Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, том 7, N 2, 314–321

УДК 517.9

В. С. Шпаковский

(Институт математики НАН Украины, Киев)

Степенные ряды и ряды Лорана в трехмерной гармонической алгебре

shpakivskyi@mail.ru

В тривимірній гармонічній алгебрі одержано тейлорівські та лоранівські розклади моногенних функцій, класифіковано їх особливості та доведено еквівалентність різних означень моногенної функції.

Taylor's and Laurent's expansions of monogenic functions taking values in a three-dimensional harmonic algebra are obtained, singularities of these functions are classified and an equivalence of different definitions of a monogenic function is proved.

1. Введение. Пусть $\mathbb{A}_3$ — коммутативная ассоциативная банахова алгебра третьего ранга над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, базис которой состоит из единицы алгебры 1 и элементов ρ_1, ρ_2, для которых выполняются правила умножения: $\rho_1\rho_2 = \rho_2^2 = 0$, $\rho_1^2 = \rho_2$.

Рассмотрим базис

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = i + \frac{1}{2}\, i\rho_2, \qquad e_3 = -\rho_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\rho_2 \tag{1}$$

алгебры $\mathbb{A}_3$, удовлетворяющий условию

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0, \tag{2}$$

то есть являющийся *гармоническим* (см. [1, 2]).

Выделим в алгебре $\mathbb{A}_3$ линейную оболочку $E_3 := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, порожденную векторами $1, e_2, e_3$. Области Ω трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ поставим в соответствие область $\Omega_\zeta := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 : (x, y, z) \in \Omega\}$ в E_3.

Непрерывная функция $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ называется *моногенной* в области $\Omega_\zeta \subset E_3$, если Φ дифференцируема по Гато в каждой точке этой области, то есть если для каждого $\zeta \in \Omega_\zeta$ существует элемент $\Phi'(\zeta)$ алгебры $\mathbb{A}_3$ такой, что выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\right) \varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall h \in E_3. \tag{3}$$

В работе [3] для функций, дифференцируемых по Лорху в выпуклой области произвольной коммутативной ассоциативной банаховой алгебры, установлен ряд свойств, аналогичных свойствам голоморфных функций комплексной переменной (в частности, интегральная теорема и интегральная формула Коши, разложимость в степенной ряд, теорема Морера). В работе [4] в указанных результатах из [3] снято условие выпуклости области определения заданных функций.

В работе [5] установлены аналоги интегральной теоремы Коши, интегральной формулы Коши и теоремы Морера для моногенных функций $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$, заданных лишь в области Ω_ζ линейного многообразия E_3, а не всей алгебры $\mathbb{A}_3$, причем предположение о дифференцируемости функции Φ по Гато априори является более слабым ограничением, чем ее дифференцируемость по Лорху.

В этой работе получены тейлоровские и лорановские разложения моногенных функций, заданных в областях линейного многообразия E_3, сделана классификация особых точек и доказана эквивалентность разных определений моногенной функции $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$.

2. Степенные ряды и моногенные функции. В алгебре $\mathbb{A}_3$ определим евклидову норму $\|a\| := \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2}$, где $a = a_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ и $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$.

Непосредственное применение способа разложения голоморфных функций, основанного на разложении в ряд ядра Коши (см., например, [6, с. 107]), к функции $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$, моногенной в области Ω_ζ, позволяет получить ее разложение в степенной ряд

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (\zeta - \zeta_0)^n \tag{4}$$

в шаре с центром в фиксированной точке $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ меньшего радиуса, чем расстояние от точки ζ_0 до границы $\partial\Omega_\zeta$; здесь

$$d_n = \frac{\Phi^{(n)}(\zeta_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\tau)\Big((\tau-\zeta_0)^{-1}\Big)^{n+1} d\tau\,, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

и γ_ζ — любая замкнутая жорданова спрямляемая кривая в Ω_ζ, один раз охватывающая прямую $\{\zeta_0 + ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$ и лежащая в шаре, целиком содержащемся в области Ω_ζ. Это связано с тем, что в неравенстве $\|ab\| \le 2\sqrt{14}\,\|a\|\|b\|$ константа $2\sqrt{14}$ не может быть заменена единицей.

Тем не менее, используя представление моногенной функции $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ через аналитические функции комплексной переменной, покажем, что функция Φ в шаре $B(\zeta_0, R) := \{\zeta \in E_3 : \|\zeta - \zeta_0\| < R\}$ радиуса $R := \min\limits_{\tau \in \partial\Omega_\zeta} \|\tau - \zeta_0\|$ с центром в произвольной точке $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ представляется в виде ряда (4).

С этой целью для точки $\zeta_0 := x_0 + y_0e_2 + z_0e_3$ обозначим через $\xi_0 := x_0 + iy_0$ соответствующую точку комплексной плоскости и обозначим $U(\xi_0, R) := \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - \xi_0| < R\}$.

Функция Φ в шаре $B(\zeta_0, R)$ представляется в виде (см. [7])

$$\Phi(\zeta) = F(\xi) - zF'(\xi)\rho_1 + \left(\left(\frac{1}{2}iy - \frac{\sqrt{3}}{2}iz\right)F'(\xi) + \frac{z^2}{2}F''(\xi)\right)\rho_2 +$$

$$+F_1(\xi)\rho_1 + \left(F_2(\xi) - zF_1'(\xi)\right)\rho_2, \qquad (5)$$

где $\zeta = x + ye_2 + ze_3 \in B(\zeta_0, R)$, $\xi = x + iy$ и F, F_1, F_2 — некоторые аналитические в области $U(\xi_0, R)$ функции.

Теорема 1. *Пусть функция $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ моногенна в области $\Omega_\zeta \subset E_3$. Тогда в шаре $B(\zeta_0, R)$ с центром в произвольной точке $\zeta_0 = x_0 + y_0e_2 + z_0e_3$ области Ω_ζ функция Φ представима в виде суммы сходящегося степенного ряда* (4), *при этом*

$$d_n = c_n + \Big(b_n - z_0(n+1)c_{n+1}\Big)\rho_1 + \Bigg(a_n + \frac{i}{2}y_0(n+1)c_{n+1} -$$

$$-z_0(n+1)b_{n+1} - \frac{\sqrt{3}}{2}iz_0(n+1)c_{n+1} + \frac{z_0^2}{2}(n+1)(n+2)c_{n+2}\Bigg)\rho_2 \qquad (6)$$

и a_n, b_n, c_n — коэффициенты рядов Тейлора входящих в представление (5) *функции* Φ *функций* F, F_1, F_2*:*

$$F(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi-\xi_0)^n,\ F_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\xi-\xi_0)^n,\ F_2(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi-\xi_0)^n, \quad (7)$$

где $\xi_0 = x_0 + iy_0$.

Доказательство. Поскольку функции F, F_1, F_2 голоморфны в круге $U(\xi_0, R)$, то в этом круге ряды (7) сходятся абсолютно. Тогда при всех $\zeta \in B_R(\zeta_0)$ равенство (5) принимает вид

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi-\xi_0)^n - z\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(\xi-\xi_0)^{n-1}\rho_1 + \frac{i}{2}y\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(\xi-\xi_0)^{n-1}\rho_2 -$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}iz\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(\xi-\xi_0)^{n-1}\rho_2 + \frac{z^2}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(\xi-\xi_0)^{n-2}\rho_2 +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\xi-\xi_0)^n\rho_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi-\xi_0)^n\rho_2 - z\sum_{n=1}^{\infty} nb_n(\xi-\xi_0)^{n-1}\rho_2.$$

Отсюда, учитывая соотношения

$$(\zeta-\zeta_0)^n = (\xi-\xi_0)^n - n(z-z_0)(\xi-\xi_0)^{n-1}\rho_1 + \frac{i}{2}n(y-y_0)(\xi-\xi_0)\rho_2 -$$

$$-\tfrac{\sqrt{3}}{2}in(z-z_0)(\xi-\xi_0)^{n-1}\rho_2 + \tfrac{1}{2}n(n-1)(z-z_0)^2(\xi-\xi_0)^{n-2}\rho_2,$$

$$(\zeta-\zeta_0)^n\rho_1 = (\xi-\xi_0)^n\rho_1 - n(z-z_0)(\xi-\xi_0)^{n-1}\rho_2, \quad (8)$$

$$(\zeta-\zeta_0)^n\rho_2 = (\xi-\xi_0)^n\rho_2$$

при всех $\zeta \in E_3$ и $n = 0, 1, \ldots$, приходим к разложению (4), коэффициенты которого определяются равенством (6), при этом ряд (4) абсолютно сходится в шаре $B(\zeta_0, R)$. Теорема доказана.

Теперь так же, как и для голоморфных функций комплексной переменной (см., например, [6, с. 118]), устанавливается следующая теорема единственности для моногенных функций, определенных в области $\Omega_\zeta \subset E_3$ и принимающих значения в алгебре $\mathbb{A}_3$.

Теорема 2. *Если две функции $\Phi_1 : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$, $\Phi_2 : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$, моногенные в произвольной области $\Omega_\zeta \subset E_3$, совпадают на некотором множестве, которое имеет хотя бы одну предельную точку, принадлежащую Ω_ζ, то они тождественно равны во всей области Ω_ζ.*

Следующая теорема содержит критерии моногенности функции $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$.

Теорема 3. *Функция $\Phi\colon \Omega_\zeta \longrightarrow \mathbb{A}_3$ является моногенной в области Ω_ζ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(I) *компоненты U_k, V_k при $k = 1, 2, 3$, разложения*

$$\Phi(x + ye_2 + ze_3) = \sum_{k=1}^{3} U_k(x, y, z)e_k + i \sum_{k=1}^{3} V_k(x, y, z)e_k$$

функции Φ по гармоническому базису (1) *дифференцируемы в области Ω и выполняются равенства*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, e_2, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, e_3 \tag{9}$$

в каждой точке области Ω_ζ;

(II) *функция Φ непрерывна в Ω_ζ и интеграл от нее по границе произвольного треугольника, замыкание которого содержится в Ω_ζ, равен нулю;*

(III) *для каждой точки ζ_0 области Ω_ζ найдется окрестность, в которой функция Φ разлагается в степенной ряд* (4).

Доказательство. Эквивалентность условия (I) и моногенности функции Φ доказана в теореме 1.3 из [2]. Эквивалентность условия (II) и моногенности функции Φ следует из теорем 3, 5 работы [5]. Наконец, эквивалентность условия (III) и моногенности функции Φ является следствием теоремы 1 и свойства сходящегося ряда (4) определять функцию, моногенную в круге сходимости. Теорема доказана.

3. Ряды Лорана и классификация изолированных особых точек моногенных функций. Заметим, что если область Ω является выпуклой в направлении оси Oz и функция $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ является моногенной в области Ω_ζ, то Φ продолжается до функции, моногенной в цилиндрической области $\Pi_\zeta := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 : (x, y) \in D\}$. Это следует непосредственно из равенства (5), правая часть которого является моногенной функцией в области Π_ζ.

Поэтому, рассматривая вопрос о разложении моногенной функции в ряд Лорана относительно точки $\zeta_0 := x_0 + y_0e_2 + z_0e_3$, будем предполагать, что она задана в неограниченной области $\mathcal{K}_\zeta \subset E_3$, конгруэнтной кольцевому цилиндру

$\mathcal{K} := \{(x, y, z) : 0 \le r < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < R \le \infty,\ z \in \mathbb{R}\}$.

Теорема 4. *Пусть $\zeta_0 = x_0 + y_0e_2 + z_0e_3$. Каждая моногенная в области $\mathcal{K}_\zeta$ функция $\Phi : \mathcal{K}_\zeta \to \mathbb{A}_3$ представима в ней в виде суммы сходящегося ряда*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(\zeta - \zeta_0)^n\,, \tag{10}$$

где $(\zeta - \zeta_0)^n := ((\zeta - \zeta_0)^{-1})^{-n}$ при $n = -1, -2, \ldots$ и коэффициенты d_n определяются формулами

$$d_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\tau)\Big((\tau - \zeta_0)^{-1}\Big)^{n+1} d\tau\,, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \tag{11}$$

в которых γ_ζ — любая замкнутая жорданова спрямляемая кривая в области $\mathcal{K}_\zeta$, один раз охватывающая прямую $\{\zeta_0 + ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$.

Доказательство. Поскольку входящие в равенство (5) функции F, F_1, F_2 голоморфны в кольце $\{\xi \in \mathbb{C} : r < |\xi - \xi_0| < R\}$ с центром в точке $\xi_0 = x_0 + iy_0$, то в этом кольце каждая из них допускает разложение в абсолютно сходящийся ряд Лорана

$$F(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\xi - \xi_0)^n,\ F_1(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\xi - \xi_0)^n,\ F_2(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\xi - \xi_0)^n.$$

Поэтому, переписывая равенство (5) в виде

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\xi - \xi_0)^n - z\left(\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(\xi - \xi_0)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_{-n}(\xi - \xi_0)^{-n-1}\right)\rho_1 +$$

$$+\Big(\frac{i}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}iz\Big)\left(\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(\xi - \xi_0)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_{-n}(\xi - \xi_0)^{-n-1}\right)\rho_2 +$$

$$+\frac{z^2}{2}\left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(\xi - \xi_0)^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_{-n}(\xi - \xi_0)^{-n-2}\right)\rho_2 +$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\xi-\xi_0)^n\rho_1+\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\xi-\xi_0)^n\rho_2-$$

$$-z\left(\sum_{n=1}^{\infty} nb_n(\xi-\xi_0)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty} nb_{-n}(\xi-\xi_0)^{-n-1}\right)\rho_2$$

и учитывая соотношения (8) при всех $\zeta \in \mathcal{K}_\zeta$ и $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, приходим к разложению функции Φ в ряд (10), коэффициенты которого определяются равенствами (6), при этом ряд (10) абсолютно сходится в кольце $\mathcal{K}_\zeta$. Умножая теперь обе части равенства (10) на $(\zeta-\zeta_0)^{-n-1}$ и интегрируя затем по кривой γ_ζ, получаем формулы (11) для коэффициентов ряда (10). Теорема доказана.

Очевидно, что каждый сходящийся в кольце $\mathcal{K}_\zeta$ ряд вида (10) с коэффициентами из алгебры $\mathbb{A}_3$ является в этом кольце рядом Лорана своей суммы. Совокупность членов ряда (10) с неотрицательными степенями называют его *правильной частью*, а совокупность членов этого ряда с отрицательными степенями — *главной частью.*

Компактифицируем алгебру $\mathbb{A}_3$, добавляя к ней бесконечно удаленную точку ∞, к которой сходится каждая последовательность $w_n := \xi_{1,n} + \xi_{2,n}e_2 + \xi_{3,n}e_3$, где $\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \xi_{3,n}e_3 \in \mathbb{C}$, в случае, когда хотя бы одна из последовательностей $\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \xi_{3,n}e_3$ сходится к бесконечно удаленной точке расширенной комплексной плоскости.

Теперь с использованием разложения (5) легко устанавливается следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть $\zeta_0 := x_0 + y_0e_2 + z_0e_3$. Если разложение Лорана* (10) *функции $\Phi : \mathcal{K}_\zeta \to \mathbb{A}_3$ в случае, когда внутренний радиус r кольцевого цилиндра $\mathcal{K}$ равен нулю,*

1) *не содержит главной части, то функция Φ имеет конечный предел*

$$\lim_{\substack{\zeta \to \zeta_0 + ze_3,\\ \zeta \notin \{\zeta_0 + ze_3 \,:\, z \in \mathbb{R}\}}} \Phi(\zeta) = A(z) \qquad \forall z \in \mathbb{R};$$

2) *содержит лишь конечное число слагаемых в главной части, то функция Φ имеет бесконечный предел*

$$\lim_{\substack{\zeta \to \zeta_0 + ze_3,\\ \zeta \notin \{\zeta_0 + ze_3 \,:\, z \in \mathbb{R}\}}} \Phi(\zeta) = \infty \qquad \forall z \in \mathbb{R}; \tag{12}$$

3) *содержит бесконечное число слагаемых в главной части, то функция* Φ *либо имеет бесконечный предел (12), либо не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при* $\zeta \to \zeta_0 + ze_3$, $\zeta \notin \{\zeta_0 + ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$ *и всех* $z \in \mathbb{R}$.

Из теоремы 5 следует, что изолированная точечная особенность у моногенной функции может быть только устранимой. А в случае, когда функция Φ имеет неустранимую особенность в точке ζ_0, особыми являются все точки прямой $\{\zeta_0 + ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$.

Список литературы

[1] Мельниченко И. П. *Алгебры функционально-инвариантных решений трехмерного уравнения Лапласа* // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 9. — С. 1284 – 1290.

[2] Мельниченко И. П., Плакса С. А. *Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля.* — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. — 230 с.

[3] Lorch E. R. *The theory of analytic runction in normed abelin vector rings* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — **54**. — P. 414 – 425.

[4] Blum E. K. *A theory of analytic functions in banach algebras* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1955. — **78**. — P. 343 – 370.

[5] Плакса С. А., Шпаковский В. С. *Интегральные теоремы для дифференцируемых функций в трехмерной гармонической алгебре* // Доп. НАН України. — 2010. — № 5. — С. 23 – 30.

[6] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ: В 2 ч. — Москва: Наука, 1976. — Ч. 1. — 320 с.

[7] Плакса С. А., Шпаковский В. С. Конструктивное описание моногенных функций в гармонической алгебре третьего ранга // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 8. — С. 821 – 830.