Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2012, том 9, N 2, 384–391

УДК 517.5

В. С. Шпаковский

(Институт математики НАН Украины, Киев)

Об изоморфизме функциональных алгебр в гармонической алгебре с двумерным радикалом

shpakivskyi@mail.ru

Посвящается светлой памяти Ю.И. Самойленко

Встановлено загальний вигляд афінного перетворення при переході від одного гармонічного базиса до іншого, при якому алгебри моногенних функцій ізоморфні.

We established a general form of an affine transformation at transition from a harmonic basis to another one, for which algebras of monogenic functions are isomorphic.

1. Введение. Пусть $\mathbb{A}_3$ — коммутативная ассоциативная банахова алгебра третьего ранга над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, базис которой состоит из единицы алгебры 1 и элементов ρ_1, ρ_2, для которых выполняются правила умножения:

$$\rho_1^2 = \rho_2, \quad \rho_1\rho_2 = \rho_2^2 = 0. \tag{1}$$

Алгебра $\mathbb{A}_3$ является *гармонической алгеброй* [1, 2], поскольку она содержит *гармонические базисы*, т. е. базисы $\{e_1, e_2, e_3\}$, удовлетворяющие условиям

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0, \qquad e_k^2 \neq 0, \ \ k = 1, 2, 3. \tag{2}$$

В теореме 1.6 из [2] показано, что гармоническими базисами в алгебре $\mathbb{A}_3$ являются базисы $\{e_1, e_2, e_3\}$, разложения которых по базису $\{1, \rho_1, \rho_2\}$ имеют вид

$$\begin{aligned} &e_1 = 1, \\ &e_2 = n_1 + n_2\rho_1 + n_3\rho_2, \\ &e_3 = m_1 + m_2\rho_1 + m_3\rho_2, \end{aligned} \tag{3}$$

где n_k, m_k при $k = 1, 2, 3$ — комплексные числа, удовлетворяющие системе

$$\begin{aligned} &1 + n_1^2 + m_1^2 = 0, \\ &n_1 n_2 + m_1 m_2 = 0, \\ &n_2^2 + m_2^2 + 2(n_1 n_3 + m_1 m_3) = 0, \\ &n_2 m_3 - n_3 m_2 \neq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

и хотя бы одно из чисел в каждой из пар (n_1, n_2), (m_1, m_2) отлично от нуля. При этом умножением элементов гармонических базисов вида (3) на произвольные обратимые элементы алгебры, могут быть получены все гармонические базисы в алгебре $\mathbb{A}_3$ [2, с. 29].

Выделим в алгебре $\mathbb{A}_3$ линейную оболочку $E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + +ze_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, порожденную векторами $e_1 = 1, e_2, e_3$. Подмножеству S трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ поставим в соответствие множество $S_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : (x, y, z) \in S\}$ в E_3.

Непрерывная функция $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ называется *моногенной* в области $\Omega_\zeta \subset E_3$, если Φ дифференцируема по Гато в каждой точке этой области, то есть если для каждого $\zeta \in \Omega_\zeta$ существует элемент $\Phi'(\zeta)$ алгебры $\mathbb{A}_3$ такой, что выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\right) \varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall h \in E_3. \tag{5}$$

В теореме 1.3 из [2] установлены необходимые и достаточные условия моногенности функции $\Phi(\zeta)$ переменной $\zeta = x + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta$, которые запишем здесь в свернутом виде:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, e_2, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, e_3. \tag{6}$$

Отметим, что каждая моногенная в области Ω_ζ функция Φ со значениями в алгебре $\mathbb{A}_3$ являются решением трехмерного уравнения Лапласа (см., например, [1]).

2. Алгебры моногенных функций. Заметим, что множество моногенных функций образует функциональную алгебру в области определения. Обозначим через $\mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$ алгебру функций, моногенных в области $\Omega_\zeta \subset E_3$ и принимающих значения в алгебре $\mathbb{A}_3$.

Наряду с гармоническим базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ будем рассматривать еще один гармонический базис $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Обозначим через $\widehat{E}_3 :=$ $:= \{\widehat{\zeta} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ линейную оболочку, порожденную векторами $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, и через $\widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}}$ — область в $\widehat{E}_3$.

В работе [3] найдено такое соответствие между областями Ω_ζ, $\widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}}$ при переходе от базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, при котором алгебры моногенных функций $\mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$, $\mathcal{M}(\widehat{E}_3, \widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}})$ изоморфны.

В данной работе установлены все возможные аффинные соответствия между областями Ω_ζ и $\widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}}$, при котором алгебры моногенных функций $\mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$ и $\mathcal{M}(\widehat{E}_3, \widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}})$ изоморфны.

Рассмотрим вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть гармонические базисы* $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ *связаны соотношениями*

$$\begin{aligned} &\tilde{e}_1 = e_1 = 1, \\ &\tilde{e}_2 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + r_{21}\rho_1 + r_{22}\rho_2, \\ &\tilde{e}_3 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + r_{31}\rho_1 + r_{32}\rho_2, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ *при* $k = 1, 2, 3$, *причем* $\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \neq 0$ *и* $r_{21}, r_{22}, r_{31}, r_{32} \in \mathbb{C}$. *Если функция* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ *является моногенной в области* Ω_ζ, *то функция*

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta}) = \Phi(\zeta) + \Phi'(\zeta)\Big((r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})\rho_1 + (r_{22}\tilde{y} + r_{32}\tilde{z})\rho_2\Big) + \\ + \tfrac{1}{2}\Phi''(\zeta)(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})^2\rho_2. \end{aligned} \tag{8}$$

является моногенной в области $\widetilde{\Omega}_{\widetilde{\zeta}}$ *такой, что координаты соответствующих точек* $\widetilde{\zeta} = \tilde{x}\tilde{e}_1 + \tilde{y}\tilde{e}_2 + \tilde{z}\tilde{e}_3 \in \widetilde{\Omega}_{\widetilde{\zeta}}$ *и* $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta$ *связаны соотношениями*

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} + \alpha_1\tilde{y} + \beta_1\tilde{z}, \\ y &= \alpha_2\tilde{y} + \beta_2\tilde{z}, \\ z &= \alpha_3\tilde{y} + \beta_3\tilde{z}. \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Покажем, что для функции (8) выполняются необходимые и достаточные условия моногенности

$$\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\tilde{y}} = \frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\tilde{x}}\,\tilde{e}_2\,, \qquad \frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\tilde{z}} = \frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\tilde{x}}\,\tilde{e}_3\,. \tag{10}$$

Следствием соотношений (9) являются операторные равенства

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial}{\partial\tilde{y}} = \alpha_1\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial z}\,,\\
&\frac{\partial}{\partial\tilde{z}} = \beta_1\frac{\partial}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial}{\partial y} + \beta_3\frac{\partial}{\partial z}\,,
\end{aligned}$$

с учетом которых получаем выражения частных производных функции (8):

$$\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\tilde{x}} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\Big((r_{21}\tilde{y}+r_{31}\tilde{z})\rho_1+(r_{22}\tilde{y}+r_{32}\tilde{z})\rho_2\Big)+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi''}{\partial x}(r_{21}\tilde{y}+r_{31}\tilde{z})^2\rho_2\,,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\tilde{y}} = \alpha_1\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \left(\alpha_1\frac{\partial\Phi'}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\Phi'}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\times\\
\times\Big((r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})\rho_1 + (r_{22}\tilde{y} + r_{32}\tilde{z})\rho_2\Big) + \frac{\partial\Phi}{\partial x}(r_{21}\rho_1 + r_{22}\rho_2)+\\
+\frac{1}{2}\left(\alpha_1\frac{\partial\Phi''}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\Phi''}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)(r_{21}\tilde{y}+r_{31}\tilde{z})^2\rho_2+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(r_{21}\tilde{y}+r_{31}\tilde{z})r_{21}\rho_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\tilde{z}} = \beta_1\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \beta_3\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}(r_{31}\rho_1 + r_{32}\rho_2)+\\
+\left(\beta_1\frac{\partial\Phi'}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial\Phi'}{\partial y} + \beta_3\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\Big((r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})\rho_1 + (r_{22}\tilde{y} + r_{32}\tilde{z})\rho_2\Big)+\\
+\frac{1}{2}\left(\beta_1\frac{\partial\Phi''}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial\Phi''}{\partial y} + \beta_3\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)(r_{21}\tilde{y}+r_{31}\tilde{z})^2\rho_2+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(r_{21}\tilde{y}+r_{31}\tilde{z})r_{31}\rho_2.
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения частных производных функции (8) и выражения (7) элементов $\tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ в равенства (10), а также учитывая при этом правила умножения (1) и условия (6), убеждаемся в выполнимости условий (10). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть гармонические базисы* $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ *связаны соотношениями* (7) *и функция* $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\Omega}_{\widetilde{\zeta}} \to \mathbb{A}_3$ *является моногенной в области* $\widetilde{\Omega}_{\widetilde{\zeta}}$. *Тогда существует единственная моногенная в области* Ω_ζ *функция* $\Phi(\zeta)$ *такая, что справедливо равенство* (8), *где координаты соответствующих точек* $\widetilde{\zeta} = \tilde{x}\tilde{e}_1 + \tilde{y}\tilde{e}_2 + \tilde{z}\tilde{e}_3 \in \widetilde{\Omega}_{\widetilde{\zeta}}$ *и* $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta$ *связаны соотношениями* (9).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\begin{gathered}\Phi(\zeta) = \widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta}) - \widetilde{\Phi}'(\widetilde{\zeta})\Big((r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})\rho_1 + (r_{22}\tilde{y} + r_{32}\tilde{z})\rho_2\Big) + \\ +\tfrac{1}{2}\widetilde{\Phi}''(\widetilde{\zeta})(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})^2\rho_2\,,\end{gathered} \tag{11}$$

моногенность которой доказывается аналогично тому, как при доказательстве леммы 1 доказана моногенность функции (8).

Докажем, что функция (11) удовлетворяет соотношению (8). С этой целью после умножения обеих частей равенства (11) на ρ_2 получим равенство

$$\rho_2\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta}) = \rho_2\Phi(\zeta),$$

следствием которого являются равенства

$$\rho_2\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\zeta}) = \rho_2\Phi'(\zeta), \quad \rho_2\widetilde{\Phi}''(\widetilde{\zeta}) = \rho_2\Phi''(\zeta). \tag{12}$$

Аналогично после умножения обеих частей равенства (11) на ρ_1 получаем равенства

$$\rho_1\Phi(\zeta) = \rho_1\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta}) - \rho_2\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\zeta})(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z}) = \rho_1\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta}) - \rho_2\Phi'(\zeta)(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z}),$$

следствием которых является равенство

$$\rho_1\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\zeta}) = \rho_1\Phi'(\zeta) + \rho_2\Phi''(\zeta)(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z}). \tag{13}$$

Подставляя равенства (12), (13) в равенство (11), убеждаемся в справедливости соотношения (8).

Докажем теперь единственность моногенной функции $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$, удовлетворяющей равенству (8). Для этого достаточно показать, что функции $\widetilde{\Phi} \equiv 0$ в $\widetilde{\Omega}_{\widetilde{\zeta}}$ соответствует лишь функция $\Phi \equiv 0$ в Ω_{ζ}. Так, при $\widetilde{\Phi} \equiv 0$ равенство (8) принимает вид

$$\begin{gathered}\Phi(\zeta) + \Phi'(\zeta)(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})\rho_1 + \\ +\Phi'(\zeta)(r_{22}\tilde{y} + r_{32}\tilde{z})\rho_2 + \tfrac{1}{2}\Phi''(\zeta)(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})^2\rho_2 \equiv 0\,.\end{gathered} \tag{14}$$

После умножения обеих частей тождества (14) на ρ_2 с учетом правил умножения (1) получим тождество $\Phi(\zeta)\rho_2 \equiv 0$, следствием которого являются соотношения

$$\Phi'(\zeta)\rho_2 \equiv 0, \qquad \Phi''(\zeta)\rho_2 \equiv 0. \tag{15}$$

Аналогично после умножения обеих частей тождества (14) на ρ_1 получим соотношение

$$\Phi(\zeta)\rho_1 + \Phi'(\zeta)(r_{21}\tilde{y} + r_{31}\tilde{z})\rho_2 \equiv 0,$$

которое с учетом первого из соотношений (15) превращается в тождество $\Phi(\zeta)\rho_1 \equiv 0$. Следовательно,

$$\Phi'(\zeta)\rho_1 \equiv 0. \tag{16}$$

Наконец, из соотношений (14) — (16) следует тождество $\Phi \equiv 0$. Лемма доказана.

Пусть теперь $\{e_1, e_2, e_3\}$ — гармонический базис вида

$$e_1 = 1, \;\; e_2 = i + \rho_2, \;\; e_3 = (1 - i)\rho_1, \tag{17}$$

а $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ — произвольный гармонический базис, разложение элементов которого по базису $\{1, \rho_1, \rho_2\}$ имеет вид (3), где вместо постоянных n_k, m_k при $k = 1, 2, 3$ содержатся соответственно постоянные $\tilde{n}_k, \tilde{m}_k$.

Из леммы 1.1 работы [2, с. 30] вытекает, что элемент $\widetilde{\zeta} = \tilde{x} + \tilde{y}\tilde{e}_2 + \tilde{z}\tilde{e}_3$ необратим тогда и только тогда, когда соответствующая точка $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^3$ принадлежит прямой

$$\widetilde{L}: \quad \begin{cases} \tilde{x} + \tilde{y}\,\mathrm{Re}\,\tilde{n}_1 + \tilde{z}\,\mathrm{Re}\,\tilde{m}_1 = 0, \\ \qquad \tilde{y}\,\mathrm{Im}\,\tilde{n}_1 + \tilde{z}\,\mathrm{Im}\,\tilde{m}_1 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что в пространстве E_3, порожденном векторами базиса (17), необратимыми являются все точки прямой $L_\zeta := \{ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$.

Всюду в дальнейшем

$$\alpha_1 := \mathrm{Re}\,\tilde{n}_1,\ \ \alpha_2 := \mathrm{Im}\,\tilde{n}_1,\ \ \alpha_3 := \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\,\tilde{n}_2,\ \ \beta_1 := \mathrm{Re}\,\tilde{m}_1\,,$$

$$\beta_2 := \mathrm{Im}\,\tilde{m}_1,\ \ \beta_3 := \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\,\tilde{m}_2,\quad r_{21} := \tfrac{1+i}{2}(\tilde{n}_2 + \mathrm{Im}\,\tilde{n}_2)\,,$$

$$r_{22} := \tilde{n}_3 - \mathrm{Im}\,\tilde{n}_1,\ \ r_{31} := \tfrac{1+i}{2}(\tilde{m}_2 + \mathrm{Im}\,\tilde{m}_2),\ \ r_{32} := \tilde{m}_3 - \mathrm{Im}\,\tilde{m}_1.$$

Легко устанавливается, что при отображении (9) прямая L_ζ переходит в прямую $\widetilde{L}_{\widetilde{\zeta}} = \{\widetilde{\zeta} = \tilde{x} + \tilde{y}\tilde{e}_2 + \tilde{z}\tilde{e}_3 : (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \widetilde{L}\}$.

Рассмотрим теперь произвольный гармонический базис $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ в $\mathbb{A}_3$. Его элементы представимы в виде

$$\hat{e}_1 = a\tilde{e}_1, \quad \hat{e}_2 = a\tilde{e}_2, \quad \hat{e}_3 = a\tilde{e}_3, \tag{18}$$

где a — обратимый элемент алгебры $\mathbb{A}_3$ и для элементов базиса $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ справедливы разложения вида (3) по базису $\{1, \rho_1, \rho_2\}$. Заметим, что элементы базиса $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ представимы также в виде (7).

Следующее утверждение является обобщением теоремы 5 из [3].

Теорема 1. *Пусть* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *— гармонический базис, элементы которого определены равенствами* (17), *а* $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ *— произвольный гармонический базис в* $\mathbb{A}_3$, *элементы которого представлены в виде* (18). *Пусть, кроме того,* Ω_ζ *— произвольная область в* E_3 *и* $\widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}}$ *— область в* $\widehat{E}_3$ *такая, что координаты соответствующих точек* $\widehat{\zeta} = \tilde{x}\hat{e}_1 + \tilde{y}\hat{e}_2 + \tilde{z}\hat{e}_3 \in \widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}}$ *и* $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta$ *связаны соотношениями* (9). *Тогда алгебры* $\mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$, $\mathcal{M}(\widehat{E}_3, \widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}})$ *изоморфны, при этом соответствие между функциями* $\Phi \in \mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$ *и* $\widehat{\Phi} \in \mathcal{M}(\widehat{E}_3, \widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}})$ *устанавливается равенством* (8), в котором надо положить $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta}\,) \equiv \widehat{\Phi}(\widehat{\zeta}\,)$.

Доказательство. Определим область $\widetilde{\Omega}_{\widetilde{\zeta}}$ в $\widetilde{E}_3 := \{\widetilde{\zeta} = \tilde{x}\tilde{e}_1 + \tilde{y}\tilde{e}_2 + \tilde{z}\tilde{e}_3 : \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \mathbb{R}\}$, координаты точек $\widetilde{\zeta}$ которой связаны с координатами соответствующих точек $\zeta \in \Omega_\zeta$ соотношениями (9), и каждой функции $\Phi \in \mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$ поставим в соответствие функцию $\widetilde{\Phi} \in \mathcal{M}(\widetilde{E}_3, \widetilde{\Omega}_{\widetilde{\zeta}})$ по формуле (8). В силу лемм 1, 2 такое соответствие между алгебрами $\mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$, $\mathcal{M}(\widetilde{E}_3, \widetilde{\Omega}_{\widetilde{\zeta}})$ является взаимно однозначным. При этом из равенства

$$\widetilde{\Phi}_1(\widetilde{\zeta}\,)\widetilde{\Phi}_2(\widetilde{\zeta}\,) = \Phi_1(\zeta)\Phi_2(\zeta)+$$

$$+\left(\Phi_1(\zeta)\Phi_2'(\zeta)+\Phi_2(\zeta)\Phi_1'(\zeta)\right)\left((r_{21}\tilde{y}+r_{31}\tilde{z})\rho_1+(r_{22}\tilde{y}+r_{32}\tilde{z})\rho_2)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\Phi_1''(\zeta)\Phi_2(\zeta)+2\Phi_1'(\zeta)\Phi_2'(\zeta)+\Phi_1(\zeta)\Phi_2''(\zeta)\right)(r_{21}\tilde{y}+r_{31}\tilde{z})^2\rho_2$$

следует, что произведение функций $\widetilde{\Phi}_1, \widetilde{\Phi}_2 \in \mathcal{M}(\widetilde{E}_3, \widetilde{\Omega}_{\widetilde{\zeta}})$ соответствует произведению функций $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$, то есть алгебры $\mathcal{M}(E_3, \Omega_\zeta)$, $\mathcal{M}(\widetilde{E}_3, \widetilde{\Omega}_{\widetilde{\zeta}})$ изоморфны.

Наконец, изоморфизм между алгебрами $\mathcal{M}(\widehat{E}_3, \widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}})$, $\mathcal{M}(\widetilde{E}_3, \widetilde{\Omega}_{\widetilde{\zeta}})$ устанавливается с помощью равенства $\widehat{\Phi}(\widehat{\zeta}\,) := \widetilde{\Phi}(\widetilde{\zeta}\,)$, где $\widehat{\zeta} = \tilde{x}\hat{e}_1 + \tilde{y}\hat{e}_2 + \tilde{z}\hat{e}_3 \in \widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}}$, $\widetilde{\zeta} = \tilde{x}\tilde{e}_1 + \tilde{y}\tilde{e}_2 + \tilde{z}\tilde{e}_3 \in \widetilde{\Omega}_{\widetilde{\zeta}}$, при этом моногенность функции $\widehat{\Phi}$ в области $\widehat{\Omega}_{\widehat{\zeta}}$ является очевидным следствием условий моногенности (10) для функции $\widetilde{\Phi}$ и обратимости элемента $a \in \mathbb{A}_3$. Теорема доказана.

Автор искренне признателен профессору С. А. Плаксе за многочисленные обсуждения результатов этой работы, полезные советы и замечания.

Список литературы

[1] Мельниченко И. П. *Алгебры функционально-инвариантных решений трехмерного уравнения Лапласа* // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 9. — С. 1284 — 1290.

[2] Мельниченко И. П., Плакса С. А. *Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля*. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. — 230 с.

[3] Плакса С. А., Шпаковский В. С. *Конструктивное описание моногенных функций в гармонической алгебре третьего ранга* // Укр. мат. журн. — 2010. — **8**. — С. 1078 — 1091.