + \int\limits_{\xi-2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon} \right) \left(\frac{\omega(\sigma'_\pm, |T-Z|)}{|T-Z|} \; \frac{1}{\tau+1} + 1 \right) \; \times$$

$$\times \int\limits_{e'_{1,\varepsilon}} \frac{ds}{\sqrt{|s-\tau|}} \; \frac{d\tau}{\sqrt{\xi-\tau}} \le \frac{c}{\xi^2\,\Pi(\xi)} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi}} \left(\int\limits_{\xi/2}^{\xi-2\varepsilon} \frac{\omega(\sigma'_\pm, |T-Z|)}{|T-Z|^{3/2}} \; \frac{d\tau}{\tau^2+1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_{\xi/2}^{\xi-2\varepsilon} \frac{d\tau}{\sqrt{\xi-\tau}} \right) + \sqrt{\xi}\; \omega(\sigma'_\pm, \varepsilon_1) \right) \le \frac{c}{\xi\;\Pi(\xi)} \; \sqrt{\varepsilon_1} \; \int\limits_{\varepsilon_1}^{2} \frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2}} \; d\eta.$$

Комбинируя приемы, использованные при оценках интегралов I_{15}^2 и i'_1, с учетом неравенства (3.163) получаем оценку

$$i'_2 \le \frac{c}{\xi\;\Pi(\xi)} \; \sqrt{\varepsilon_1} \; \ln\frac{1}{\varepsilon_1} \; \int\limits_{\varepsilon_1}^{2} \frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2}} \; d\eta,$$

а при оценке i_3', используя, кроме того, обозначение $Z_1 := \frac{\xi+\varepsilon-i}{\xi+\varepsilon+i}$, имеем

$$i_3' \le \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{\Pi(\xi)\,(\xi^3+1)}\left(\int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon}\int\limits_{\tau+(\xi-\varepsilon-\tau)/2}^{\xi-\varepsilon}\frac{\omega(\sigma_\pm',|S-Z_1|)}{|S-Z_1|}\,\frac{ds}{\sqrt{\xi+\varepsilon-s}}\,\frac{d\tau}{\xi-\varepsilon-\tau}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon}\frac{\omega(\sigma_\pm',|T-Z_1|)}{|T-Z_1|}\int\limits_{0}^{\tau-(\xi-\varepsilon-\tau)/2}\frac{ds}{\tau-s}\,\frac{d\tau}{\sqrt{\xi+\varepsilon-\tau}}\right)\le$$

$$\le\frac{c\sqrt{\varepsilon_1}}{\xi\,\Pi(\xi)}\left(\left(\int\limits_{\xi/2}^{\xi-2\varepsilon}+\int\limits_{\xi-2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\right)\frac{\xi^2+1}{\xi-\varepsilon-\tau}\int\limits_{\tau+(\xi-\varepsilon-\tau)/2}^{\xi-\varepsilon}\frac{\omega(\sigma_\pm',|S-Z_1|)}{|S-Z_1|^{3/2}}\,\frac{ds}{s^2+1}\,\frac{d\tau}{\tau^2+1}+\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_{\xi/2}^{\xi-2\varepsilon}+\int\limits_{\xi-2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\right)\frac{\omega(\sigma_\pm',|T-Z_1|)}{|T-Z_1|^{3/2}}\,\ln\frac{\tau}{\xi-\varepsilon-\tau}\,\frac{d\tau}{\tau^2+1}\right)\le$$

$$\le\frac{c}{\xi\,\Pi(\xi)}\,\sqrt{\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma_\pm',\eta)}{\eta^{3/2}}\,\ln\frac{3}{\eta}\,d\eta.$$

Для оценки интеграла I_{19}^4 в случае $\xi\in(0;1)$ используем соотношение (3.177), в котором при определении множеств $e_{1,\varepsilon}', e_{2,\varepsilon}', e_{3,\varepsilon}'$ следует принять $\delta_\varepsilon' = \min\{(\xi-\varepsilon-\tau)^2,\varepsilon^2\}$. Теперь интегралы i_1', i_2', i_3' оцениваются так, как это сделано в случае $\xi\ge1$.

Таким образом, при любом $\xi>0$ справедливы оценки

$$I_{19}^4\le\ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\,\sqrt{\varepsilon_1}\,\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma_\pm',\eta)}{\eta^{3/2}}\,d\eta\le$$

$$\le\frac{c\,\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\,\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\,\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{0}^{2}\frac{\omega(\sigma_\pm',\eta)}{\eta}\,\frac{\ln\frac{3}{\eta}}{\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}+\eta^{1/2-\beta_\infty}\ln\frac{3}{\eta}}\,d\eta.$$

Выполним, наконец, оценку интеграла I_{19}^5. С этой целью введем в рассмотрение множества $e_{1,\varepsilon}'' := [\tau-\delta_\varepsilon'',\tau+\delta_\varepsilon'']$, $e_{2,\varepsilon}'' := [0,\tau-\delta_\varepsilon'']\cup$ $\cup[\tau+\delta_\varepsilon'',3\xi/4]$, $e_{3,\varepsilon}'' := [3\xi/4,\xi-\varepsilon]$, где $\delta_\varepsilon'' = \min\{\frac{\tau^2}{(\xi+1)^3},\frac{\varepsilon\tau}{(\xi+1)^3}\}$, и оценим I_{19}^5 суммой трех интегралов:

$$I_{19}^5 \leq \int\limits_0^{\xi/2} \int\limits_{e''_{1,\varepsilon}} \frac{|\widehat{n}(\xi+\varepsilon,s)-\widehat{n}(\xi+\varepsilon,\tau)-(\widehat{n}(\xi,s)-\widehat{n}(\xi,\tau))|}{|s-\tau|}\,ds\,\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} +$$

$$+\int\limits_0^{\xi/2} \int\limits_{e''_{2,\varepsilon}} \frac{|\widehat{n}(\xi+\varepsilon,s)-\widehat{n}(\xi,s)|}{|s-\tau|}\,ds\,\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} +$$

$$+\int\limits_0^{\xi/2} \int\limits_{e''_{3,\varepsilon}} \frac{|\widehat{n}(\xi+\varepsilon,s)-\widehat{n}(\xi,s)|}{|s-\tau|}\,ds\,\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} =: i''_1+i''_2+i''_3.$$

Далее, оценивая i''_1 подобно оценке интеграла I_{15}^1, получаем

$$i''_1 \leq\ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\ \varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}.$$

Оценивая теперь i''_3 по аналогии с оценками интегралов I_{16}^4 и I_{11}, с учетом неравенства (3.163) получаем

$$i''_3 \leq\ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\ \sqrt{\varepsilon_1}\ \int\limits_{\varepsilon_1}^{2} \frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2}}\,d\eta.$$

Наконец, оценивая i''_2 по аналогии с оценками интегралов I_{16}^2 и I_{16}^3, при $\xi \geq 1$ получаем

$$i''_2 \leq\ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\ \varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\ \ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2} \frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}}\,d\eta,$$

а при $\xi \in (0;1)$ имеем

$$i''_2 \leq\ c\,\frac{\sqrt{\varepsilon}\ \omega(\sigma'_\pm,\xi)}{\sqrt{\xi}}\int\limits_0^{\xi/2} \ln\frac{\xi}{\delta''_\varepsilon}\,\frac{d\tau}{\Pi(\tau)} \leq\ c\,\frac{\sqrt{\xi}\ \omega(\sigma'_\pm,\xi)}{\Pi(\xi)}\sqrt{\varepsilon}\ \ln\frac{1}{\varepsilon} \leq$$

$$\leq\ c\,\frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)}\ \sqrt{\varepsilon}\ \ln\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\xi}^{2\xi} \frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2}}\,d\eta.$$

Таким образом, при любом $\xi > 0$ справедливы оценки

$$I_{19}^5 \le \ c \ \frac{\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)} \ \varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty} \ \ln\frac{1}{\varepsilon_1} \int\limits_{\varepsilon_1}^{2} \frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta^{3/2-\beta_\infty}} \ d\eta \le$$

$$\le \frac{c\,\xi}{\Pi(\xi)(\xi^2+1)} \ \varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty} \ \ln\frac{1}{\varepsilon_1} \ \int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta} \frac{\ln\frac{3}{\eta}}{\varepsilon_1^{1/2-\beta_\infty}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}+\eta^{1/2-\beta_\infty}\ln\frac{3}{\eta}} \ d\eta.$$

Следствием оценок интегралов I_{17}, I_{18}, I_{19} является неравенство (3.172). Лемма доказана.

В следующей лемме устанавливается необходимое в дальнейшем свойство сингулярного интеграла Коши

$$\widetilde{f}(\xi) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{s-\xi}\, ds\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,,$$

в случае, когда его плотность $f : (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \to \mathbb{C}$ допускает разрыв. При ее доказательстве используются оценки

$$\big|\widetilde{f}(\xi)\big| \le \ c \ \left(\int\limits_0^1 \sup_{s:s=\pm\eta} |f(s)| \ \frac{d\eta}{\eta+\xi} + \xi^{-1} \int\limits_0^1 \sup_{s:s=\pm 1/\eta} |f(s)| \ \frac{d\eta}{\eta(\eta+\xi^{-1})} \ + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{\xi/4} \sup_{s\in[\xi-\eta,\xi+\eta]} |f(s)-f(\xi)| \ \frac{d\eta}{\eta}\right) \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{3.178}$$

$$\big|\widetilde{f}(\xi\pm\varepsilon)-\widetilde{f}(\xi)\big| \le \ c \ \left(\varepsilon \int\limits_0^{\xi/2} \sup_{\substack{s_1,\,s_2\,\in\,[\xi/2;3\xi/2],\\ |s_2-s_1|\,\le\,\eta}} |f(s_2)-f(s_1)| \ \frac{d\eta}{\eta(\eta+\varepsilon)} \ + \right.$$

$$\left. +\varepsilon \ \int\limits_0^1 \sup_{s:s=\pm\eta} |f(s)| \ \frac{d\eta}{\eta^2+\xi^2} + \frac{\varepsilon}{\xi^2} \ \int\limits_0^1 \sup_{s:s=\pm 1/\eta} |f(s)| \frac{d\eta}{\eta^2+\xi^{-2}}\right) \tag{3.179}$$

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \forall\, \varepsilon \in (0, |\xi|/4]$$

(здесь c — некоторая абсолютная постоянная), которые устанавливаются аналогично соответствующим оценкам теоремы 2 из работы [73].

Лемма 3.10. *Если функция* $h_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *обращается в нуль в бесконечно удаленной точке и точке* 0, *а ее модули непрерывности удовлетворяют условиям* (3.99) *при* $k = 1$, *то функция*

$$H(\xi) := \Pi(\xi) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{h_0(s)}{\Pi(s)\ (s-\xi)}\, ds, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

принадлежит классу $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ *и выполняются равенства*

$$H(0) = H(\infty) = 0. \tag{3.180}$$

Доказательство. Полагаем $f(s) := h_0(s)\big(\Pi(s)\big)^{-1}$. Используя оценку (3.178) и учитывая при этом соотношения

$$\sup_{s:s=\pm\eta} |h_0(s)| \le \omega_{\mathbb{R}}(h_0, \eta), \qquad \sup_{s:s=\pm 1/\eta} |h_0(s)| \le \omega_{\mathbb{R},\infty}(h_0, \eta)$$

и условия (3.99) при $k = 1$, получаем равенства (3.180). Теперь с использованием неравенства (3.179) путем несложных выкладок устанавливается, что $H \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}$. Лемма доказана.

При регуляризации сингулярного интегрального уравнения (3.152) нам также понадобится следующее утверждение об изменении порядка интегрирования в повторных интегралах по вещественной прямой в случае, когда один из интегралов является сингулярным и его плотность допускает разрыв.

Лемма 3.11. *Пусть функция* V_0 *принадлежит классу* $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ *и обращается в нуль в бесконечно удаленной точке, а для функции* $\widehat{m}(\xi,\tau)$ *справедливы оценки* (3.102), (3.103) *и функция* $\Omega(\xi,\tau)$ *удовлетворяет условиям* (3.104), (3.105). *Тогда при всех* $\xi > 0$ *выполняется равенство*

$$\int\limits_0^{\xi} \widehat{m}(\xi,\tau) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)\ (s-\tau)}\, ds\, d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)} \int\limits_0^{\xi} \frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds. \tag{3.181}$$

Доказательство. Представим каждый из повторных интегралов, входящих в равенство (3.181), суммой трех интегралов:

$$I := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)} \int\limits_0^{\xi} \frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds =$$

$$= \Big(\int_{-\infty}^{-N} + \int_{N}^{\infty} \Big) \frac{V_0(s)}{\Pi(s)} \int_0^{\xi} \frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds + \int_{-N}^{N} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)} \int_0^{\xi-\varepsilon} \frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds +$$

$$+ \int_{-N}^{N} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\widehat{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\, d\tau\, ds =: I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I^* := \int_0^{\xi} \widehat{m}(\xi,\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)\ (s-\tau)}\, ds\, d\tau =$$

$$= \int_0^{\xi} \widehat{m}(\xi,\tau) \Big(\int_{-\infty}^{-N} + \int_{N}^{\infty} \Big) \frac{V_0(s)}{\Pi(s)\ (s-\tau)}\, ds\, d\tau +$$

$$+ \int_0^{\xi-\varepsilon} \widehat{m}(\xi,\tau) \int_{-N}^{N} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)\ (s-\tau)}\, ds\, d\tau +$$

$$+ \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \widehat{m}(\xi,\tau) \int_{-N}^{N} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)\ (s-\tau)}\, ds\, d\tau =: I_1^* + I_2^* + I_3^*.$$

В соответствии с теоремой о композиции сингулярного и регулярного интегралов в пространствах Лебега [85, с. 93] выполняется равенство $I_2 = I_2^*$. В силу соотношений (3.102), (3.105) и предположения о том, что $V_0 \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ и $V_0(\infty) = 0$, интегралы I_1, I_1^* стремятся к нулю при $N \to \infty$. Кроме того, при том же предположении справедлива оценка

$$\int_{-N}^{N} \frac{V_0(s)}{\Pi(s)\ (s-\tau)}\, ds \leq\ c(\xi) \quad \forall\, \tau \in [\xi/2, \xi]\,,$$

в которой постоянная $c(\xi)$ зависит от ξ, но не зависит от N. Поэтому интеграл I_3^* стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ и $N \to \infty$. Наконец, с учетом соотношений (3.102) – (3.105) I_3 оценивается аналогично тому, как при доказательстве леммы 3.9 оценен интеграл I_{17}, и также стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ и $N \to \infty$.

Таким образом, выполняется равенство (3.107), из которого в силу того, что интегралы I, I^* не зависят ни от N, ни от ε, следует равенство (3.181). Лемма доказана.

20.5. Регуляризация сингулярного интегрального уравнения вспомогательной задачи. Обозначим через $C^u_{\mathbb{R}}$ подпространство банахова пространства $C_{\mathbb{R}}$, состоящее из нечетных функций, а через $\mathcal{D}^u_{\mathbb{R}}$ — множество нечетных функций класса $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$.

Всюду в дальнейшем полагаем $m(\xi,\tau) := M_{\pm}\big(\frac{\xi-i}{\xi+i}, \frac{\tau-i}{\tau+i}\big)$ и $\Pi_*(\xi) := |\xi|^{\beta_0}\,(|\xi|+1)^{\beta_\infty-\beta_0}$, где числа β_0, β_∞ удовлетворяют соотношениям $1-\alpha+\nu<\beta_0<1$, $0<\beta_\infty<\min\{\alpha-\nu, 1/2\}$, в которых числа $\alpha\in(1/2;1]$ и $\nu\in[0,\alpha)$ те же, что и в определении класса $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$, см. неравенство (3.55).

Введем в рассмотрение функции

$$\widehat{n}(\xi,\tau) := \begin{cases} \dfrac{2\xi}{\pi}\displaystyle\int_\tau^\xi \dfrac{s(n(s,\tau)-n(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds & \text{при } \xi\tau>0, |\tau|<|\xi|,\\ 0 & \text{при } \xi\tau<0 \text{ или } \xi\tau>0, |\tau|>|\xi|,\end{cases}$$

$$\widetilde{C}(\xi,\tau) := 2\operatorname{Re}\tilde{n}(\xi,\tau)\,, \qquad \widetilde{D}(\xi,\tau) := 2\operatorname{Im}\tilde{n}(\xi,\tau)\,,$$

$$k_f(\xi,\tau) := -\frac{\xi}{|\xi|}\,\widetilde{D}(\xi,\tau) - \frac{1}{\pi}\int_0^\xi \frac{\widetilde{C}(\xi,\eta)}{\eta-\tau}\,d\eta\,,$$

$$\widehat{g}_*(\tau) := \begin{cases} g_*(\tau) & \text{при} \quad \tau\ge 0,\\ g_*(-\tau) & \text{при} \quad \tau<0\end{cases}$$

и интегральные операторы

$$(k_f g)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_f(\xi,\tau)}{\Pi_*(\tau)}\,g(\tau)\,d\tau,$$

$$(Qg)(\xi) := \Pi_*(\xi)\left(\frac{A(\xi,\xi)}{(A(\xi,\xi))^2+(B(\xi,\xi))^2}\,\frac{g(\xi)}{\operatorname{Im}\sigma_{\pm}(\frac{\xi-i}{\xi+i})} + \right.$$

$$\left. + \frac{P_{\pm}(\xi)}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{\operatorname{Im}\sigma_{\pm}(\frac{\tau-i}{\tau+i})}\sqrt{\frac{(\tau^2+1)\,\left|\operatorname{Im}\sigma_{\pm}\big(\frac{\tau-i}{\tau+i}\big)\right|}{2\,|\tau|}}\;\frac{d\tau}{\tau-\xi}\right),$$

где $P_+(\xi) := \sqrt{\sigma'_+\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)} - \sqrt{\sigma'_+\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)}$ и $P_-(\xi) := \sqrt{-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)^2 \sigma'_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)} - \sqrt{-\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)^2 \sigma'_-\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)}$, при этом значения корней положительны при $\xi = 0$.

Теорема 3.26. *Пусть функция $\psi_{\partial D}$ принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D), 1/2 < \alpha \leq 1$, и удовлетворяет условиям* (3.149), (3.150), *а конформное отображение $\sigma_\pm(Z)$ на границе единичного круга имеет непрерывную контурную производную, которая не обращается в нуль, и ее модуль непрерывности удовлетворяет условию вида* (3.124). *Тогда каждое решение сингулярного интегрального уравнения* (3.152) *вида*

$$V_f(\xi) = \frac{V_0(\xi)}{\Pi_*(\xi)}, \tag{3.182}$$

где $V_0 \in \mathcal{D}^u_{\mathbb{R}}$ и $V_0(\infty) = 0$, может быть получено в результате решения интегрального уравнения Фредгольма

$$V_0(\xi) + (Q(k_f V_0))(\xi) = (Q\widehat{g}_*)(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \tag{3.183}$$

в котором оператор $Q\,k_f$ компактен в пространстве $C^u_{\mathbb{R}}$. При этом уравнение (3.183) *имеет в пространстве $C^u_{\mathbb{R}}$ единственное решение, которое, кроме того, принадлежит классу $\mathcal{D}^u_{\mathbb{R}}$, и выполняются равенства*

$$V_0(0) = V_0(\infty) = 0. \tag{3.184}$$

Доказательство. Из оценок (3.162), (3.164) следует, что для функции $\widetilde{C}(\xi,\tau)$ выполняются неравенства вида (3.102), (3.103) при $\beta = 1/2$ и $\Omega(\xi,\tau) = c\,\left(\frac{\omega(\sigma'_\pm, |T-Z|)}{|T-Z|} + 1\right)$, где c — некоторая постоянная, которая не зависит от ξ и τ. Поэтому с учетом леммы 3.11 перепишем сингулярное интегральное уравнение (3.152) в виде

$$D(\xi,\xi)V_f(\xi) - \frac{iC(\xi,\xi)}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{V_f(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_f(\xi,\tau)V_f(\tau)\,d\tau = \widehat{g}_*(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{3.185}$$

Заметим, что для функции $k_f(\xi,\tau)$ выполняется равенство

$$k_f(-\xi,-\tau)=k_f(\xi,\tau) \quad \forall\,\xi,\tau\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:\xi\neq\tau\,,$$

следствием которого является четность функции $(k_f V_0)(\xi)$ при любой нечетной функции V_0. Таким образом, обе части уравнения (3.185) являются четными функциями и, следовательно, уравнения (3.185) и (3.152) эквивалентны.

Индекс [8, с. 176] сингулярного интегрального уравнения (3.185) вычисляется по формуле (3.128). Поэтому единственное решение характеристического уравнения, соответствующего уравнению (3.185), в классе функций, обращающихся в нуль в бесконечно удаленной точке и допускающих слабостепенную особенность в точке 0, задается оператором

$$(Q_h f)(\xi):=\frac{1}{\Pi_*(\xi)}\,(Qf)(\xi)\,.$$

Применяя метод Карлемана – Векуа (см. [8, 51]) регуляризации уравнения (3.185), получаем интегральное уравнение (3.183), равносильное уравнению (3.185).

Покажем, что всякое решение V_0 уравнения (3.183) в пространстве $C^u_{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $\mathcal{D}^u_{\mathbb{R}}$ и выполняются равенства (3.184). С этой целью отметим сначала следующие соотношения для функции $\widehat{g}_*$, которые следуют из условия $\psi_{\partial D}\in\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$. Так, оценки (3.83), (3.97), записанные для функции $\widehat{g}_*$ вместо f_*, принимают вид

$$|\widehat{g}_*(\xi)|\le\frac{c}{\xi^{1+\alpha-\nu}} \qquad \forall\,\xi\ge 2,$$

$$|\widehat{g}_*(\xi)|\le\ c\,\xi^{\alpha-\nu} \qquad \forall\,\xi\in(0;2)\,,$$

где постоянная c не зависит от ξ. Кроме того, вследствие оценок вида (3.85), (3.86) для функции $\widehat{g}_*$ существует $\alpha_1\in(0;1)$ такое, что модуль непрерывности функции $\widehat{g}_*$ удовлетворяет соотношению

$$\omega_{\mathbb{R}}(\widehat{g}_*,\varepsilon)\le\ c\,\varepsilon^{\alpha_1} \qquad \forall\,\varepsilon>0\,,$$

где постоянная c не зависит от ε.

Далее, используя указанные для функции $\widehat{g}_*$ соотношения, путем несложных выкладок устанавливается, что для функции

$$h_0(\xi):=\Pi_*(\xi)\ \frac{g(\xi)}{\operatorname{Im}\sigma_\pm(\frac{\xi-i}{\xi+i})}$$

выполняются равенства $h_0(0) = h_0(\infty) = 0$ и существует $\alpha_2 \in (0;1)$ такое, что выполняются соотношения

$$\omega_{\mathbb{R}}(h_0, \varepsilon) \leq \ c\, \varepsilon^{\alpha_2}, \quad \omega_{\mathbb{R},\infty}(h_0, \varepsilon) \leq \ c\, \varepsilon^{\alpha_2} \qquad \forall\, \varepsilon > 0\,,$$

в которых постоянная c не зависит от ε. Поэтому с учетом леммы 3.10 делаем заключение о том, что функция $(Q\widehat{g}_*)(\xi)$ принадлежит классу $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ и выполняются равенства $(Q\widehat{g}_*)(0) = (Q\widehat{g}_*)(\infty) = 0$. При этом очевидно также, что эта функция является нечетной.

В то же время, вследствие четности функции $k_f V_0$ функция $Q(k_f V_0)$, в свою очередь, является нечетной. Кроме того, из лемм 3.8 – 3.10 с учетом условия вида (3.124) для отображения $\sigma_\pm$ следует вывод о том, что $Q(k_f V_0) \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ для всех $V_0 \in C_{\mathbb{R}}$ и выполняются равенства $(Q(k_f V_0))(0) = (Q(k_f V_0))(\infty) = 0$.

Таким образом, для каждого решения уравнения (3.183) в пространстве $C^u_{\mathbb{R}}$ доказано, что $V_0 = (Q\widehat{g}_* - Q(k_f V_0)) \in \mathcal{D}^u_{\mathbb{R}}$ и выполняются равенства (3.184).

Заметим также, что условия Дини вида (3.98) для модуля непрерывности и локального центрированного относительно бесконечно удаленной точки модуля непрерывности функции $Q(k_f V_0)$ выполняются равномерно по V_0 из единичного шара пространства $C^u_{\mathbb{R}}$. Следовательно, оператор $Q\,k_f$ компактен в пространстве $C^u_{\mathbb{R}}$.

Наконец, покажем, что уравнение (3.183) имеет единственное решение в пространстве $C^u_{\mathbb{R}}$. С этой целью заметим, что однородное уравнение

$$V_0(\xi) + (Q(k_f V_0))(\xi) = 0 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}, \tag{3.186}$$

может быть получено равносильными преобразованиями уравнения (3.147) или (3.148) соответственно в случае внутренней или внешней вспомогательной задачи для граничных значений функции тока Стокса, при этом связь решения F вспомогательных задач с функцией (3.182) описана в теореме 3.25. В теоремах 3.23, 3.24 найдены все решения F вспомогательных задач, соответствующих уравнениям (3.147), (3.148). В обоих случаях в соответствии с теоремой 3.25 и равенством (3.182) найденным решениям F вспомогательных задач соответствует единственное решение $V_0 \equiv 0$ однородного уравнения (3.186) в пространстве $C^u_{\mathbb{R}}$. Поэтому в соответствии с альтернативой Фредгольма уравнение (3.183) имеет единственное решение в пространстве $C^u_{\mathbb{R}}$. Теорема доказана.

20.6. Теорема о разрешимости задачи Дирихле. Сформулируем теперь результат о разрешимости задачи Дирихле для функции тока Стокса.

Теорема 3.27. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.26. *Тогда решение задачи Дирихле для функции тока Стокса в области* D *представляется формулой* (3.13), *в которой* F *является решением вспомогательной задачи для заданных граничных значений* $\psi_{\partial D}$ *и в случае внутренней задачи Дирихле выражается равенством* (3.156), *а в случае внешней задачи Дирихле — равенством* (3.157); *при этом функция* V_f *имеет вид* (3.182), *где* V_0 *— решение уравнения Фредгольма* (3.183) *в пространстве* $C^u_{\mathbb{R}}$.

Доказательство. В случае внешней задачи Дирихле, используя теоремы 3.24 – 3.26, заключаем, что функция (3.157) является единственным решением внешней вспомогательной задачи для заданных граничных значений $\psi_{\partial D}$. Эта функция обращается в нуль в бесконечно удаленной точке и порождает решение задачи Дирихле по формуле (3.13).

В случае внутренней задачи Дирихле в силу теоремы 3.23 решение внутренней вспомогательной задачи для заданных граничных значений $\psi_{\partial D}$ находится с точностью до действительного постоянного слагаемого. Поскольку при этом

$$\int\limits_{\partial D_z} \frac{t - \operatorname{Re} z}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt = 0 \qquad \forall\, z \in D_z^+\,,$$

то все решения указанной вспомогательной задачи порождают одно и то же решение задачи Дирихле для функции тока Стокса по формуле (3.13). В частности, в соответствии с теоремами 3.25, 3.26 одно из решений внутренней вспомогательной задачи задается формулой (3.156). Теорема доказана.

Покажем теперь, что все решения уравнения (2.3) в области D с произвольной замкнутой жордановой (в том числе и неспрямляемой) границей, имеющие естественную физическую интерпретацию, представляются формулами вида (2.18).

20.7. Доказательство теоремы 3.5. Обозначим через γ_ρ образ окружности $\{Z \in \mathbb{C} \ : \ |Z| = \rho < 1\}$ при отображении $\sigma_+(Z)$, а через $D^+_{z,\rho}$ — область, ограниченную кривой γ_ρ. Для каждой точки $z \in D_z^+$ рассмотрим ту кривую γ_ρ, которая содержит z, и через $\Gamma_{z\bar{z}}$ обозначим одну из ее дуг с концами в точках z и $\bar{z}$.

Пусть $\psi(x, r)$ — решение уравнения (2.3) в ограниченной области D.

Покажем, что существует голоморфная в D_z^+ функция F_0 такая, что при $F = F_0$ и всех $(x,r) \in D$ выполняется равенство (2.18).

Предположим, что точка z лежит на кривой γ_ρ при некотором $\rho \in (0;1)$ и такая, что $\operatorname{Im} z \neq 0$. Тогда с учетом теоремы Коши равенство (2.18) приводится к виду

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{F(t)\ (t-x)}{(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^-}\,dt = \psi(x,r), \tag{3.187}$$

где $\quad (\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})})^- := \lim\limits_{\tau\to t,\tau\in\mathbb{C}\setminus\overline{D_{z,\rho}^+}} \sqrt{(\tau-z)(\tau-\bar{z})}.$

В соответствии с теоремами 3.25, 3.26 уравнение (3.187) с помощью конформного отображения $z = \sigma_+\big(\rho\ \frac{\xi-i}{\xi+i}\big)$ приводится к уравнению Фредгольма вида (3.183), которое имеет единственное решение в пространстве $C_{\mathbb{R}}^u$. Обозначим это решение через V_ρ. Тогда согласно теореме 3.25 граничные значения на $\gamma_\rho\setminus\mathbb{R}$ голоморфной в области $D_{z,\rho}^+$ функции

$$F_\rho(z) = \frac{2(\xi+i)}{\pi\rho\, i\ \sigma_+'\left(\rho\ \frac{\xi-i}{\xi+i}\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau}{|\tau|}\ \frac{V_\rho(|\tau|)}{\tau-\xi}\ \frac{d\tau}{\Pi_*(\tau)} -$$

$$-\ \frac{4}{\pi\rho\ \sigma_+'(0)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\tau|\ V_\rho(|\tau|)}{\tau^2+1}\ \frac{d\tau}{\Pi_*(\tau)}\,,\quad z=\sigma_+\left(\rho\ \frac{\xi-i}{\xi+i}\right)\in D_{z,\rho}^+\,, \operatorname{Im}\xi>0\,,$$

удовлетворяют уравнению (3.187) при $F = F_\rho$. Заметим, что при этом выполняется равенство $F_\rho(\sigma_+(0)) = 0$.

Рассмотрим теперь два уравнения вида (3.187) при $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$, где $0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$, а также их решения F_{ρ_1} и F_{ρ_2}. Из единственности решения задачи Дирихле для функции тока Стокса в области $D_{\rho_2} := \{(x,r) : z = x+ir \in D_{z,\rho_2}^+\}$ с заданными граничными значениями $\psi(x,r)$, $(x,r) \in \partial D_{\rho_2}$, следует, что функция F_{ρ_2} является также решением уравнения (3.187) при $\rho = \rho_1$. Поскольку граница области D_{z,ρ_1}^+ является аналитической кривой, то к этой области применима теорема 3.23, из которой следует, что при всех $z \in D_{z,\rho_1}^+$ выполняется равенство $F_{\rho_2}(z) = F_{\rho_1}(z) + C_0$, где C_0 — некоторая действительная постоянная. Поскольку при этом значения функций F_{ρ_1} и F_{ρ_2} совпадают в точке $\sigma_+(0)$, то $C_0 = 0$.

Следовательно, функции F_ρ при различных значениях $\rho \in (0;1)$ являются сужением на область $D_{z,\rho}^+$ голоморфной в области D_z^+ функции F_0, удовлетворяющей равенству (2.18) при $F = F_0$ и всех

$(x,r) \in D$. Теперь, используя теорему 3.23, заключаем, что любая голоморфная в D_z^+ функция F, удовлетворяющая условию (3.15) и равенству (2.18) при всех $(x,r) \in D$, выражается равенством $F(z) = F_0(z) + C$, где C – некоторая действительная постоянная. Теорема доказана.

Аналогично доказывается теорема 3.7. При этом используется отображение σ_- вместо σ_+ и теорема 3.24 вместо теоремы 3.23.

20.8. Задача Дирихле для функции тока Стокса в круге. В случае, когда область D является кругом, уравнение (3.144) несколько иным путем редуцируется к характеристическому сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши, которое разрешимо в явном виде. При этом используются следующие леммы.

Лемма 3.12. *Если функция $u : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ суммируема на промежутке $(0;1]$, ограничена на множестве $[1;\infty)$ и обращается в нуль в бесконечно удаленной точке, то*

$$\lim_{\xi\to\infty} \int\limits_0^{\xi} \frac{u(s)}{\sqrt{\xi^2 - s^2}}\, ds = 0\,. \tag{3.188}$$

Доказательство. При $\xi > 4$ представим интеграл, входящий в равенство (3.188), суммой четырех интегралов:

$$\int\limits_0^{\xi} \frac{u(s)}{\sqrt{\xi^2 - s^2}}\, ds = \int\limits_0^{1} \frac{u(s)}{\sqrt{\xi^2 - s^2}}\, ds + \int\limits_1^{\sqrt{\xi}/2} \frac{u(s)}{\sqrt{\xi^2 - s^2}}\, ds + \int\limits_{\sqrt{\xi}/2}^{\xi/2} \frac{u(s)}{\sqrt{\xi^2 - s^2}}\, ds +$$

$$+ \int\limits_{\xi/2}^{\xi} \frac{u(s)}{\sqrt{\xi^2 - s^2}}\, ds =: I_1 + I_2 + I_3 + I_4\,.$$

С учетом очевидных неравенств $\xi^2 - s^2 \geq \frac{3}{4}\,\xi^2$ при $s \in [0;\xi/2]$ и $\xi^2 - s^2 \geq \frac{3}{2}\,\xi(\xi - s)$ при $s \in [\xi/2, \xi]$ получаем оценки

$$|I_1| \leq \frac{2}{\sqrt{3}\,\xi} \int\limits_0^1 |u(s)|\, ds\,,$$

$$|I_2| \leq \frac{2}{\sqrt{3}\,\xi} \sup_{s\geq 1} |u(s)| \int\limits_1^{\sqrt{\xi}/2} ds = \frac{1}{\sqrt{3}\,\sqrt{\xi}} \sup_{s\geq 1} |u(s)|\,,$$

$$|I_3| \le \frac{2}{\sqrt{3}\,\xi} \sup_{s\ge\sqrt{\xi}/2} |u(s)| \int\limits_{\sqrt{\xi}/2}^{\xi/2} ds \le \frac{1}{\sqrt{3}} \sup_{s\ge\sqrt{\xi}/2} |u(s)|\,,$$

$$|I_4| \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\,\sqrt{\xi}} \sup_{s\ge\xi/2} |u(s)| \int\limits_{\xi/2}^{\xi} \frac{ds}{\sqrt{\xi - s}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sup_{s\ge\xi/2} |u(s)|\,,$$

следствием которых является равенство (3.188). Лемма доказана.

Лемма 3.13. *Пусть функция* $u\,:\,(0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ *суммируема на множестве* $(0;\infty)$*, а на каждом ограниченном промежутке* $(0;\xi]$ *суммируема в степени* p*,* $p>1$*. Тогда*

$$\int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\tau u(s)}{s^2-\tau^2}\,ds\,d\tau = \xi^2 \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{s\,(s^2-\xi^2)} \int\limits_0^{s} u(\tau)\,d\tau\,ds.$$

Доказательство. Справедливы равенства

$$\int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\tau u(s)}{s^2-\tau^2}\,ds\,d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} u(s) \int\limits_0^{\xi} \left(\frac{1}{s-\tau} - \frac{1}{s+\tau}\right) d\tau\,ds =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} u(s) \ln\frac{|s-\xi|(s+\xi)}{s^2}\,ds = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} u(s)\ln\frac{|s-\xi|}{s+\xi}\,ds -$$

$$-\int\limits_0^{\infty} u(s)\ln\frac{s+\xi}{s}\,ds = \int\limits_0^{\infty} u(s)\int\limits_s^{\infty}\frac{\xi}{t^2-\xi^2}\,dt\,ds - \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{s} u(t)\,dt\,\frac{s}{s+\xi}\,\frac{\xi}{s^2}\,ds =$$

$$= \int\limits_0^{\infty}\frac{\xi}{t^2-\xi^2}\int\limits_0^{t} u(s)\,ds\,dt - \int\limits_0^{\infty}\frac{\xi}{s(s+\xi)}\int\limits_0^{s} u(t)\,dt\,ds = \int\limits_0^{\infty}\frac{\xi}{s^2-\xi^2}\int\limits_0^{s} u(\tau)\,d\tau\,ds -$$

$$-\int\limits_0^{\infty}\frac{\xi}{s(s+\xi)}\int\limits_0^{s} u(\tau)\,d\tau\,ds = \xi^2\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{s(s^2-\xi^2)}\int\limits_0^{s} u(\tau)\,d\tau\,ds\,.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.14. *Пусть функция f дифференцируема на множестве $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и непрерывна в точке 0, а также удовлетворяет соотношению*

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{-1} + \int\limits_{1}^{\infty}\right) \sup_{\xi\in\mathbb{R}\,:\,|\xi|\geq|\tau|} \frac{|f(\xi)|}{|\xi|}\,\frac{|d\tau|}{|\tau|} < \infty, \tag{3.189}$$

и, кроме того, ее производная при всех $\xi_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ удовлетворяет условию

$$(f'(\xi) - f'(\xi_0))\;\ln(\xi-\xi_0) \to 0, \qquad \xi \to \xi_0\,. \tag{3.190}$$

Тогда справедливо равенство

$$\frac{d}{d\xi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau \qquad \forall\,\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \tag{3.191}$$

при условии, что сингулярные интегралы, входящие в него, существуют во всех точках $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Доказательство. Пусть $\xi \in \mathbb{R}$ и $2\varepsilon < |\xi| < N/2$, где ε и N — фиксированные положительные числа. Тогда при каждом $\zeta\in\mathbb{R}$, удовлетворяющем неравенству $|\zeta-\xi|<\varepsilon$, получаем равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-\zeta}\,dt = \left(\int\limits_{-\infty}^{-N} + \int\limits_{-N}^{-\varepsilon} + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{N} + \int\limits_{N}^{\infty}\right)\frac{f(t)}{t-\zeta}\,dt = \left(\int\limits_{-\infty}^{-N} + \int\limits_{N}^{\infty}\right)\frac{f(t)}{t-\zeta}\,dt +$$

$$+\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{f(t)}{t-\zeta}\,dt + f(-\varepsilon)\ln(-\varepsilon-\zeta) - f(-N)\ln(-N-\zeta) +$$

$$+ f(N)\ln(N-\zeta) - f(\varepsilon)\ln(\varepsilon-\zeta) - \left(\int\limits_{-N}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{N}\right) f'(t)\ln(t-\zeta)\,dt.$$

Так, как и в монографии [8, с. 43], дифференцируя полученное равенство по ζ и учитывая при этом соотношения (3.189), (3.190), а затем полагая $\zeta = \xi$, получаем

$$\left.\left(\frac{d}{d\zeta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-\zeta}\,dt\right)\right|_{\zeta=\xi} = \left(\int\limits_{-\infty}^{-N} + \int\limits_{N}^{\infty}\right)\frac{f(\tau)}{(\tau-\xi)^2}\,d\tau + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{f(\tau)}{(\tau-\xi)^2}\,d\tau +$$

$$+\frac{f(-\varepsilon)}{\xi+\varepsilon}-\frac{f(\varepsilon)}{\xi-\varepsilon}+\frac{f(-N)}{-N-\xi}-\frac{f(N)}{N-\xi}+\left(\int\limits_{-N}^{-\varepsilon}+\int\limits_{\varepsilon}^{N}\right)\frac{f'(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau\,.$$

Теперь, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ и $N\to\infty$, с учетом соотношения (3.189) и непрерывности функции f в точке 0 получаем равенство (3.191). Лемма доказана.

Обозначим через $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ класс функций $g_*:\mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{C}$, для каждой из которых

$$\lim_{\tau\to\pm\infty} g_*(\tau)=0$$

и существуют $\nu_0,\nu_\infty\in(0;1)$ и положительное число N такие, что выполняются условия

$$|g_*(\tau_1)-g_*(\tau_2)|\le\ c\ \left|\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right|^{\nu_\infty}\qquad\forall\,\tau_1,\tau_2\in(-\infty,-N]\cup[N,\infty)\,,$$

$$|g_*(\tau_1)-g_*(\tau_2)|\le\ c\ \left|\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right|^{\nu_0}\qquad\forall\,\tau_1,\tau_2\in[-N,N]\setminus\{0\}\,,$$

в которых постоянная c не зависит от τ_1 и τ_2.

Лемма 3.15. *Пусть нечетная функция $\widehat{g}_*\in\mathcal{H}(\mathbb{R})$ дифференцируема на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и такая, что функция $\tau\,\widehat{g}_*{}'(\tau)$ принадлежит классу $\mathcal{H}(\mathbb{R})$. Тогда при всех $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ справедливо равенство*

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{\xi^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{g}_*(s)}{s-\xi}\,ds\right)=\frac{1-\xi^2}{(\xi^2+1)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{g}_*(s)}{s-\xi}\,ds+\frac{1}{\xi^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s\,\widehat{g}_*{}'(s)}{s-\xi}\,ds\,.$$

Доказательство. Учитывая нечетность функции $\widehat{g}_*$ и лемму 3.14, при $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ получаем

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{\xi^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{g}_*(s)}{s-\xi}\,ds\right)=\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\xi^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s\,\widehat{g}_*(s)}{s-\xi}\,ds\right)=$$

$$=-\frac{2\xi}{(\xi^2+1)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s\,\widehat{g}_*(s)}{s-\xi}\,ds+\frac{1}{\xi^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{g}_*(s)}{s-\xi}\,ds+\frac{1}{\xi^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s\,\widehat{g}_*{}'(s)}{s-\xi}\,ds=$$

$$=-\frac{2\xi^2}{(\xi^2+1)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{g}_*(s)}{s-\xi}\,ds+\frac{1}{\xi^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{g}_*(s)}{s-\xi}\,ds+\frac{1}{\xi^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s\,\widehat{g}_*{}'(s)}{s-\xi}\,ds=$$

$$= \frac{1-\xi^2}{(\xi^2+1)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{g}_*(s)}{s-\xi}\, ds + \frac{1}{\xi^2+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s\,\widehat{g}_*{}'(s)}{s-\xi}\, ds\,.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.16. *Пусть функция* $\psi\,:\,[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ *удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\tau\to\pm\infty} \psi(\tau) = \psi(0) = 0\,, \tag{3.192}$$

$$|\psi(s)-\psi(\xi)| \le\; c\,\frac{|s-\xi|^\alpha}{s^{\alpha-\nu}\xi^\alpha} \qquad \forall\, s,\xi\;:\; 1\le s<\xi\,, \tag{3.193}$$

$$|\psi(s)-\psi(\xi)| \le\; c\,\frac{|s-\xi|^\alpha}{\xi^\nu} \qquad \forall\, s,\xi\;:\; 0\le s<\xi\le 3\,, \tag{3.194}$$

где $\alpha\in(1/2;1]$, $\nu\in[0;\alpha)$, *а постоянная* c *не зависит от* s *и* ξ. *Тогда функция* $(\xi+i)U_*(\xi)$ *принадлежит классу* $\mathcal{H}(\mathbb{R})$; *при этом функция* U_* *определяется равенством*

$$U_*(\xi) = \frac{2\,|\xi|}{(\xi^2+1)^2}\; g_*(|\xi|) + \frac{\xi^2}{\xi^2+1}\; g_*'(|\xi|) + \frac{\xi^2-1}{\pi(\xi^2+1)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{|s|}\,\frac{g_*(|s|)}{s-\xi}\, ds -$$

$$-\frac{1}{\pi(\xi^2+1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s\,g_*'(|s|)}{s-\xi}\, ds \qquad \forall\,\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\,, \tag{3.195}$$

в котором

$$g_*(\xi) = \int\limits_0^{\xi} \frac{s\;\psi_*(s)}{\sqrt{\xi^2-s^2}}\, ds \tag{3.196}$$

и функция ψ_* *выражается через функцию* ψ *равенством*

$$\psi_*(s) = \frac{\sqrt{s^2+1}}{2\,s^2}\;\psi(s)\,.$$

Доказательство. По стандартной схеме [8, с. 573] устанавливается равенство

$$g_*'(\xi) = \psi_*(\xi) - \xi \int\limits_0^{\xi} \frac{s(\psi_*(s)-\psi_*(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}\, ds\,. \tag{3.197}$$

Легко устанавливается, что для функции ψ_* выполняются условия вида (3.81), (3.82) при $\alpha_\infty = \alpha - \nu + 1$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_0 = 2 - \alpha + \nu$. Поэтому в соответствии с леммой 3.1 выполняются оценки

$$|g'_*(\xi)| \le \frac{c}{\xi^{1+\alpha-\nu}} \qquad \forall\,\xi \ge 2, \tag{3.198}$$

$$|g'_*(\xi)| \le \frac{c}{\xi^{2-\alpha+\nu}} \qquad \forall\,\xi \in (0;2), \tag{3.199}$$

$$|g'_*(\xi+\varepsilon) - g'_*(\xi)| \le \; c\,\frac{\varepsilon^{\alpha-1/2}}{\xi^{2\alpha-\nu+1/2}} \qquad \forall\,\xi \ge 2 \quad \forall\,\varepsilon \in (0;\xi/2], \tag{3.200}$$

$$|g'_*(\xi+\varepsilon) - g'_*(\xi)| \le \; c\,\frac{\varepsilon^{\alpha-1/2}}{\xi^{3/2+\nu}} \qquad \forall\,\xi \in (0;2) \quad \forall\,\varepsilon \in (0;\xi/2]. \tag{3.201}$$

В силу леммы 3.12 $\lim\limits_{\xi\to\infty} g_*(\xi) = 0$. Из этого равенства и оценки (3.198) следует оценка

$$|g_*(\xi)| \le \frac{c}{\xi^{\alpha-\nu}} \qquad \forall\,\xi \ge 2. \tag{3.202}$$

Кроме того, при $2 - \alpha + \nu > 1$ очевидным следствием оценки (3.199) является неравенство

$$|g_*(\xi)| \le \frac{c}{\xi^{1-\alpha+\nu}} \qquad \forall\,\xi \in (0;2), \tag{3.203}$$

а в случае, когда $2 - \alpha + \nu = 1$ (то есть при $\alpha = 1$, $\nu = 0$), это же неравенство легко устанавливается непосредственно оценкой интеграла (3.196).

С учетом неравенств (3.198) – (3.203) путем несложных оценок устанавливается, что функция $(\xi + i)U_*(\xi)$ принадлежит классу $\mathcal{H}(\mathbb{R})$. При этом для оценки сингулярных интегралов Коши, входящих в равенство (3.195), и их локальных модулей непрерывности используются неравенства (3.178), (3.179). Лемма доказана.

Лемма 3.17. *При условиях леммы* 3.16 *справедливы оценки*

$$\left|(\xi+i)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{U_*(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau\right| \le \frac{c}{\xi^{\beta_\infty}} \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{C} \;:\; |\xi| > 1,\, \operatorname{Im}\xi > 0\,,$$

$$\left|(\xi+i)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{U_*(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau\right| \le \frac{c}{\xi^{\beta_0}} \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{C} \;:\; |\xi| < 1,\, \operatorname{Im}\xi > 0\,,$$

при некоторых $\beta_0, \beta_\infty \in (0;1)$ и не зависящей от ξ постоянной c.

Доказательство. В силу леммы 3.15 выполняется равенство

$$U_*(\xi) = \frac{dU(\xi)}{d\xi} \qquad \forall\, \xi > 0\,, \tag{3.204}$$

где

$$U(\xi) = \frac{\xi^2}{\xi^2+1}\; g_*(\xi) - \frac{\xi}{\pi(\xi^2+1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{|s|}\; \frac{g_*(|s|)}{s-\xi}\; ds\,.$$

Кроме того, для функции $U(\xi)$ справедливы равенства

$$\lim_{\xi\to 0}\; U(\xi) = \lim_{\xi\to\infty}\; U(\xi) = 0\,, \tag{3.205}$$

которые следуют из оценок (3.198), (3.199), (3.202), (3.203), (3.178).

Учитывая четность функции U_* и равенства (3.204), (3.205), получаем

$$(\xi+i) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{U_*(\tau)}{\tau-\xi}\, d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(\tau+i)U_*(\tau)}{\tau-\xi}\, d\tau - 2\int\limits_{0}^{\infty} U_*(\tau)\, d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(\tau+i)U_*(\tau)}{\tau-\xi}\, d\tau.$$

Поскольку в силу леммы 3.16 $(\tau+i)U_*(\tau) \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$, то из последнего равенства и классических результатов [51] о поведении интеграла типа Коши в окрестности точек разрыва плотности очевидным образом следует утверждение леммы.

В следующей теореме устанавливается формула решения задачи Дирихле для функции тока Стокса в круге меридианной плоскости.

Теорема 3.28. *Пусть $D = \{(x,r) : x^2 + r^2 < 1\}$, функция $\psi_{\partial D}$ принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D), 1/2 < \alpha \le 1$, и удовлетворяет условиям (3.149), (3.150), где $b_1 = -1$ и $b_2 = 1$. Тогда решение задачи Дирихле для функции тока Стокса в круге D задается формулой*

$$\psi(x,r) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D_z} \frac{G_*\left(i\,\frac{1+t}{1-t}\right)\,(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\; dt & \text{при } r \ne 0\,, \\ 0 & \text{при } r = 0\,, \end{cases} \tag{3.206}$$

в которой $z = x + ir$,

$$G_*(\xi) = (\xi+i)^2\; U_*(|\xi|) + \frac{2\,\xi\,(\xi+i)^2}{\pi i} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{U_*(\tau)}{\tau^2-\xi^2}\; d\tau\,; \tag{3.207}$$

при этом функция U_* *задается равенством* (3.195), *а в равенстве* (3.196) *функция* ψ_* *связана с заданными граничными значениями* $\psi_{\partial D}$ *равенством*

$$\psi_*(\tau) = -\frac{\sqrt{\tau^2+1}}{2\,\tau^2}\;\psi_{\partial D}\left(\frac{\tau^2-1}{\tau^2+1}, \frac{-2\tau}{\tau^2+1}\right) \qquad \forall\,\tau > 0\,. \tag{3.208}$$

Доказательство. С учетом того, что при замене переменных $t = \frac{\tau - i}{\tau + i}$, $z = \frac{\xi - i}{\xi + i}$, где $\tau, \xi \in \mathbb{R}$, справедливы равенства

$$t - x = t - \frac{1}{2}(z + \bar z) = \frac{\tau - i}{\tau + i} - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi - i}{\xi + i} + \frac{\xi + i}{\xi - i}\right) = \frac{2\,(\tau - i\xi^2)}{(\tau + i)(\xi^2+1)}\,,$$

таким же путем, как при доказательстве теоремы 3.14 из интегрального уравнения (3.67) получено уравнение (3.73), приходим от интегрального уравнения (3.144) внутренней вспомогательной задачи для заданных граничных значений функции тока Стокса к уравнению

$$\int\limits_0^{\xi} \operatorname{Re} H_*(\tau)\; d\tau - \frac{1}{\xi}\int\limits_0^{\xi} \operatorname{Im} H_*(\tau)\; d\tau = g_*(\xi)\,, \tag{3.209}$$

в котором $H_*(\tau) := \frac{1}{(\tau+i)^2}\;F\big(\frac{\tau-i}{\tau+i}\big)$. При этом функция $\operatorname{Im} H_*(\xi)$ выражается через функцию $\operatorname{Re} H_*(\xi)$ по формуле Гильберта вида (3.79).

Подставляя указанное выражение функции $\operatorname{Im} H_*(\tau)$ в равенство (3.209) и учитывая лемму 3.13, получаем равенство

$$\int\limits_0^{\xi} \operatorname{Re} H_*(\tau)\; d\tau + \frac{2\,\xi}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{s\,(s^2-\xi^2)}\int\limits_0^{s} \operatorname{Re} H_*(\tau)\; d\tau\; ds = g_*(\xi). \tag{3.210}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$u_*(\xi) := \xi^{-1}\int\limits_0^{\xi} \operatorname{Re} H_*(\tau)\; d\tau \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

и с учетом ее четности преобразуем равенство (3.210) к виду

$$\xi\; u_*(\xi) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u_*(s)}{s - \xi}\; ds = \frac{\xi}{|\xi|}\; g_*(|\xi|) \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,. \tag{3.211}$$

Полученное характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши имеет индекс [8, с. 176]

$$\varkappa := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d \arg \frac{\xi - i}{\xi + i} = 1\,.$$

Его решение u_* находим по формуле [8, с. 190]

$$u_*(\xi) = \frac{|\xi|}{\xi^2+1}\; g_*(|\xi|) - \frac{1}{\pi(\xi - i)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{|s|}\; \frac{g_*(|s|)}{s+i}\; \frac{ds}{s-\xi} + \frac{a}{\xi^2+1}\,,$$

в которой a — вообще говоря, произвольное комплексное число.

С учетом четности функции $g_*(|\xi|)$ преобразуем эту формулу к виду

$$u_*(\xi) = \frac{|\xi|\; g_*(|\xi|)}{\xi^2+1} - \frac{\xi+i}{\pi(\xi^2+1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{|s|}\; \frac{g_*(|s|)}{s+i}\; \frac{ds}{s-\xi} + \frac{a}{\xi^2+1} = \frac{|\xi|\; g_*(|\xi|)}{\xi^2+1} -$$

$$- \frac{1}{\pi(\xi^2+1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{|s|}\; \frac{g_*(|s|)}{s-\xi}\, ds + \frac{1}{\xi^2+1}\left(a + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|s|\; g_*(|s|)}{s^2+1}\, ds \right). \quad (3.212)$$

Теперь становится очевидным, что поскольку функция u_* должна принимать только действительные значения, то в равенствах (3.212) постоянная a может быть лишь произвольным действительным числом.

Заметим, что из условий (3.149) и $\psi_{\partial D} \in \widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$, $1/2 < \alpha \le 1$, следует, что функция $\psi(\xi) := \frac{2\,\xi^2}{\sqrt{\xi^2+1}}\; \psi_*(\xi)$ удовлетворяет соотношениям (3.192) – (3.194), в которых $\nu \in [0, \alpha)$ — некоторое число, существование которого для функции $\psi_{\partial D} \in \widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$ следует из определения класса $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$, см. неравенство (3.55). Поэтому справедливы равенство (3.197) и оценки (3.198) – (3.201), из которых следует, что функция $|\xi|\, g'_*(|\xi|)$ принадлежит классу $\mathcal{H}(\mathbb{R})$.

Теперь с учетом леммы 3.15 находим функцию $\mathrm{Re}\, H_*(\xi)$:

$$\mathrm{Re}\, H_*(\xi) = \frac{d}{d\xi}\, \Big(\xi\; u_*(\xi) \Big) = U_*(\xi) + \frac{a\; (\xi^2 - 1)}{(\xi^2+1)^2} \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,$$

где a — произвольная действительная постоянная.

Наконец, используя решение задачи Шварца для полуплоскости [31, с. 209], находим функцию $G_*(\xi) := F\big(\frac{\xi+i}{\xi-i}\big)$:

$$G_*(\xi) = (\xi + i)^2\; H_*(\xi) = \frac{(\xi+i)^2}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{U_*(\tau)}{\tau - \xi}\; d\tau + a \quad \forall\, \xi \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, \xi > 0\,.$$

Из лемм 3.16, 3.17 следует, что функция G_* непрерывно продолжается из верхней полуплоскости $\{\xi \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \xi > 0\}$ на множество $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и может иметь слабостепенной рост в окрестностях бесконечно удаленной точки и точки 0:

$$|G_*(\xi)| \le \ c \ \left(\ |\xi|^\beta + |\xi|^{-\beta} \ \right) \qquad \forall \xi \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \xi > 0 \,,$$

где β — некоторое число из интервала $(0;1)$, а постоянная c не зависит от ξ. Следовательно, функция $F(t) := G_*\big(i \, \frac{1+t}{1-t}\big)$ является общим решением внутренней вспомогательной задачи для заданных граничных значений функции тока Стокса.

Теперь доказательство завершается аналогично доказательству теоремы 3.27, при этом решение задачи Дирихле для функции тока Стокса задается формулой (3.206), в которой при $a = 0$ граничные значения функции G_* на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ выражаются по формуле Сохоцкого [8, с. 47] и с учетом четности функции U_* записываются в виде (3.207). Теорема доказана.

Связь осесимметричных потенциальных полей с аналитическими функциями векторного аргумента, установленная в теореме 2.6, и разложение степенной функции (2.13) по элементам базиса алгебры $\mathbb{H}_\mathbb{C}$ показывают, что для решений уравнения (2.3) присоединенные полиномы Лежандра (1.65) играют такую же роль, как полиномы Лежандра (1.64) для решений уравнения (2.2).

Так, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \sqrt{1-x^2} \ P_n^1(x), \tag{3.213}$$

где $b_n := \frac{2n+1}{2n(n+1)} \int\limits_{-1}^{1} (\sqrt{1-t^2})^{-1} \ \psi_{\partial D}(t, \sqrt{1-t^2}) \ P_n^1(t) \, dt$ — коэффициенты Фурье функции $(\sqrt{1-t^2})^{-1} \ \psi_{\partial D}(t, \sqrt{1-t^2})$ относительно присоединенных полиномов Лежандра P_n^1.

Если функция $\psi_{\partial D}$ удовлетворяет условиям (3.149), (3.150), а ряд (3.213) равномерно сходится (или равномерно суммируем методом Чезаро некоторого порядка $k > 0$, или же равномерно суммируем по Абелю) на отрезке $[-1;1]$ к функции $\psi_{\partial D}(x, \sqrt{1-x^2})$, то функция

$$\psi(x,r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ |r| \ (x^2+r^2)^{n/2} \ P_n^1\Big(x(x^2+r^2)^{-1/2}\Big)$$

является решением задачи Дирихле для функции тока Стокса в единичном круге.

20.9. Задача Дирихле для функции тока Стокса во внешней области, ограниченной окружностью. В следующей теореме устанавливается формула решения задачи Дирихле для функции тока Стокса в случае, когда область D является дополнением к единичному кругу меридианной плоскости.

Теорема 3.29. *Пусть* $D = \{(x, r) : x^2 + r^2 > 1\}$, *функция* $\psi_{\partial D}$ *принадлежит классу* $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D), 1/2 < \alpha \le 1$, *и удовлетворяет условиям* (3.149), (3.150), *где* $b_1 = -1$ *и* $b_2 = 1$. *Тогда решение задачи Дирихле для функции тока Стокса в области* D *задается формулой* (3.206), *в которой* $z = x + ir$,

$$G_*(\xi) = (\xi - i)^2\, U_*(|\xi|) + \frac{2\,\xi\,(\xi - i)^2}{\pi i} \int\limits_0^\infty \frac{U_*(\tau)}{\tau^2 - \xi^2}\, d\tau\,; \tag{3.214}$$

при этом функция U_* *задается равенством*

$$U_*(\tau) = \frac{2\tau}{(\tau^2+1)^2}\, g_*(\tau) + \frac{\tau^2}{\tau^2+1}\, g_*'(\tau) +$$
$$+ \frac{2(1-\tau^2)}{\pi(\tau^2+1)} \int\limits_0^\infty \frac{s\, g_*(s)}{(s^2+1)(s^2-\tau^2)}\, ds + \frac{2}{\pi(\tau^2+1)} \int\limits_0^\infty \frac{s^2\, g_*'(s)}{s^2 - \tau^2}\, ds, \tag{3.215}$$

а в равенстве (3.196) *функция* ψ_* *связана с заданными граничными значениями* $\psi_{\partial D}$ *равенством* (3.208).

Доказательство. Рассмотрим внешнюю вспомогательную задачу для заданных граничных значений функции тока Стокса, решение F которой должно иметь нуль не ниже второго порядка в бесконечно удаленной точке.

С учетом того, что при замене переменных $t = \frac{\tau+i}{\tau-i}$, $z = \frac{\xi+i}{\xi-i}$, где $\tau, \xi \in \mathbb{R}$, справедливы равенства

$$t - x = t - \frac{1}{2}(z + \bar z) = \frac{\tau+i}{\tau-i} - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi+i}{\xi-i} + \frac{\xi-i}{\xi+i}\right) = \frac{2\,(\tau + i\xi^2)}{(\tau-i)(\xi^2+1)},$$

$$\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\right)^+ = -\frac{2i}{(\tau-i)\,\sqrt{\xi^2+1}}\,\sqrt{\xi^2-\tau^2} \quad \forall\, t \in \partial D_z^-\,,$$

интегральное уравнение (3.145) приводится к характеристическому сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши

$$\xi\, u_*(\xi) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u_*(s)}{s - \xi}\, ds = \frac{\xi}{|\xi|}\, g_*(|\xi|) \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{3.216}$$

подобно тому, как при доказательстве теоремы 3.28 получено уравнение (3.211), при этом

$$u_*(\xi) := \xi^{-1} \int_0^{\xi} \operatorname{Re} \frac{F\left(\frac{\tau+i}{\tau-i}\right)}{(\tau-i)^2}\, d\tau\,.$$

Поскольку индекс [8, с. 176] уравнения (3.216)

$$\varkappa := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arg \frac{\xi+i}{\xi-i} = -1\,,$$

то его решение u_* находится по формуле

$$u_*(\xi) = \frac{|\xi|}{\xi^2+1}\, g_*(|\xi|) + \frac{1}{\pi(\xi+i)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{|s|}\, \frac{g_*(|s|)}{s-i}\, \frac{ds}{s-\xi}\,, \tag{3.217}$$

при этом условие существования решения характеристического сингулярного интегрального уравнения имеет вид (см. [8, с. 190])

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{|s|}\, \frac{g_*(|s|)}{s^2+1}\, ds = 0$$

и выполняется вследствие четности функции $g_*(|s|)$.

Далее, учитывая четность функции $g_*(|s|)$, преобразовываем формулу (3.217) к виду

$$u_*(\xi) = \frac{|\xi|}{\xi^2+1}\, g_*(|\xi|) + \frac{1}{\pi(\xi^2+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_*(|s|)}{s-\xi}\, ds - \frac{1}{\pi(\xi^2+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s\, g_*(|s|)}{s^2+1}\, ds$$

и, применяя лемму 3.15, получаем

$$\operatorname{Re} \frac{F\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)}{(\xi-i)^2} = \frac{d}{d\xi} \Big(\xi\, u_*(\xi)\Big) = U_*(|\xi|) \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Теперь, используя решение задачи Шварца для полуплоскости [31, с. 209], находим функцию $G_*(\xi) := F\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)$:

$$G_*(\xi) = \frac{(\xi-i)^2}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_*(|\tau|)}{\tau-\xi}\, d\tau \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{C}\ :\ \operatorname{Im} \xi > 0\,.$$

Как и при доказательстве теоремы 3.28, устанавливается, что функция G_* непрерывно продолжается из верхней полуплоскости $\{\xi \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\xi > 0\}$ на множество $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и может иметь слабостепенной рост в окрестностях бесконечно удаленной точки и точки 0. Следовательно, функция $F(t) := G_*\bigl(i\frac{1+t}{1-t}\bigr)$ является решением внешней вспомогательной задачи для заданных граничных значений функции тока Стокса и имеет при этом нуль не ниже второго порядка в бесконечно удаленной точке.

Таким образом, решение задачи Дирихле для функции тока Стокса задается формулой (3.206), в которой граничные значения функции G_* на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ выражаются по формуле Сохоцкого [8, с. 47] и с учетом четности функции U_* записываются в виде (3.214). Теорема доказана.

§ 21. Приложение аналитических функций к задаче обтекания осесимметричных тел идеальной жидкостью

21.1. Постановка задачи обтекания. Обратимся теперь к важной в приложениях *задаче обтекания* осесимметричного тела потоком идеальной несжимаемой жидкости: в неограниченной области D с ограниченной спрямляемой границей ∂D требуется найти решение $\psi_1(x,r)$ уравнения (2.3), удовлетворяющее условию

$$\psi_1(x,r) = 0 \qquad \forall\ (x,r) \in \partial D \cup \{(x,r) \in D\ :\ r = 0\}\,, \tag{3.218}$$

с такой асимптотикой

$$\psi_1(x,r) = \frac{1}{2}\,v_\infty r^2 + o(1), \qquad x^2 + r^2 \to \infty,\ v_\infty > 0. \tag{3.219}$$

Условие (3.218) выражает тот факт, что граница ∂D и ось Ox являются линиями тока. В асимптотическом соотношении (3.219) v_∞ — скорость неограниченного потока на бесконечности.

Поскольку согласно теореме 3.7 функция тока Стокса

$$\psi(x,r) = \psi_1(x,r) - v_\infty r^2/2$$

представляется в области D равенством (2.18), то решение задачи обтекания сводится к решению внешней задачи Дирихле для функции тока Стокса с заданными граничными значениями

$$\psi_{\partial D}(x,r) = -v_\infty r^2/2\,,$$

которой соответствует интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial D_z}\frac{F(t)(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\,dt = v_\infty r^2, \quad (x,r)\in\partial D: r\neq 0, z=x+ir, \tag{3.220}$$

для нахождения голомофной в D_z функции F.

Отметим, что в работах [32, 33, 4, 104, 35, 36, 37] построены решения задачи обтекания некоторых конкретных осесимметричных тел.

21.2. Представление решения задачи обтекания через распределение источников на оси. Источник интенсивности q, расположенный на оси Ox в точке $(x_0,0)$, моделируется с помощью голоморфной функции $F(t)=q/(t-x_0)$, которой по формуле (2.18) соответствует функция тока

$$\psi(x,r) = -q\,\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+r^2}}\,.$$

Пусть теперь функция $F(z)$ является голоморфной в $\mathbb{C}\setminus[a_1,a_2]$, где $[a_1,a_2]$ — отрезок действительной оси. Обозначим через $F^+(t), F^-(t)$ ее граничные значения на $[a_1,a_2]$ при стремлении $z\to t$ соответственно из верхней и нижней относительно действительной оси полуплоскости. Обозначим также через $L_p[a_1,a_2]$ множество суммируемых в степени p на отрезке $[a_1,a_2]$ функций.

Используя теорему Коши, легко доказать следующую теорему, которая имеет естественную физическую интерпретацию.

Теорема 3.30. *Пусть решение F уравнения* (3.220) *продолжается до функции, голоморфной вне отрезка $[a_1,a_2]$, и ее граничные значения $F^+(t), F^-(t)$ принадлежат $L_p[a_1,a_2]$, $p>1$. Тогда решение задачи обтекания выражается формулой*

$$\psi_1(x,r) = \frac{v_\infty r^2}{2} + \int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{q(t)(t-x)}{\sqrt{(t-x)^2+r^2}}\,dt \qquad \forall\ (x,r)\in D, \tag{3.221}$$

где $q(t) := \frac{1}{2\pi i}\,(F^+(t)-F^-(t)) \equiv \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,F^+(t)$ — плотность распределения интенсивности источников на отрезке $[a_1,a_2]$. При этом суммарная интенсивность источников

$$\int\limits_{a_1}^{a_2} q(t)\,dt = 0. \tag{3.222}$$

Формула (3.221) — известный классический результат (см. [32, с. 201]). При этом теорема 3.30 дает возможность определять плотность распределения источников через граничные значения функции F на множестве распределения источников.

Используя теорему Коши, также легко доказать следующую теорему, обратную к теореме 3.30.

Теорема 3.31. *Пусть решение задачи обтекания выражается формулой* (3.221), *где* $q(t) \in L_p[a_1, a_2]$, $p > 1$, *и выполняется равенство* (3.222). *Тогда решение* F *уравнения* (3.220) *продолжается до функции, голоморфной вне отрезка* $[a_1, a_2]$, *а ее граничные значения* $F^+(t), F^-(t)$ *принадлежат* $L_p[a_1, a_2]$. *При этом*

$$F(z) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{q(t)}{t - z}\, dt \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus [a_1, a_2]. \tag{3.223}$$

Теорема 3.32. *Плотность распределения интенсивности источников* $q(t)$ *выражается через значения функции* (3.223) *на множестве* $(-\infty, b_1) \cup (b_2, \infty)$ *в виде повторного интеграла* (*при условии, что он существует*)

$$q(t) = \frac{b_2 - b_1}{2\pi^2 \sqrt{(b_2 - t)(t - b_1)}} \int_{-\infty}^{\infty} A(t, \xi) \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi, \tau)\, d\tau\, d\xi \tag{3.224}$$

при всех $t \in [b_1, b_2]$, *где* $\quad A(t, \xi) := \operatorname{ch}(\pi\xi) \exp\Big(i\xi \ln \frac{t - b_1}{b_2 - t}\Big)$,

$$B(\xi, \tau) := \frac{F\Big(b_1 + (b_2 - b_1)(\operatorname{cth}\frac{\tau}{2} + 1)/2\Big)}{\exp(\tau) - 1}\ \exp(-i\tau\xi)\,.$$

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение (3.223), в котором $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ и $z \in (-\infty, b_1) \cup (b_2, \infty)$. С помощью замены переменных $t = b_1 + (b_2 - b_1)\frac{\tau}{\tau + 1}$, $\quad z = b_1 + (b_2 - b_1)\frac{\xi}{\xi - 1}$ оно приводится к интегральному уравнению

$$\int_0^{\infty} \frac{q_*(\tau)}{\tau + \xi}\, d\tau = F_*(\xi), \qquad \xi > 0, \tag{3.225}$$

в котором

$$F_*(\xi) := F\Big(b_1 + (b_2 - b_1)\frac{\xi}{\xi - 1}\Big)/(\xi - 1)\,,$$

$$q_*(\tau) := q\Big(b_1 \ + \ (b_2 - b_1)\frac{\tau}{\tau+1}\Big)/(\tau+1)\,.$$

Уравнение (3.225) разрешимо в явном виде [20, с. 30]. В результате обращения интегрального оператора в уравнении (3.225) получаем выражение (3.224) для плотности распределения интенсивности источников на отрезке $[b_1, b_2]$.

21.3. Представление решения задачи обтекания через распределение диполей на оси. Диполь, расположенный на оси Ox в точке $(x_0, 0)$, с моментом p, направленным вдоль оси Ox (назовем его также интенсивностью диполя), моделируется с помощью голоморфной функции $F(t) = p/(t-x_0)^2$, которой по формуле (2.18) соответствует функция тока

$$\psi(x,r) = p\,\frac{r^2}{((x-x_0)^2 + r^2)^{3/2}}\,.$$

Известно, что в результате взаимодействия набегающего потока идеальной несжимаемой жидкости, скорость которого $v_\infty > 0$, с диполем интенсивности p, расположенным в точке $(0,0)$, получается картина обтекания шара радиуса $R = \sqrt[3]{\frac{2p}{v_\infty}}$ с центром в начале координат (см., например, [32, с. 200]) . При этом линии тока задаются уравнениями

$$\psi_1(x,r) = \frac{v_\infty\, r^2}{2} - p\,\frac{r^2}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \text{const.}$$

В случае непрерывно распределенных на оси Ox диполей справедливы следующие теоремы, которые доказываются аналогично теоремам 3.30 – 3.32.

Теорема 3.33. *Пусть решение F уравнения* (3.220) *имеет в области D_z первообразную $\mathcal{F}$, которая продолжается до функции, голоморфной вне отрезка $[a_1, a_2]$, и ее граничные значения $\mathcal{F}^+(t), \mathcal{F}^-(t)$ принадлежат $L_p[a_1, a_2]$, $p > 1$. Тогда решение задачи обтекания выражается формулой*

$$\psi_1(x,r) = \frac{v_\infty r^2}{2} - r^2 \int\limits_{a_1}^{a_2} \frac{p(t)}{((t-x)^2 + r^2)^{3/2}}\, dt \quad \forall\ (x,r) \in D, \quad (3.226)$$

где $p(t) := \frac{1}{2\pi i}\ (\mathcal{F}^+(t) - \mathcal{F}^-(t)) \equiv \frac{1}{\pi}\ \mathrm{Im}\,\mathcal{F}^+(t)$ — плотность распределения интенсивности диполей на отрезке $[a_1, a_2]$.

Теорема 3.34. *Пусть решение задачи обтекания выражается формулой* (3.226), *где* $p(t) \in L_p[a_1, a_2]$, $p > 1$. *Тогда решение* F *уравнения* (3.220) *имеет в области* D_z *первообразную* $\mathcal{F}$, *которая продолжается до функции, голоморфной вне отрезка* $[a_1, a_2]$, *а ее граничные значения* $\mathcal{F}^+(t), \mathcal{F}^-(t)$ *принадлежат* $L_p[a_1, a_2]$. *При этом*

$$\mathcal{F}(z) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{p(t)}{t - z}\, dt \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus [a_1, a_2]. \tag{3.227}$$

Теорема 3.35. *Плотность распределения интенсивности диполей* $p(t)$ *выражается через значения функции* (3.227) *на множестве* $(-\infty, b_1) \cup (b_2, \infty)$ *в виде повторного интеграла* (*при условии, что он существует*)

$$p(t) = \frac{b_2 - b_1}{2\pi^2\,\sqrt{(b_2 - t)(t - b_1)}} \int_{-\infty}^{\infty} A(t, \xi) \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi, \tau)\, d\tau\, d\xi \qquad \forall\, t \in [b_1, b_2],$$

где функция $A(t, \xi)$ *определена в теореме* 3.32, *а*

$$C(\xi, \tau) := \frac{\mathcal{F}\Big(b_1 + (b_2 - b_1)(\operatorname{cth}\frac{\tau}{2} + 1)/2\Big)}{\exp(\tau) - 1}\ \exp(-i\tau\xi)\,.$$

Заметим, что всякое решение задачи обтекания вида (3.221) представляется также формулой (3.226), где

$$p(t) = \int_{a_1}^{t} q(\tau)\, d\tau\,.$$

Но среди областей D, для которых решение задачи обтекания представляется формулой (3.226), имеются области, для которых функция ψ_1 не может быть представлена в виде (3.221). Последнее, например, справедливо в случае, если функция $p(t)$, входящая в формулу (3.226), удовлетворяет неравенству $p(a_1) \neq p(a_2)$. Таким образом, формула (3.226) задает решение задачи обтекания для более широкого класса областей D, чем формула (3.221).

Заметим, что если функция (3.226) является решением задачи обтекания и при этом $p(t) \geq 0$ для всех $t \in [a_1, a_2]$, то дополнение к замыканию области D является правильной в направлении оси Or областью. Это очевидным образом следует из монотонности по аргументу r^2 интеграла в формуле (3.226).

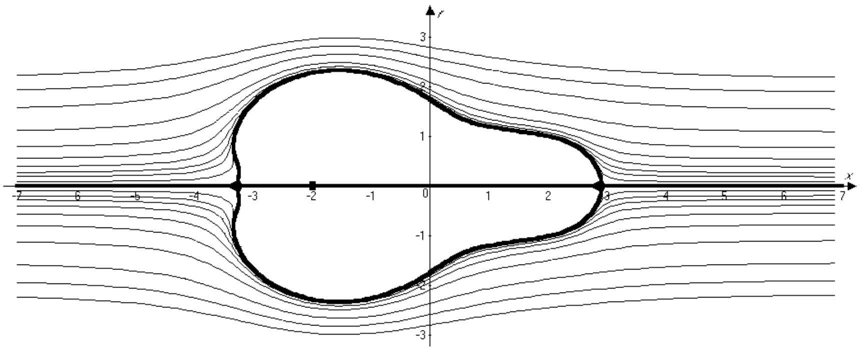

Рис. 1. Обтекание "груши"

21.4. Привлечение мультиполей к построению решений задачи обтекания. Существуют также области, для которых при решении задачи обтекания необходимо использовать мультиполи наряду с распределенными источниками и диполями.

На рис. 1 изображено обтекание "груши". В этом случае линии тока задаются уравнениями

$$\psi_1(x,r) = r^2\left(1,7 - \frac{44(x+2)}{((x+2)^2+r^2)^{5/2}} - \frac{20}{((x+2,245)^2+r^2)^{3/2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{((x-1)^2+r^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x-2)^2+r^2)^{3/2}}\right) = \text{const}.$$

Здесь решение ψ_1 получено при помощи трех диполей, расположенных в точках $(-2,245;0)$, $(1;0)$, $(2;0)$, и одного квадруполя, расположенного в точке $(-2;0)$. При построении этого решения использована формула (2.18), в которой функция тока для квадруполя

$$\psi(x,r) = -\frac{44(x+2)r^2}{((x+2)^2+r^2)^{5/2}}$$

соответствует голоморфной функции

$$F(t) = -\frac{88}{3(t+2)^3}\,.$$

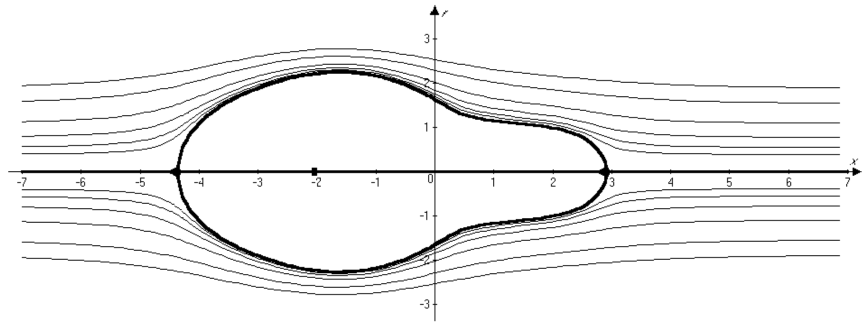

Рис. 2. Обтекание "матрешки"

Заметим, что в этом случае дополнение к замыканию области D не является правильной в направлении оси Or областью.

На рис. 2 изображено обтекание "матрешки". В этом случае дополнение к замыканию области D уже получается правильной в направлении оси Or областью. Линии тока задаются уравнениями

$$\psi_1(x,r) = r^2\left(1,7 - \frac{44(x+2)}{((x+2)^2+r^2)^{5/2}} - \frac{20}{((x+2,5)^2+r^2)^{3/2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{((x-1)^2+r^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x-2)^2+r^2)^{3/2}}\right) = \text{const}.$$

Изменение картины обтекания получено за счет смещения диполя из точки $(-2,245;0)$ в точку $(-2,5;0)$.

Существенным моментом с точки зрения приложений является тот факт, что привлечение мультиполей в качестве особенностей не обязательно приводит к решению задачи обтекания. Комбинация диполей и мультиполей дает картину обтекания только при определенных соотношениях между интенсивностями заданных особенностей.

Рассмотрим взаимодействие набегающего потока идеальной несжимаемой жидкости, скорость которого $v_\infty > 0$, с диполем и квадруполем, расположенными на оси Ox.

Пусть квадруполь интенсивности m расположен в точке $(0;0)$, а диполь интенсивности p расположен в точке $(x_0;0)$, $x_0 \neq 0$. Рассмотрим два случая: $x_0 > 0$ (см. рис. 3) и $x_0 < 0$ (см. рис. 4).

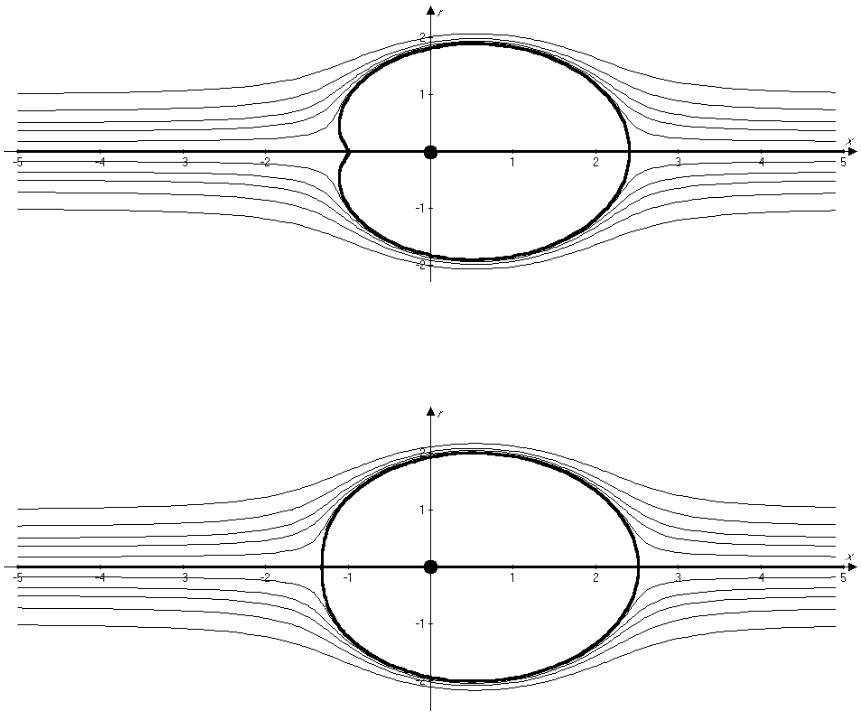

Рис. 3. Диполь расположен справа от квадруполя

1) В случае $x_0 > 0$ используем функцию

$$\psi(x,r) = -m\frac{3xr^2}{(x^2+r^2)^{5/2}} - p\frac{r^2}{((x-x_0)^2+r^2)^{3/2}}, \tag{3.228}$$

которая по формуле (2.18) соответствует голоморфной функции

$$F(t) = -\frac{2m}{t^3} - \frac{p}{(t-x_0)^2}\,.$$

Если интенсивность диполя мала по сравнению с интенсивностью квадруполя (количественное соотношение приводится ниже), то особая точка $(0,0)$ функции $\psi(x,r)$ оказывается на границе области, уравнение которой

$$\frac{\psi(x,r)}{r^2}+\frac{v_\infty}{2}=0$$

с учетом равенства (3.228) приводится к виду

$$\frac{v_\infty}{2}-\frac{3xm}{(x^2+r^2)^{5/2}}-\frac{p}{((x-x_0)^2+r^2)^{3/2}}=0\,. \tag{3.229}$$

Поэтому функция

$$\psi_1(x,r)=\frac{v_\infty r^2}{2}-m\frac{3xr^2}{(x^2+r^2)^{5/2}}-p\frac{r^2}{((x-x_0)^2+r^2)^{3/2}} \tag{3.230}$$

не является решением задачи обтекания.

Увеличение интенсивности диполя в конечном итоге приводит к образованию замкнутого контура Г, координаты точек которого удовлетворяют уравнению (3.229), а точка $(0,0)$ при этом лежит внутри области, ограниченной контуром Г. Тогда равенство (3.229) выполняется в некоторой точке $(x,0)$ при $x<0$:

$$\frac{v_\infty}{2}+\frac{3m}{x^4}-\frac{p}{(x_0-x)^3}=0\,,$$

откуда находим

$$p=\frac{v_\infty}{2}\,(x_0-x)^3\left(1+\frac{6m}{v_\infty x^4}\right)\,. \tag{3.231}$$

Заметим, что равенство (3.231) выполняется в некоторой точке $(x,0)$, $x<0$, тогда и только тогда, когда

$$p\ge\frac{v_\infty}{2}\;\min_{x<0}\left((x_0-x)^3\left(1+\frac{6m}{v_\infty\,x^4}\right)\right)=:c_1\,,$$

при этом функция (3.230) задает решение задачи обтекания для неограниченной области, границей которой является Г.

Теперь можно утверждать:

а) *если* $p\ge c_1$, *то функция* (3.230) *является решением задачи обтекания для некоторой области* D*;*

б) *если* $p<c_1$, *то не существует области* D, *для которой функция* (3.230) *была бы решением задачи обтекания.*

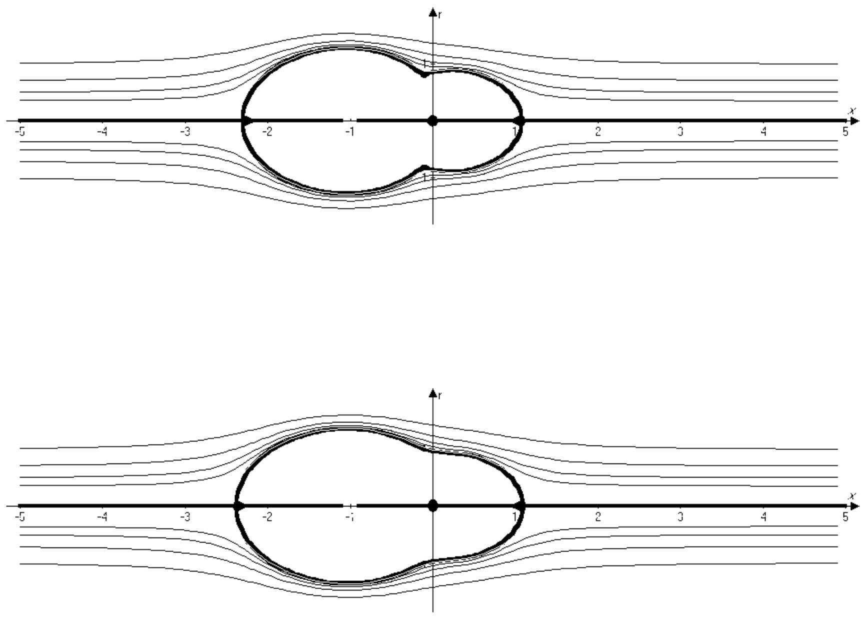

Рис. 4. Диполь расположен слева от квадруполя

2) В случае $x_0 < 0$ делаем вывод о том, что если точка $(0,0)$ расположена внутри области, ограниченной контуром Γ, то для каждого $x \in [x_0, 0]$ существует точка (x, r), $r > 0$, такая, что выполняется равенство (3.229), откуда находим

$$p = \frac{v_\infty}{2}((x-x_0)^2 + r^2)^{3/2} \left(1 - \frac{6mx}{v_\infty (x^2+r^2)^{5/2}}\right). \tag{3.232}$$

Заметим, что для каждой фиксированной точки $x \in [x_0, 0]$ равенство (3.232) выполняется в некоторой точке (x, r), $y > 0$, тогда и только тогда, когда

$$p \geq \frac{v_\infty}{2} \min_{r \geq 0} \left((x-x_0)^2 + r^2)^{3/2} \left(1 - \frac{6mx}{v_\infty (x^2+r^2)^{5/2}}\right)\right).$$

Наконец, для каждой точки $x \in [x_0, 0]$ существует точка (x, r), $r > 0$, в которой выполняется равенство (3.232), тогда и только тогда, когда

$$p \geq \frac{v_\infty}{2} \max_{x \in [x_0,\, 0]} \min_{r \geq 0} \left(((x - x_0)^2 + r^2)^{3/2} \left(1 - \frac{6mx}{v_\infty \, (x^2 + r^2)^{5/2}} \right) \right) =: c_2 \, .$$

Следовательно, справедливы следующие утверждения:

а) *если $p \geq c_2$, то функция* (3.230) *является решением задачи обтекания для некоторой области D;*

б) *если $p < c_2$, то не существует области D, для которой функция* (3.230) *была бы решением задачи обтекания.*

Отметим, что граница ∂D является кусочно гладкой кривой, если $p = c_1$ в случае $x_0 > 0$ (см. рис. 3) или $p = c_2$ в случае $x_0 < 0$ (см. рис. 4).

Литература

[1] Александров А.Я., Соловьев Ю.П. Одна форма решения пространственных осесимметричных задач теории упругости при помощи функций комплексного переменного и решение этих задач для сферы // Прикл. математика и механика. — 1962. — **26**, № 1. — С. 138 — 145.

[2] Бабаев А.А., Салаев В.В. Краевые задачи и сингулярные уравнения на спрямляемом контуре // Мат. заметки. — 1982. — **31**, № 4. — С. 571 — 580.

[3] Брело М. Основы классической теории потенциала. — Москва: Мир, 1964. — 212 с.

[4] Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. — Москва: Мир, 1973. — 758 с.

[5] Вашарин А.А. Граничные свойства функций класса $W_2^1(\alpha)$ и их приложения к решению одной краевой задачи математической физики // Изв. АН СССР, серия матем. – 1959. – **23**, № 3. – С. 421 – 454.

[6] Вашарин А.А., Лизоркин П.И. Некоторые краевые задачи для эллиптических уравнений с сильным вырождением на границе // Докл. АН СССР. – 1961. – **137**, № 5. – С. 1015 – 1018.

[7] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. — Москва: Наука, 1988. — 512 с.

[8] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. — Москва: Наука, 1977. — 640 с.

[9] Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е. Коммутативные нормированные кольца. — Москва: Физматгиз, 1960. — 316 с.

[10] Геронимус Я.Л. О некоторых свойствах функций, непрерывных в замкнутом круге // Докл. АН СССР. — 1954. — **98**, № 6. — С. 889 — 891.

[11] Герус О.Ф. Некоторые оценки модулей гладкости интегралов типа Коши // Укр. мат. журн. — 1978. — **30**, № 5. — С. 594 — 601.

[12] Герус О.Ф. О модуле непрерывности телесных производных интеграла типа Коши // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 4. — С. 476 — 484.

[13] Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1952. — 476 с.

[14] Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. — Москва: Гостехиздат, 1952. — 540 с.

[15] Данилюк И.И. Обобщенная формула Коши для осесимметрических полей // Сиб. мат. журн. — 1963. — **4**, № 1. — С. 48 — 85.

[16] Данилюк И.И. Исследование пространственных осесимметрических краевых задач // Сиб. мат. журн. — 1963. — **4**, № 6. — С. 1271 — 1310.

[17] Джаиани Г.В. Уравнение Эйлера – Пуассона – Дарбу. — Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та., 1984. — 80 с.

[18] Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1948. — 260 с.

[19] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — Москва: Наука, 1977. — 512 с.

[20] Забрейко П.П. и др. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968. — 448 с.

[21] Капшивий О.О. Про розв'язання осесиметричних задач теорії пружності для шару з циліндричною порожниною // Вісник Київ. ун-ту. Сер. математики та механіки. — 1961. — № 4, вип. 1. — С. 96 — 106.

[22] Капшивый А.А. Об основном интегральном представлении x-аналитических функций и его применении к решению некоторых интегральных уравнений // Мат. физика. — 1972. — № 12. — С. 38 — 46.

[23] Капшивый А.А. Задачи о комплексном x-аналитическом потенциале системы концентрических сферических дисков // Мат. физика. — 1975. — № 17. — С. 120 — 128.

[24] Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. — 1951. — **77**, № 2. — С. 181 — 183.

[25] Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — Москва: Наука, 1997. — 208 с.

[26] Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. — Москва – Ленинград: ОНТИ, 1937. — Ч. 1. — 432 с.

[27] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва: Наука, 1981. — 543 с.

[28] Кривенков Ю.П. О некотором представлении решений уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу // Докл. АН СССР. — 1957. — **116**, № 3. — С. 351 — 354.

[29] Кривенков Ю.П. Задача D для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу // Исследование по механике и прикладной математике. Труды МФТИ. — 1960. — № 5. — С. 134 — 145.

[30] Кудрявцев Л.Д. О решении вариационным методом эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области // Докл. АН СССР. — 1956. — **108**, № 1. — С. 16 — 19.

[31] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. — Москва: Наука, 1987. — 688 с.

[32] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. — Москва: Наука, 1977. — 408 с.

[33] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — Москва: Наука, 1987. — 840 с.

[34] Магнарадзе Л.Г. Об одном обобщении теоремы И.И. Привалова и его применение к некоторым граничным задачам теории функций и к сингулярным интегральным уравнениям // Докл. АН СССР. — 1949. — **68**, № 4. — С. 657 — 660.

[35] Мельниченко І.П., Пік Є.М. Про один метод одержання осесиметричних течій // Доповіді АН УРСР, сер. А. — 1973. — № 2. — С. 152 — 155.

[36] Мельниченко И.П., Пик Е.М. Кватернионные уравнения и гиперкомплексные потенциалы в механике сплошной среды // Прикладная механика. — 1973. — **9**, № 4. — С. 45 — 50.

[37] Мельниченко И.П., Пик Е.М. Кватернионные потенциалы осесиметричних течений идеальной несжимаемой жидкости // Прикладная механика. — 1975. — **11**, № 1. — С. 125 — 128.

[38] Мельниченко И.П. Пример гармонической алгебры третьего ранга // Докл. АН УССР, сер А. — 1975. — № 3. — С. 201 — 203.

[39] Мельниченко И.П. О представлении моногенными функциями гармонических отображений // Укр. мат. журн. — 1975. — **27**, № 5. — С. 606 — 613.

[40] Мельниченко И.П. Об одном методе описания потенциальных полей с осевой симметрией // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. — С. 98 — 102.

[41] Мельниченко И.П. Методы теории функций в задачах осесимметричного потенциала // Некоторые вопросы современной теории функций. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1976. — С. 96 — 101.

[42] Мельниченко И.П. Алгебры функционально-инвариантных решений трехмерного уравнения Лапласа // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 9. — С. 1284 — 1290.

[43] Мельниченко И.П., Плакса С.А. Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. I // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 11. — С. 1518 — 1529.

[44] Мельниченко И.П., Плакса С.А. Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. II // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 12. — С. 1695 — 1703.

[45] Мельниченко И.П., Плакса С.А. Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. III // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, № 2. — С. 228 — 243.

[46] Мельниченко И.П., Плакса С.А. Приложение аналитических функций к задачам обтекания осесимметричных тел идеальной жидкостью // Доп. НАН України. — 2003. — № 10. — С. 22 — 29.

[47] Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. — М.: Изд-во иностр. лит., 1957. — 256 с.

[48] Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. — Душанбе: Изд-во АН Тадж. ССР, 1963. — 183 с.

[49] Михайлов Л.Г., Раджабов Н. Аналог формулы Пуассона для некоторых уравнений второго порядка с сингулярной линией // Докл. АН Тадж. ССР. — 1972. — **15**, № 11. — С. 6 — 9.

[50] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. — Москва: Высш. шк., 1977. — 432 с.

[51] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. — Москва: Наука, 1968. — 511 с.

[52] Олевский М.Н. Решение задачи Дирихле, относящейся к уравнению $\Delta u + \frac{p}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} = \rho$ для полусферической области // Докл. АН СССР. — 1949. — **66**, № 6. — С. 767 — 770.

[53] Пахарєва Н.О., Вірченко Н.О. Про деякі інтегральні перетворення в класі x^k-аналітичних функцій // Доп. АН УРСР. — 1962. — № 8. — С. 998 — 1003.

[54] Плакса С.А. Краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка на спиралеобразном контуре, I // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 11. — С. 1509 — 1517.

[55] Плакса С.А. О композиции сингулярного и регулярного интегралов на спрямляемой кривой // Современные вопросы теории приближения и комплексного анализа. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. — С. 104 — 112.

[56] Плакса С.А. О повторных интегралах по спрямляемой кривой // Комплексный анализ и теория потенциала. — Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. — С. 82 — 100.

[57] Плакса С.А. Задачи Дирихле для осесимметричных потенциальных полей в круге меридианной плоскости. I // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 4. — С. 491 — 511.

[58] Плакса С.А. Задачи Дирихле для осесимметричных потенциальных полей в круге меридианной плоскости. II // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 6. — С. 748 — 757.

[59] Плакса С.А. Об интегральных представлениях осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в областях меридианной плоскости. I // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 5. — С. 631 — 646.

[60] Плакса С.А. Об интегральных представлениях осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в областях меридианной плоскости. II // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 6. — С. 800 — 809.

[61] Плакса С.А. Задача Дирихле для осесимметричного потенциала в односвязной области меридианной плоскости // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 12. — С. 1623 — 1640.

[62] Плакса С.А. К решению внешней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 12. — С. 1634 — 1641.

[63] Плакса С.А. Задача Дирихле для функции тока Стокса в односвязной области меридианной плоскости // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 2. — С. 197 — 231.

[64] Положий Г.Н. Теория и применение p-аналитических и (p,q)-аналитических функций. — Киев: Наукова думка, 1973. — 423 с.

[65] Положій Г.М. Зауваження до основного інтегрального зображення p-аналітичних функцій з характеристикою $p = x^k$ // Доп. АН УРСР. — 1964. — № 7. — С. 839 — 841.

[66] Положий Г.Н., Улитко А.Ф. О формулах обращения основного интегрального представления p-аналитических функций с характеристикой $p = x^k$ // Прикл. механика. — 1965. — **1**, № 1. — С. 39 — 51.

[67] Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. — Москва: Гостехиздат, 1950. — 336 с.

[68] Раджабов Н. Обращение одного интегрального уравнения осесимметрической теории упругости // Докл. АН Тадж. ССР. — 1963. — **6**, № 6. — С. 3 — 6.

[69] Раджабов Н. Некоторые краевые задачи для уравнения осесимметрической теории поля // Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений. — Душанбе: АН Тадж. ССР. — 1965. — С. 79 — 128.

[70] Раджабов Н.Р. Интегральные представления и их обращение для обобщенной системы Коши–Римана с сингулярной линией // Докл. АН Тадж. ССР. — 1968. — **11**, № 4. — С. 14 — 18.

[71] Раджабов Н. Интегральные уравнения и граничные задачи для некоторых уравнений эллиптического типа с сингулярной линией // Изв. АН Тадж. ССР : отд. физ.-мат. и геол.-хим. наук. — 1972. — № 4. — С. 3 — 12.

[72] Раджабов Н. Построение потенциалов и исследование внутренних и внешних граничных задач типа Дирихле и Неймана для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу на плоскости // Докл. АН Тадж. ССР. — 1974. — **17**, № 8. — С. 7 — 11.

[73] Салаев В.В. Некоторые свойства сингулярного оператора // Уч. зап. АГУ. Сер. физ.-мат. наук. — 1966. — № 6. — С. 12 — 17.

[74] Салаев В.В. Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой // Мат. заметки. — 1976. — **19**, № 3. — С. 365 — 380.

[75] Смирнов В.И. Курс высшей математики: В 5 т. — Москва: Наука, 1974. — Т. 2. — 656 с.

[76] Смирнов В.И. Курс высшей математики: В 5 т. — Москва: Наука, 1969. — Т. 3. — Ч. 2. — 672 с.

[77] Смирнов В.И. Курс высшей математики: В 5 т. — Москва: Гостехиздат, 1951. — Т. 4. — 804 с.

[78] Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. — Москва: Наука, 1966. — 292 с.

[79] Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. — Москва: Высшая школа, 1985. — 304 с.

[80] Терсенов С.А. К теории уравнений эллиптического типа, вырождающихся на границе области // Сиб. мат. журн. — 1965. — **6**, № 5. — С. 1120 — 1143.

[81] Терсенов С.А. О задаче Римана – Гильберта для эллиптической системы уравнений первого порядка, вырождающейся на границе области // Сиб. мат. журн. — 1966. — **7**, № 1. — С. 167 — 191.

[82] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960. — 540 с.

[83] Уиттекер Э.Т., Ватсон Д.Н. Курс современного анализа: В 2 ч. — Москва: Физматгиз, 1963. — Ч. 2. — 515 с.

[84] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. — Москва: Наука, 1966. — Т. 2. — 800 с.

[85] Хведелидзе Б.В. Метод интегралов типа Коши в разрывных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. — 1975. — **7**. — С. 5 — 162.

[86] Чеботарев Н.Г. Введение в теорию алгебр. — Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1949. — 88 с.

[87] Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 829 с.

[88] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. — Москва: Наука, 1976. — 320 с.

[89] Bateman H. Partial Differential Equations of Mathematical Physics. — Dover publ., 1944. — 522 p.

[90] Gilbert R.P. Function theoretic methods in partial differential equations. — New York–London: Academic Press, 1969. — 311 p.

[91] Erdelyi A. Singularities of generalized axially symmetric potentials // Communic. on Pure and Appl. Math. — 1956. — **9**, № 3. — P. 403 — 414.

[92] Henrici P. Zur Funktionentheory der Wellengleichung // Comment. Math. Helv. — 1953. — **27**, №№ 3,4. — P. 235 — 293.

[93] Henrici P. On the domain of regularity of generalized axially symmetric potentials // Proc. Amer. Math. Soc. — 1957. — **8**, № 1. — P. 29 — 31.

[94] Huber A. On the uniqueness of generalized axially symmetric potentials // Annals of Math. — 1954. — **60**, № 2. — P. 351 — 358.

[95] Mackie A.G.. Contour integral solutions of a class of differential equations // J. Rational Mech. and Analysis. — 1955. — **4**, № 5. — P. 733 — 750.

[96] Melničenko I.P. Представление дифференцируемыми функциями потенциалов с осевой симметрией // Conf. on Analytic Functions, Blazejewko, August 19 – 27, 1982: Abstracts. — Lodz: University of Lodz, 1982. — P. 35.

[97] Mel'nichenko I.P., Plaksa S.A. Commutative algebra of hypercomplex analytic functions and solutions of elliptic equations degenerating on an axis // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2004. — Т. 1, № 3. — С. 144 — 150.

[98] Plaksa S. Algebras of hypercomplex monogenic functions and axial-symmetrical potential fields // Proc. of the Second ISAAC Congress, Fukuoka, August 16 — 21, 1999. — Netherland-U.S.A.: Kluwer Academic Publishers, 2000. — **1**. — P. 613 — 622.

[99] Plaksa S. Boundary properties of axial-symmetrical potential and Stokes flow function // Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis. — Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. — New York – Basel: Marcel Dekker Inc., 2000. — **214**. — P. 443 — 455.

[100] Plaksa S. Singular and Fredholm integral equations for Dirichlet boundary problems for axial-symmetric potential fields // Factorization, Singular Operators and Related Problems: Proc. of Conference in Honour of Prof. Georgui Litvinchuk, Funchal, January 28 – February 1, 2002. — Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2003. P. 219 — 235.

[101] Tamrazov P.M. Structural and approximational properties of functions in the complex domain // Linear spaces and approximation. — Basel: Birkhäuser Verlag Basel, 1978. — P. 503 — 514.

[102] Warschawski S.E. On differentiability at the boundary in conformal mapping // Proc. Amer. Math. Soc. — 1961. — **12**, N 4. — P. 614 — 620.

[103] Weinstein A. Discontinuous integrals and generalized potential theory // Trans. Amer. Math. Soc. — 1948. — **63**, № 2. — P. 342 — 354.

[104] Weinstein A. Generalized axially symmetric potential theory // Bull. Amer. Math. Soc. — 1953. — **59**, № 1. — P. 20 — 38.

[105] Weinstein A. Singular partial differential equations and their applications // Proc. Symp. Univ. of Maryland. — 1961. — Fluid Dynamic and Appl. Math. — 1962. — P. 29 — 49.

[106] Zygmund A. Sur le module de continuite de la somme de la serie conjuguee de la serie de Fourier // Prace Matematyczno-Fizyczne. — 1924. — **33**. — P. 125 — 132.