УДК 517.548

В. С. Шпаківський, Т. С. Кузьменко

Про один клас кватерніонних відображень

Рассмотрен новый класс кватернионных отображений, имеющих связь с пространственными уравнениями в частных производных. Получено описание всех отображений из этого класса, с помощью четырех аналитических функций комплексной переменной.

V. S. Shpakivskyi, T. S. Kuzmenko

On one class of quaternionic mappings

We consider a new class of quaternionic mappings, associated with the spatial partial differential equations. We describe all mappings from this class using four analytic functions of the complex variable.

1. Вступ. Кватерніонний аналіз вже давно сформувався і активно розвивається як окремий напрямок в математиці, завдяки його численним застосуванням в різних галузях науки, переважно в математичній фізиці та в диференціальних рівняннях (див., наприклад, [1, 2]). Реалізація такого зв'язку полягає у введенні спеціальних класів кватерніонних "диференційовних" функцій, компоненти яких задовольняють певні системи диференціальних рівнянь типу системи Коші – Рімана.

Так початком кватерніонного аналізу у просторі $\mathbb{R}^3$ була робота Г. Моісіла і Н. Теодореско [3], у якій вперше запропоновано тривимірний аналог системи рівнянь Коші – Рімана. Вони ввели поняття *голоморфного вектора*, як кватерніоннозначної вектор-функції, компоненти якої неперервно диференційовні і задовольняють згадану вище систему, що дістала назву системи Моісіла – Теодореско. В тій же роботі [3] автори довели аналог теореми Морера та аналоги інтегральної теореми та інтегральної формули Коші. Започатковані в [3] дослідження були продовжені в роботі [4], де введено поняття інтеграла типу Коші та досліджено існування його граничних значень, а також знайдено його застосування до систем сингулярних інтегральних рівнянь.

Р. Фютер [5] побудував чотиривимірне узагальнення системи Моісіла – Теодореско та для введених ним *регулярних* функцій довів аналоги класичних результатів комплексного аналізу.

Згадані дослідження були узагальнені в роботі [6] і разом із застосуваннями у деяких моделях математичної фізики, відображені також в монографії [2]. Слід також відмітити, що так звані α*-голоморфні* функції f, які є об'єктом дослідження роботи [2], задовольняють тривимірне рівняння Гельмгольца

$$(\Delta_3+\alpha)f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\alpha f = 0,$$

де α — кватерніон.

Останні дослідження у цьому напрямку (див., наприклад, [18],[19],[20]) полягають в різного роду узагальненнях результатів роботи [2].

Іншим, порівняно новим, напрямком кватерніонного аналізу в $\mathbb{R}^3$ і $\mathbb{R}^4$ є так званий модифікований кватерніонний аналіз, започаткований Г. Льойтвілером на початку 90-х років (див., наприклад, [7 – 9]). У конструкції Г. Льойтвілера в $\mathbb{R}^3$ перші дві компоненти, введених ним *гіперголоморфних* функцій $f = u(x,y,z)+iv(x,y,z)+jw(x,y,z)$ (де i,j — базисні кватерніонні одиниці), задовольняють рівняння Лапласа-Бельтрамі

$$z\Delta_3 u - \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

а третя компонента w — рівняння

$$z^2\Delta_3 w - z\frac{\partial w}{\partial z} + w = 0.$$

В роботі [7] отримано розклад гіперголоморфної функції в ряд по деякій системі кватерніонних поліномів.

На відміну від робіт [3, 5, 6, 2], в підході Г. Льойтвілера гіперголорфною є степенева функція, а частинні похідні гіперголорфної функції знову гіперголорфні. В той же час між описаними вище напрямками існує певний зв'язок (див. [9]).

Ще однією сучасною теорією в кватерніонному аналізі є теорія так званих s*-регулярних* функцій, які введені Г. Джентілі та Д. Струппою в роботі [11] в результаті розвитку ідеї К. Кулліна [10].

Ідея полягає в наступному. Кожен кватерніон $x := x_0 + \mathrm{Im}\ x$ при $x \neq x_0$ можна подати у вигляді "комплексного числа" з новою уявною одиницею I, а саме: $x = x_0 + I\,|\,\mathrm{Im}\ x|$, де $I := \frac{\mathrm{Im}\ x}{|\mathrm{Im}\ x|}$, а $|\cdot|$ — модуль кватерніона. Очевидно, що $I^2 = -1$. У такому ж вигляді можна подати й кватерніоннозначну функцію: $f(x) = U(x_0, |\,\mathrm{Im}\ x|) + I\,V(x_0, |\,\mathrm{Im}\ x|)$. Тоді функція f називається s*-регулярною* (див. [11]), якщо "комплекснозначна" функція $f = U + IV$ є голоморфною функцією "комплексної" змінної $x = x_0 + I\,|\,\mathrm{Im}\ x|$. Очевидно, що s-регулярними є всі кватерніонні поліноми. У наш час теорія s-регулярних функцій продовжує стрімко розвиватися (див. монографії [12, 13]).

В цій роботі розглядається спеціальний клас відображень в алгебрі комплексних кватерніонів, який не охоплюється згаданими вище теоріями. Зазначимо, що комутативна алгебра бікомплексних чисел (або комутативних кватерніонів Сегре [14]) є підалгеброю алгебри комплексних кватерніонів. В цій підалгебрі виділимо тривимірний дійсний підпростір і розглянемо відображення, які визначені в області цього підпростору і приймають значення у всій алгебрі комплексних кватерніонів. Такі відображення, які є неперервними і диференційовними за Гато, назвемо G*-моногенними.* Вони і є основним об'єктом дослідження.

Встановлено, що G-моногенними є не лише кватерніонні поліноми, а й кватерніонні степеневі ряди. Більше того, в роботі встановлено конструктивний опис усіх G-моногенних відображень за допомогою чотирьох аналітичних функцій комплексної змінної. Як наслідок, похідна Гато G-моногенного відображення в свою чергу є G-моногенним відображенням. Крім того, досліджено зв'язок G-моногенних відображень з просторовими рівняннями з частинними похідними. Зокрема, наведено застосування моногенних відображень до побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа.

2. Алгебра комплексних кватерніонів. Нехай $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ — алгебра кватерніонів над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, базис якої складається з одиниці алгебри 1 і елементів I, J, K, для яких виконуються наступні правила множення:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1,\ IJ = -JI = K,\ JK = -KJ = I,\ KI = -IK = J.$$

Розглянемо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ інший базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, розклад елементів якого в базисі $\{1, I, J, K\}$ має вигляд

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + iI), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1 - iI), \quad e_3 = \frac{1}{2}(iJ - K), \quad e_4 = \frac{1}{2}(iJ + K),$$

де i — уявна комплексна одиниця. Таблиця множення в новому базисі набуває вигляду

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	0	e_3	0
e_2	0	e_2	0	e_4
e_3	0	e_3	0	e_1
e_4	e_4	0	e_2	0

. (1)

Норма кватерніона $a = \sum\limits_{k=1}^{4} a_k e_k,\ a_k \in \mathbb{C}$ визначається рівністю

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{4} |a_k|^2}\,, \tag{2}$$

а одиниця алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ в цьому базисі є сумою ідемпотентів: $1 = e_1 + e_2$. Очевидно також, що комутативна підалгебра з базисом $\{e_1, e_2\}$ є згаданою вище алгеброю бікомплексних чисел або алгеброю комутативних кватерніонів Сегре [14].

Нагадаємо (див., наприклад, [15, с. 64]), що підмножина $\mathcal{I} \subset \mathbb{H}(\mathbb{C})$ називається *лівим* (або *правим*) *ідеалом*, якщо з умови $x \in \mathcal{I}$ випливає $yx \in \mathcal{I}$ (або $xy \in \mathcal{I}$) для довільного $y \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$. Тепер відмітимо, що алгебра $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ містить два праві максимальні ідеали

$$\mathcal{I}_1 := \{\lambda_2 e_2 + \lambda_4 e_4 : \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{C}\}, \qquad \mathcal{I}_2 := \{\lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3 : \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{C}\}$$

і два ліві максимальні ідеали

$$\widehat{\mathcal{I}}_1 := \{\lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 : \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}\}, \qquad \widehat{\mathcal{I}}_2 := \{\lambda_1 e_1 + \lambda_4 e_4 : \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{C}\}.$$

Очевидно, що радикал алгебри складається лише з нульового елемента, тобто алгебра $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ напівпроста.

Наслідком очевидних рівностей

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \widehat{\mathcal{I}}_1 \cap \widehat{\mathcal{I}}_2 = 0, \qquad \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \widehat{\mathcal{I}}_1 \cup \widehat{\mathcal{I}}_2 = \mathbb{H}(\mathbb{C})$$

є розклад в пряму суму:

$$\mathbb{H}(\mathbb{C}) = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 = \widehat{\mathcal{I}}_1 \oplus \widehat{\mathcal{I}}_2.$$

Введемо в розгляд лінійні функціонали $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $f_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, покладаючи

$$f_1(e_1) = f_1(e_3) = 1, \qquad f_1(e_2) = f_1(e_4) = 0,$$
$$f_2(e_2) = f_2(e_4) = 1, \qquad f_2(e_1) = f_2(e_3) = 0,$$

при цьому очевидно $f_1(\mathcal{I}_1) = f_2(\mathcal{I}_2) = 0$.

Визначимо також лінійні функціонали $\widehat{f}_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $\widehat{f}_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ рівностями

$$\widehat{f}_1(e_1) = \widehat{f}_1(e_4) = 1, \qquad \widehat{f}_1(e_2) = \widehat{f}_1(e_3) = 0,$$
$$\widehat{f}_2(e_2) = \widehat{f}_2(e_3) = 1, \qquad \widehat{f}_2(e_1) = \widehat{f}_2(e_4) = 0,$$

для яких очевидно $\widehat{f}_1(\widehat{\mathcal{I}}_1) = \widehat{f}_2(\widehat{\mathcal{I}}_2) = 0$.

3. Ліво-G-моногенні та право-G-моногенні відображення. Нехай

$$i_1 = 1, \qquad i_2 = a_1 e_1 + a_2 e_2, \qquad i_3 = b_1 e_1 + b_2 e_2 \tag{3}$$

при $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2$ — трійка лінійно незалежних векторів над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Це означає, що рівність

$$\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3 = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Виділимо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ лінійну оболонку $E_3 := \{\zeta = x i_1 + y i_2 + z i_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжену векторами i_1, i_2, i_3. Області Ω тривимірного простору $\mathbb{R}^3$ поставимо у відповідність область $\Omega_\zeta := \{\zeta = x i_1 + y i_2 + z i_3 : (x, y, z) \in \Omega\}$ в E_3.

Введемо позначення

$$\xi_1 := f_1(\zeta) = \widehat{f}_1(\zeta) = x + y a_1 + z b_1,$$

$$\xi_2 := f_2(\zeta) = \widehat{f}_2(\zeta) = x + y a_2 + z b_2.$$

Тепер елемент $\zeta \in E_3$ можна подати у вигляді $\zeta = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$, і згідно визначення (2)

$$\|\zeta\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2}. \tag{4}$$

Відмітимо, що в подальшому істотним є припущення: $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Очевидно, що воно має місце тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел у кожній з пар (a_1, b_1), (a_2, b_2) належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Скажемо, що деякий функціонал $f : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *право–мультиплікативний* (або *ліво–мультиплікативний*), якщо для довільних $x \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $y \in E_3$ справедлива рівність $f(yx) = f(y)f(x)$ (або $f(xy) = f(x)f(y)$).

Лема 1. *Функціонали $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $f_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ неперервні і право–мультиплікативні, а функціонали $\widehat{f_1} : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $\widehat{f_2} : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ неперервні і ліво–мультиплікативні.*

Доведення. Відповідна мультиплікативність всіх функціоналів встановлюється безпосередньою перевіркою, а неперервність — випливає з їх обмеженості. А саме, якщо $a = \sum\limits_{k=1}^{4} a_k e_k \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, то, наприклад для f_1, маємо

$$\frac{|f_1(a)|}{\|a\|} \le \frac{|a_1| + |a_3|}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + |a_4|^2}} \le 2.$$

Аналогічно доводиться неперервність інших функціоналів. Лему доведено.

Неперервне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ (або $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$) називається *право-$G$-моногенним* (або *ліво-$G$-моногенним*) в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, якщо Φ (або $\widehat{\Phi}$) диференційовне за Гато у кожній точці цієї області, тобто якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ (або $\widehat{\Phi}'(\zeta)$) алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} (\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta))\varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_3 \tag{5}$$

$$\left(\text{або } \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\widehat{\Phi}(\zeta + \varepsilon h) - \widehat{\Phi}(\zeta)\right) \varepsilon^{-1} = \widehat{\Phi}'(\zeta) h \quad \forall\, h \in E_3\right). \tag{6}$$

При цьому $\Phi'(\zeta)$ назвемо *правою похідною Гато* в точці ζ, а $\widehat{\Phi}'(\zeta)$ — *лівою похідною Гато* в точці ζ.

Теорема 1. *Відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{4} U_k(x, y, z) e_k, \quad x, y, z \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

де $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ — диференційовні функції в області Ω, є право-G-моногенним або ліво-G-моногенним в області $\Omega_\zeta \subset E_3$ тоді і тільки тоді, коли виконуються відповідно умови:

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} = a_1 \frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} = a_2 \frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_3}{\partial y} = a_2 \frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_4}{\partial y} = a_1 \frac{\partial U_4}{\partial x},$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial z}=b_1\frac{\partial U_1}{\partial x},\quad \frac{\partial U_2}{\partial z}=b_2\frac{\partial U_2}{\partial x},\quad \frac{\partial U_3}{\partial z}=b_2\frac{\partial U_3}{\partial x},\quad \frac{\partial U_4}{\partial z}=b_1\frac{\partial U_4}{\partial x}. \tag{8}$$

або

$$\begin{gathered}\frac{\partial U_1}{\partial y}=a_1\frac{\partial U_1}{\partial x},\quad \frac{\partial U_2}{\partial y}=a_2\frac{\partial U_2}{\partial x},\quad \frac{\partial U_3}{\partial y}=a_1\frac{\partial U_3}{\partial x},\quad \frac{\partial U_4}{\partial y}=a_2\frac{\partial U_4}{\partial x},\\ \frac{\partial U_1}{\partial z}=b_1\frac{\partial U_1}{\partial x},\quad \frac{\partial U_2}{\partial z}=b_2\frac{\partial U_2}{\partial x},\quad \frac{\partial U_3}{\partial z}=b_1\frac{\partial U_3}{\partial x},\quad \frac{\partial U_4}{\partial z}=b_2\frac{\partial U_4}{\partial x}.\end{gathered} \tag{9}$$

Доведення. *Необхідність.* Якщо відображення (7) право-G-моногенне в області Ω_ζ, то при $h=i_1$ рівність (5) набуває вигляду

$$\Phi'(\zeta)=\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\,e_k,\quad \zeta=xi_1+yi_2+zi_3\in\Omega_\zeta.$$

Тепер, покладаючи в рівності (5) спочатку $h=i_2$, а потім $h=i_3$, та з урахуванням правил множення для базисних елементів, отримаємо умови (8) для компонент право-G-моногенного відображення (7).

Достатність. Нехай $\zeta=xi_1+yi_2+zi_3\in\Omega_\zeta$, $h:=h_1i_1+h_2i_2+h_3i_3$, де $h_1,h_2,h_3\in\mathbb{R}$ і додатне число ε таке, що $\zeta+\varepsilon h\in\Omega_\zeta$. Враховуючи умови (8), маємо

$$\begin{gathered}(\Phi(\zeta+\varepsilon h)-\Phi(\zeta))\varepsilon^{-1}-h\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\,e_k=\\ =\varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{4}(U_k(x+\varepsilon h_1,y+\varepsilon h_2,z+\varepsilon h_3)-U_k(x,y,z))e_k-\\ -\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}h_1+a_1\frac{\partial U_1}{\partial x}h_2+b_1\frac{\partial U_1}{\partial x}h_3\right)e_1-\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}h_1+a_2\frac{\partial U_2}{\partial x}h_2+b_2\frac{\partial U_2}{\partial x}h_3\right)e_2-\\ -\left(\frac{\partial U_3}{\partial x}h_1+a_1\frac{\partial U_3}{\partial x}h_2+b_1\frac{\partial U_3}{\partial x}h_3\right)e_3-\left(\frac{\partial U_4}{\partial x}h_1+a_2\frac{\partial U_4}{\partial x}h_2+b_2\frac{\partial U_4}{\partial x}h_3\right)e_4=\\ =\varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{4}\Big(U_k(x+\varepsilon h_1,y+\varepsilon h_2,z+\varepsilon h_3)-U_k(x,y,z)-\\ -\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\,\varepsilon h_1-\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial y}\,\varepsilon h_2-\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial z}\,\varepsilon h_3\Big)e_k.\end{gathered} \tag{10}$$

Внаслідок диференційовності функцій U_k в області Ω справедливі співвідношення

$$U_k(x+\varepsilon h_1,y+\varepsilon h_2,z+\varepsilon h_3)-U_k(x,y,z)-\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial x}\varepsilon h_1-$$

$$-\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial y}\varepsilon h_2-\frac{\partial U_k(x,y,z)}{\partial z}\varepsilon h_3=o(\varepsilon),\quad \varepsilon\to 0,\ k=\overline{1,4}.$$

Тому, перейшовши до границі в рівності (10) при $\varepsilon\to 0$, отримаємо рівність (5). Аналогічно доводиться випадок для ліво- G -моногенного відображення. Теорему доведено.

Відмітимо, що умови (8) і (9) є аналогами умов Коші – Рімана і у згорнутому вигляді можуть бути записані так:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=i_2\,\frac{\partial\Phi}{\partial x},\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=i_3\,\frac{\partial\Phi}{\partial x} \tag{11}$$

для право- G -моногенного відображення, і

$$\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial y}=\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial x}\,i_2,\qquad \frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial z}=\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial x}\,i_3 \tag{12}$$

для ліво- G -моногенного відображення.

Розглянемо приклади право- і ліво- G -моногенних відображень. Враховуючи подання елемента ζ у вигляді $\zeta=\xi_1e_1+\xi_2e_2$ і таблицю множення алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, маємо $\zeta^n=\xi_1^n\,e_1+\xi_2^n\,e_2$. Шляхом перевірки умов (11), (12), легко переконатися в тому, що відображення $\Phi(\zeta)=\zeta^n$ є одночасно право- і ліво- G -моногенним у всьому просторі E_3. Аналогічно перевіряється, що відображення

$$\Phi(\zeta)=\sum_{k=0}^{n}\zeta^k\,c_k,\quad c_k\in\mathbb{H}(\mathbb{C}) \tag{13}$$

є право- G -моногенним в E_3, а відображення

$$\widehat{\Phi}(\zeta)=\sum_{k=0}^{n}c_k\,\zeta^k,\quad c_k\in\mathbb{H}(\mathbb{C})$$

— ліво- G -моногенним в E_3.

4. Конструктивний опис право- G -моногенних і ліво- G -моногенних відображень.

Лема 2. *Розклад резольвенти має вигляд*

$$(t-\zeta)^{-1}=\frac{1}{t-\xi_1}\,e_1+\frac{1}{t-\xi_2}\,e_2,\quad \forall\, t\in\mathbb{C}:\ t\neq\xi_1,\,t\neq\xi_2. \tag{14}$$

Доведення. Встановимо при яких $t\in\mathbb{C}$ в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ існує елемент $(t-\zeta)^{-1}$ і знайдемо коефіцієнти A_k його розкладу за базисом:

$$(t-\zeta)^{-1}=\sum_{k=1}^{4}A_k\,e_k.$$

Враховуючи подання (3) елементів i_1, i_2, i_3 за базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ і таблицю множення алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, маємо

$$1 = (t-\zeta)(t-\zeta)^{-1} = ((t-\xi_1)e_1 + (t-\xi_2)e_2)\sum_{k=1}^{4} A_k\, e_k =$$

$$= (t-\xi_1)A_1e_1 + (t-\xi_1)A_3e_3 + (t-\xi_2)A_2e_2 + (t-\xi_2)A_4e_4 = e_1 + e_2.$$

Тепер прирівнюючи коефіцієнти при відповідних базисних одиницях, отримуємо розклад (14). Лему доведено.

Із рівності (14) випливає, що точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, які відповідають необоротним елементам $\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in E_3$, лежать на прямих

$$L_1 : x + y\,\mathrm{Re}\ a_1 + z\,\mathrm{Re}\ b_1 = 0, \qquad y\,\mathrm{Im}\ a_1 + z\,\mathrm{Im}\ b_1 = 0,$$

$$L_2 : x + y\,\mathrm{Re}\ a_2 + z\,\mathrm{Re}\ b_2 = 0, \qquad y\,\mathrm{Im}\ a_2 + z\,\mathrm{Im}\ b_2 = 0$$

в просторі $\mathbb{R}^3$.

Область $\Omega \in \mathbb{R}^3$ називають *опуклою в напрямку прямої* L, якщо вона містить кожен відрізок, який паралельний прямій L і з'єднує дві точки цієї області.

Лема 3. *Нехай область $\Omega \in \mathbb{R}^3$ опукла в напрямку прямих L_1 і L_2, $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, а відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ право-G-моногенне в області Ω_ζ. Якщо точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x, y, z) \in L_1\}$, то*

$$\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) \in \mathcal{I}_1. \tag{15}$$

Якщо ж точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x, y, z) \in L_2\}$, то

$$\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) \in \mathcal{I}_2. \tag{16}$$

Співвідношення (15) доводиться за схемою доведення леми 1 роботи [16], в якому замість прямої L необхідно використати пряму L_1, а замість функціонала f потрібно використовувати функціонал f_1. Аналогічно доводиться співвідношення (16) з заміною L_1 і f_1 відповідно на L_2 і f_2. При цьому використовується лема 1 цієї роботи.

Повністю аналогічно доводиться і наступне твердження.

Лема 4. *Нехай область $\Omega \in \mathbb{R}^3$ опукла в напрямку прямих L_1 і L_2, $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, а відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ ліво-G-моногенне в області Ω_ζ. Якщо точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x, y, z) \in L_1\}$, то*

$$\widehat{\Phi}(\zeta_1) - \widehat{\Phi}(\zeta_2) \in \widehat{\mathcal{I}}_1.$$

Якщо ж точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ *такі, що* $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x,y,z) \in L_2\}$, *то*

$$\widehat{\Phi}(\zeta_1) - \widehat{\Phi}(\zeta_2) \in \widehat{\mathcal{I}}_2.$$

Теорема 2. *Кожне право-G-моногенне в області Ω_ζ відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \Phi_{10}(\zeta) + \Phi_{20}(\zeta),$$

де $\Phi_{10} : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_1$, $\Phi_{20} : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_2$ — деякі право-G-моногенні в області Ω_ζ відображення зі значеннями в правих максимальних ідеалах $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$, а кожне ліво-$G$-моногенне в області Ω_ζ відображення подається у вигляді

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \widehat{\Phi}_{10}(\zeta) + \widehat{\Phi}_{20}(\zeta), \tag{17}$$

де $\widehat{\Phi}_{10} : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_1$, $\widehat{\Phi}_{20} : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_2$ — деякі ліво-G-моногенні в області Ω_ζ відображення зі значеннями в лівих максимальних ідеалах $\widehat{\mathcal{I}}_1, \widehat{\mathcal{I}}_2$.

Доведення. Із розкладу одиниці $1 = e_1 + e_2$ випливає, що довільне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається у вигляді

$$\Phi = e_1\Phi + e_2\Phi$$

і при цьому $e_1\Phi \in \mathcal{I}_2$, а $e_2\Phi \in \mathcal{I}_1$.

Введемо позначення $\Phi_{10} := e_2\Phi$, $\Phi_{20} := e_1\Phi$. Покажемо, що відображення Φ_{10}, Φ_{20} право-G-моногенні в області Ω_ζ. Для цього рівність (5) помножимо зліва на e_1:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} e_1(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta))\varepsilon^{-1} = e_1 h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_3. \tag{18}$$

Оскільки елементи e_1 та h належать комутативній підалгебрі з базисом $\{e_1, e_2\}$, то $e_1 h = h e_1$, і тому з рівності (18) випливає рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} (e_1\Phi(\zeta + \varepsilon h) - e_1\Phi(\zeta))\varepsilon^{-1} = h e_1\Phi'(\zeta),$$

яка і доводить, що відображення Φ_{20} право-G-моногенне в області Ω_ζ. Аналогічно доводиться права-G-моногенність відображення Φ_{10}.

Аналогічно доводиться представлення (17). Теорему доведено.

В наступній теоремі описано усі право- та ліво-G-моногенні відображення зі значеннями відповідно в ідеалах $\mathcal{I}_1$ та $\widehat{\mathcal{I}}_1$ за допомогою аналітичних функцій відповідної комплексної змінної.

Для формулювання результату введемо позначення

$$D_1 := f_1(\Omega_\zeta) \subset \mathbb{C}, \quad D_2 := f_2(\Omega_\zeta) \subset \mathbb{C}.$$

Теорема 3. *Нехай область* Ω *опукла в напрямку прямої* L_2 *і* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Тоді кожне право-*$G$*-моногенне відображення* $\Phi_{10} : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_1$ *подається у вигляді*

$$\Phi_{10}(\zeta) = F_{12}(\xi_2)e_2 + F_{14}(\xi_2)e_4 \qquad \forall\, \zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta, \tag{19}$$

а ліво-G*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi}_{10} : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_1$ *подається у такому вигляді*

$$\widehat{\Phi}_{10}(\zeta) = F_{11}(\xi_2)e_2 + F_{13}(\xi_2)e_3 \qquad \forall\, \zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta, \tag{20}$$

де $F_{12}, F_{14}, F_{11}, F_{13}$ *— деякі аналітичні в області* D_2 *функції змінної* $\xi_2 := x + ya_2 + zb_2$.

Доведення. Оскільки Φ_{10} приймає значення в ідеалі $\mathcal{I}_1$, то справедлива рівність

$$\Phi_{10}(\zeta) = V_2(x,y,z)e_2 + V_4(x,y,z)e_4, \tag{21}$$

де $V_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ і $V_4 : \Omega \to \mathbb{C}$.

Для відображення Φ_{10} виконуються умови правої-G- моногенності (11) при $\Phi = \Phi_{10}$, з яких після підстановки в них виразів (3), (21), з урахуванням однозначності розкладу елементів алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ за базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, отримаємо систему для знаходження функцій V_2, V_4:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_2}{\partial y} &= a_2\frac{\partial V_2}{\partial x}\,,\\
\frac{\partial V_4}{\partial y} &= a_2\frac{\partial V_4}{\partial x}\,,\\
\frac{\partial V_2}{\partial z} &= b_2\frac{\partial V_2}{\partial x}\,,\\
\frac{\partial V_4}{\partial z} &= b_2\frac{\partial V_4}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{22}$$

З першого і третього рівняння системи (22) знайдемо функцію V_2. Для цього виділимо дійсну і уявну частину змінної ξ_2:

$$\xi_2 = (x + y\,\mathrm{Re}\ a_2 + z\,\mathrm{Re}\ b_2) + i(y\,\mathrm{Im}\ a_2 + z\,\mathrm{Im}\ b_2) := \tau_2 + i\eta_2$$

і відмітимо, що наслідком вказаних рівнянь є рівності

$$\frac{\partial V_2}{\partial \eta_2}\,\mathrm{Im}\ a_2 = i\frac{\partial V_2}{\partial \tau_2}\,\mathrm{Im}\ a_2, \quad \frac{\partial V_2}{\partial \eta_2}\,\mathrm{Im}\ b_2 = i\frac{\partial V_2}{\partial \tau_2}\,\mathrm{Im}\ b_2. \tag{23}$$

Оскільки $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$ випливає, що хоча б одне з чисел $\mathrm{Im}\ a_2$ або $\mathrm{Im}\ b_2$ відмінне від нуля, то з (23) отримуємо рівність

$$\frac{\partial V_2}{\partial \eta_2} = i\frac{\partial V_2}{\partial \tau_2}.$$

Тепер так, як і при доведенні теореми 2 з [16], з використанням леми 3 і теореми 6 з [17] доводиться рівність $V_2(x_1, y_1, z_1) = V_2(x_2, y_2, z_2)$ для точок $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \Omega$ таких, що відрізок, який з'єднує ці точки, паралельний прямій L_2. Звідси випливає, що функція V_2 вигляду $V_2(x, y, z) := F_{12}(\xi_2)$, де F_{12} — довільна аналітична функція в області D_2, є загальним розв'язком системи, яка складається з першого і третього рівнянь системи (22).

Тепер з другого і четвертого рівнянь системи (22) аналогічно встановлюємо, що функція V_4 має вигляд $V_4(x, y, z) := F_{14}(\xi_2)$, де F_{14} — довільна аналітична в області D_2 функція.

Повністю аналогічно доводиться рівність (20). Теорему доведено.

В наступній теоремі, яка доводиться повністю аналогічно до теореми 3, описано усі право- та ліво-G-моногенні відображення зі значеннями відповідно в ідеалах $\mathcal{I}_2$ та $\widehat{\mathcal{I}}_2$ алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ за допомогою аналітичних функцій відповідної комплексної змінної.

Теорема 4. *Нехай область Ω опукла в напрямку прямої L_1 і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Тоді кожне право-$G$-моногенне відображення $\Phi_{20} : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_2$ подаєтьса у вигляді*

$$\Phi_{20}(\zeta) = F_{21}(\xi_1)e_1 + F_{23}(\xi_1)e_3 \qquad \forall\, \zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta, \tag{24}$$

а ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi}_{20} : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_2$ подаєтьса у такому вигляді

$$\widehat{\Phi}_{20}(\zeta) = F_{22}(\xi_2)e_1 + F_{24}(\xi_1)e_4 \qquad \forall\, \zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta, \tag{25}$$

де $F_{21}, F_{23}, F_{22}, F_{24}$ — деякі аналітичні в області D_1 функції змінної $\xi_1 := x + ya_1 + zb_1$.

З урахуванням теореми 2 та рівностей (19), (24) доведено наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай область Ω опукла в напрямку прямих L_1 і L_2, а $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Тоді кожне право-$G$-моногенне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подаєтьса у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + F_3(\xi_1)e_3 + F_4(\xi_2)e_4 \tag{26}$$

$$\forall\, \zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta,$$

де F_1 і F_3 — деякі аналітичні в області D_1 функції змінної $\xi_1 := x + ya_1 + zb_1$, а F_2 і F_4 — деякі аналітичні в області D_2 функції змінної $\xi_2 := x + ya_2 + zb_2$.

Тепер очевидно, що розглянуте вище відображення (13) буде право-G-моногенним в E_3, оскільки для нього функції F_1, F_2, F_3, F_4 будуть поліномами. Але тепер можна сказати й більше. А саме, право-G-моногенним у відповідній області відображенням буде не тільки поліном вигляду (13), а й ряд вигляду

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k c_k, \qquad c_k \in \mathbb{H}(\mathbb{C}), \tag{27}$$

для якого комплексні степеневі ряди, що виступають в ролі аналітичних функцій F_1, F_2, F_3, F_4, є збіжними.

Тепер, в силу рівностей (20) і (25), справедливе твердження для ліво-G-моногенного відображення.

Теорема 6. *Нехай область* Ω *опукла в напрямку прямих* L_1 *і* L_2, *а* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Тоді кожне ліво-*$G$*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *подається у вигляді*

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + F_3(\xi_2)e_3 + F_4(\xi_1)e_4 \tag{28}$$

$$\forall\, \zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta,$$

де F_1 *і* F_4 *— деякі аналітичні в області* D_1 *функції змінної* $\xi_1 := x + ya_1 + zb_1$, *а* F_2 *і* F_3 *— деякі аналітичні в області* D_2 *функції змінної* $\xi_2 := x + ya_2 + zb_2$.

Аналогічно до (27), відображення

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, \zeta^k, \qquad c_k \in \mathbb{H}(\mathbb{C}), \tag{29}$$

є ліво-g-моногенним.

Очевидно, що формула (26) дає можливість побудувати усі право-G-моногенні відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, а формула (28) дає можливість побудувати усі ліво-G-моногенні відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ за допомогою чотирьох аналітичних функцій відповідної комплексної змінної. Відмітимо, що в роботі [21] за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної будуються так звані A_t*-гіперголоморфні* функції в довільній алгебрі Келі-Діксона A_t над полем $\mathbb{R}$.

Порівнюючи праві частини рівностей (26) і (28), приходимо до висновку, що відображення $\Psi(\zeta)$ буде одночасно право- і ліво-G-моногенним тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд $\Psi(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + c_3e_3 + c_4e_4$, де $c_3, c_4 \in \mathbb{C}$. Тепер очевидно, що відображеня $\Psi(\zeta) = \zeta^n = \xi_1^n\, e_1 + \xi_2^n\, e_2$ одночасно право- і ліво-G-моногенне в E_3.

Прямим наслідком представлень (26), (28) є той факт, що множини усіх право- і ліво-G-моногенних відображень зі значення в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ утворюють функціональні алгебри в областях їх визначення. Тобто добуток двох, наприклад, право-G-моногенних відображень знову є право-G-моногенним відображенням.

З урахуванням розкладу (14) і правил множення (1), одержуємо наступні інтегральні представлення право- і ліво-G-моногенних відображень

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}(t-\zeta)^{-1}(F_1(t)e_1+F_3(t)e_3)dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}(t-\zeta)^{-1}(F_2(t)e_2+F_4(t)e_4)dt,$$

$$\widehat{\Phi}(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}(F_1(t)e_1+F_4(t)e_4)(t-\zeta)^{-1}dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}(F_2(t)e_2+F_3(t)e_3)(t-\zeta)^{-1}dt,$$

де замкнені жорданові спрямлювані криві Γ_k лежать у відповідних областях D_k, охоплюють відповідні точки ξ_k і не містять точок ξ_n, $k,n=1,2$ при $k\neq n$.

Відмітимо також, що похідні Гато право-G-моногенного відображення $\Phi(\zeta)$ і ліво-G-моногенного відображення $\widehat{\Phi}(\zeta)$ виражаються відповідно формулами

$$\Phi'(\zeta)=F_1'(\xi_1)e_1+F_2'(\xi_2)e_2+F_3'(\xi_1)e_3+F_4'(\xi_2)e_4 \tag{30}$$

і

$$\widehat{\Phi}'(\zeta)=F_1'(\xi_1)e_1+F_2'(\xi_2)e_2+F_3'(\xi_2)e_3+F_4'(\xi_1)e_4.$$

Наступне твердження випливає безпосередньо з рівності (26) і (28), праві частини яких є відповідно право- і ліво-G-моногенним відображенням в області $\Pi_\zeta:=\{\zeta\in E_3: f_1(\zeta)\in D_1,\ f_2(\zeta)\in D_2\}$.

Теорема 7. *Нехай область Ω опукла в напрямку прямих L_1 і L_2, $f_1(E_3)=f_2(E_3)=\mathbb{C}$, і відображення $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ право-G-моногенне, а $\widehat{\Phi}:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ — ліво-G-моногенне в області Ω_ζ. Тоді Φ і $\widehat{\Phi}$ продовжуються до відображеннь, які є відповідно право- і ліво-G-моногенним в області Π_ζ.*

Теорема 7 дає можливість легко знайти область право-G-моногенності відображення (27) і ліво-G-моногенності відображення (29).

Принциповим наслідком рівностей (26) та (28) є наступне твердження, справедиве для право- і ліво-G-моногенних відображень в довільній області Ω_ζ.

Теорема 8. *Нехай область Ω опукла в напрямку прямих L_1 і L_2, $f_1(E_3)=f_2(E_3)=\mathbb{C}$, і відображення $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ право-G-моногенне, а*

$\widehat{\Phi}:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ — *ліво-G-моногенне в області Ω_ζ. Тоді похідні Гато усіх порядків відображень Φ і $\widehat{\Phi}$ є відповідно право- і ліво-G-моногенними відображеннями в області Ω_ζ.*

Доведення. Оскільки куля $\mho$ (яка повністю міститься в області Ω) з центром в довільній точці $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ є опуклою множиною в напрямку прямих L_1 і L_2, то в околі $\mho_\zeta:=\{\zeta=xi_1+yi_2+zi_3:(x,y,z)\in\mho\}$ точки $\zeta_0=x_0i_1+y_0i_2+z_0i_3$ справедливі рівності (26) і (30). Але при цьому компоненти розкладу (30) є аналітичними функціями відповідних комплексних змінних, тобто вираз для $\Phi'(\zeta)$ має вигляд рівності (26), а це і означає праву-G-моногенність відображення $\Phi'(\zeta)$. Аналогічно доводиться для похідної Гато довільного порядку і для ліво-G-моногенного відображення $\widehat{\Phi}(\zeta)$. Теорему доведено.

5. Зв'язок право- і ліво-G-моногенних відображень з рівняннями в частинних похідних. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних із сталими коефіцієнтами:

$$\mathcal{L}_nU(x,y,z):=\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n}C_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\partial^nU}{\partial x^\alpha\partial y^\beta\partial z^\gamma}=0,\qquad C_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathbb{R}. \tag{31}$$

Якщо відображення $\Phi(\zeta)$ є n разів право-диференційовним за Гато, а відображення $\widehat{\Phi}(\zeta)$ є n разів ліво-диференційовним за Гато, то наслідком рівностей (5) і (6) є відповідно рівності

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}\Phi}{\partial x^\alpha\partial y^\beta\partial z^\gamma}=i_1^\alpha\,i_2^\beta\,i_3^\gamma\,\Phi^{(\alpha+\beta+\gamma)}(\zeta)=i_2^\beta\,i_3^\gamma\,\Phi^{(n)}(\zeta)$$

і

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}\widehat{\Phi}}{\partial x^\alpha\partial y^\beta\partial z^\gamma}=\widehat{\Phi}^{(\alpha+\beta+\gamma)}(\zeta)\,i_1^\alpha\,i_2^\beta\,i_3^\gamma=\widehat{\Phi}^{(n)}(\zeta)\,i_2^\beta\,i_3^\gamma.$$

Тому внаслідок рівності

$$\mathcal{L}_n\Phi(\zeta)=\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n}C_{\alpha,\beta,\gamma}\,i_2^\beta\,i_3^\gamma\;\Phi^{(n)}(\zeta) \tag{32}$$

кожне n разів право-диференційовне за Гато відображення Φ при виконанні умов $\Phi^{(n)}(\zeta)\neq0$ і

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n}C_{\alpha,\beta,\gamma}\,i_2^\beta\,i_3^\gamma=0 \tag{33}$$

задовольняє рівняння $\mathcal{L}_n\Phi(\zeta)=0$. Аналогічно внаслідок рівності

$$\mathcal{L}_n\widehat{\Phi}(\zeta)=\widehat{\Phi}^{(n)}(\zeta)\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n}C_{\alpha,\beta,\gamma}\,i_2^\beta\,i_3^\gamma \tag{34}$$

кожне n разів ліво-диференційовне за Гато відображення $\widehat{\Phi}$ при виконанні умов $\widehat{\Phi}^{(n)}(\zeta) \neq 0$ і (33) задовольняє рівняння $\mathcal{L}_n\widehat{\Phi}(\zeta) = 0$. Відповідно, усі дійснозначні компоненти розкладу відображень Φ і $\widehat{\Phi}$ за базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4, ie_1, ie_2, ie_3, ie_4\}$ є розв'язками рівняння (31).

Таким чином, задача про побудову розв'язків рівняння (31) у вигляді компонент право- або ліво-диференційовних за Гато відображень зводиться до відшукання в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ трійки лінійно незалежних над полем $\mathbb{R}$ векторів (3), які задовольняють характеристичне рівняння (33).

Відмітимо, що якщо обидва функціонали f_1, f_2 приймають значення в $\mathbb{C}$, то згідно з теоремою 8 кожне право- і ліво-G-моногенне відображення задовольняє рівність (32).

Очевидно, що співвідношення

$$f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C} \tag{35}$$

має місце тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел у кожній з пар (a_1, b_1), (a_2, b_2) належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Якщо рівняння (31) має особливий вигляд, то можна вказати достатні умови для виконання співвідношень (35). Для цього введемо позначення

$$P(a, b) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, a^{\beta}\, b^{\gamma}. \tag{36}$$

Теорема 9. *Нехай в алгебрі* $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *існує трійка лінійно незалежних над полем* $\mathbb{R}$ *векторів вигляду* (3), *які задовольняють рівність* (33). *Тоді якщо* $P(a, b) \neq 0$ *при всіх дійсних значеннях* a, b, *то виконуються співвідношення* (35).

Доведення. Використовуючи таблицю множення алгебри, маємо рівності

$$i_2^{\beta} = a_1^{\beta} e_1 + a_2^{\beta} e_2, \qquad i_3^{\gamma} = b_1^{\gamma} e_1 + b_2^{\gamma} e_2.$$

Тепер рівність (33) набуває вигляду

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} C_{\alpha,\beta,\gamma} \left(a_1^{\beta}\, b_1^{\gamma}\, e_1 + a_2^{\beta}\, b_2^{\gamma}\, e_2 \right) = 0.$$

або в рівносильній формі

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, a_k^{\beta}\, b_k^{\gamma} = 0, \qquad k = 1, 2. \tag{37}$$

Оскільки розв'язок системи (37) існує (за умовою теореми) і $P(a, b) \neq 0$ при всіх дійсних a, b, то рівності (37) можуть виконуватися лише тоді, коли хоча б одне з чисел у кожній з пар (a_1, b_1), (a_2, b_2) належить множині $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Теорему доведено.

Тепер зауважимо, що з умови теореми $P(a, b) \neq 0$ випливає, що завжди $C_{n,0,0} \neq 0$, оскільки в іншому випадку при $a = b = 0$ було б $P(a, b) = 0$. А також оскільки функція $P(a, b)$ неперервна на $\mathbb{R}^2$, то умова $P(a, b) \neq 0$ по суті означає одне з двох $P(a, b) > 0$ або $P(a, b) < 0$ при всіх $a, b \in \mathbb{R}$.

Очевидно також, що рівняння вигляду (31) еліптичного типу завжди задовольняє умову $P(a, b) \neq 0$ при всіх $a, b \in \mathbb{R}$. Але в той же час існують рівняння вигляду (31) для яких $P(a, b) > 0$ і які не є еліптичними. Таким, наприклад, є рівняння

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^5 u}{\partial x \partial z^4} = 0.$$

6. Приклад. Покажемо зв'язок право- і ліво-G-моногенних відображень з тривимірним рівнянням Лапласа:

$$\Delta_3 U(x, y, z) := \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{38}$$

Для рівняння (38) характеристичне рівняння (33), набуває вигляду

$$1 + i_2^2 + i_3^2 = 0. \tag{39}$$

Подібно до [22], трійку лінійно назалежних над полем $\mathbb{R}$ векторів $i_1 = 1, i_2, i_3$ назвемо *гармонічною трійкою*, якщо має місце рівність (39) і виконуються умови $i_2^2 \neq 0$, $i_3^2 \neq 0$.

Після підстановки рівностей (3) в умови (39) приходимо до наступного твердження: *гармонічними трійками в алгебрі* $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є вектори* $1, i_2, i_3$, *розклад яких за базисом* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *має вигляд* (3) *і комплексні числа* a_k, b_k, $k = 1, 2$ *задовольняють систему рівнянь*

$$1 + a_1^2 + b_1^2 = 0, \qquad 1 + a_2^2 + b_2^2 = 0. \tag{40}$$

Систему (40) задовольняють, зокрема, вирази $a_1 = i \sin t$, $b_1 = i \cos t$, $a_2 = i \sin \tau$, $b_2 = i \cos \tau$, $t, \tau \in \mathbb{C}$, яким відповідають

$$\xi_1 = x + iy \sin t + iz \cos t, \quad \xi_2 = x + iy \sin \tau + iz \cos \tau, \quad t, \tau \in \mathbb{C}. \tag{41}$$

Оскільки для рівняння Лапласа $P(a, b) = 1 + a^2 + b^2 > 0$, то умови теореми 9 виконуються, а значить кожне право- і ліво-G-моногенне відображення задовольняє рівняння (38). Представлення (26) і (28), в яких ξ_1, ξ_2 визначені рівностями (41), визначають моногенні відображення в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, пов'язані з рівнянням (38). Звідси випливає, що розв'язками рівняння (38) є дійсна і уявна частини функції $U(x,y,z) = F(x + iy\sin t + iz\cos t)$, де $t \in \mathbb{C}$ і F — довільна аналітична функція.

Література

[1] *Gürlebeck K, Sprössig W.* Quaternionic and Clifford calculus for physicists and engineers. — John Wiley and Sons, 1997.

[2] *Kravchenko V. V., Shapiro M. V.* Integral representations for spatial models of mathematical physics. — Pitman Research Notes in Mathematics, Addison Wesley Longman Inc, 1996.

[3] *Moisil G. C., Theodoresco N.* Functions holomorphes dans l'espace // Mathematica (Cluj). — 1931. — **5**. — P. 142–159.

[4] *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. — М.: Наука, 1966.

[5] *Fueter R.* Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen // Comment. math. helv. — 1935. — **7**. — P. 307–330.

[6] *Sudbery A.* Quaternionic analysis // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. —1979. — **85**. — P. 199–225.

[7] *Leutwiler H.* Modified quaternionic analysis in $\mathbb{R}^3$ // Complex variables theory appl. —1992. — **20**. — P. 19–51.

[8] *Hempfling Th., Leutwiler H.* Modified quaternionic analysis in $\mathbb{R}^4$ // Clifford algebras and their appl. in math. physics. — Aachen: Kluwer, Dordrecht. — 1998. — P. 227–238.

[9] *Eriksson-Bique S.-L.* A correspondence of hyperholomorphic and monogenic functions in $\mathbb{R}^4$ // Clifford analysis and its applications, NATO Science Series. — 2001. — **25**. — P. 71–80.

[10] *Cullen C. G.* An integral theorem for analytic intrinsic functions on quaternions // Duke Math. J. — 1965. — **32**. — P. 139–148.

[11] *Gentili G., Struppa D. C.* A new approach to Cullen-regular functions of a quaternionic variable // Comptes Rendus Mathematique. — 2006. — **342**(10). — P. 741–744.

[12] *Colombo F., Sabadini S., Struppa D. C.* Noncommutative functional calculus: theory and applications of slice hyperholomorphic functions. — Progress in Mathematics 289, 2011.

[13] *Gentili G., Stoppato C., Struppa D.* Regular Functions of a Quaternionic Variable. — Springer Monographs in Mathematics, 2013.

[14] *Segre C.* The real representations of complex elements and extension to bi-complex systems // Math. Ann. — 1892. — **40**. — P. 413—467.

[15] *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. — М.: Мир, 1976.

[16] *Plaksa S. A., Shpakovskii V. S.* Constructive description of monogenic functions in a harmonic algebra of the third rank // Ukr. Math. J.— 2011. — **62**, No. 8. — C. 1251–1266.

[17] *Толстов Г. П. О криволинейном и повторном интеграле* // Труды Мат.ин-та АН СССР. — 1950. — **35**. — С. 3—101.

[18] *Herus O. F.* On hyperholomorphic functions of the space variable // Ukr. Math. J. — 2011. — **63**, No. 4. — P. 530–537.

[19] *Gerus O. F., Shapiro M.* On the boundary values of a quaternionic generalization of the Cauchy-type integral in $\mathbb{R}^2$ for rectifiable curves // J. Natural Geometry. — 2003. — **24**, No. 1–2, 121–136.

[20] *Schneider B.* Some properties of a Cauchy-type integral for the Moisil-Theodoresco system of partial differential equations // Ukr. Math. J. — 2006. — **58**, No. 1, 105–112.

[21] *Flaut C., Shpakivskyi V.* Holomorphic functions in generalized Cayley-Dickson algebras // Adv. Appl. Clifford Alg., DOI 10.1007/s00006-014-0479-8

[22] *Ketchum P. W.* Analytic functions of hypercomplex variables // Trans. Amer. Math. Soc. — 1928. — **30**, No. 4, 641–667.